

Differentiable Dynamical System の問題について

名大 教養 白 岩 謙 一

今年の4月東京で行なわれた、多様体論国際会議で、S. Smale, C. Zeeman, D. Sullivan 等から聞いたことをもとにして、Differentiable Dynamical System の理論において、現在未解決の問題の中より重要と思われるものを、いくつか取り出して解説することにする。勿論ここにあげるのは、私にとって興味のあるものを中心であって、一定の偏りをもっているが、この方面を研究しようとする方や、この分野に興味をもっている方々の参考になれば幸いである。

§1 構造的安定性

M を C^∞ 多様体, $f: M \rightarrow M$ を C^r 微分同相写像 ($r \geq 1$) とする. f の周期点全体の集合を $\text{Per}(f)$, 非遊走点全体の集合を $\Omega(f)$ とする. これは f 不変で $\Omega(f) \supset \text{Per}(f)$ となる. ここで $\Omega(f)$ は閉集合である.

M, N を C^∞ 多様体, $f: M \rightarrow M, g: N \rightarrow N$ を C^r 微分

同相写像 ($r \geq 1$) とする. 〃ま, 同相写像 $h: M \rightarrow N$ があって, $hf = gh$ が成立するとき, f と g は 位相的に共役と〃〃, $f \sim g$ で表わす.

また, 同相写像 $h: \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$ があって, $hf = gh$ が $\Omega(f)$ 上で成立するとき, f と g は Ω 上で位相的に共役と〃〃, $f \sim_{\Omega} g$ で表わす.

M, N をコンパクトな C^∞ 多様体とする. $C^r(M, N)$ を M から N への C^r 写像全体の集合に C^r 位相を入れた空間とする. ($r \geq 1$) すると, これは Banach 多様体となる. $\text{Diff}^r(M)$ を M から M への C^r 微分同相写像全体の作る $C^r(M, M)$ の部分集合とすると, これは開集合となる. (したがって $\text{Diff}^r(M)$ は Baire 空間となる).

微分同相写像 $f: M \rightarrow M$ が 構造的に安定 とは, f の $\text{Diff}^r(M)$ における適当な近傍 $\mathcal{U}$ があって, $\mathcal{U} \ni g$ はすべて f と位相的に共役になるときをいう. また, $f \sim g$ の代わりに $f \sim_{\Omega} g$ が成り立つとき, f は Ω -安定 といい.

構造的安定性に関する最も基本的なものは, 勿論, 構造的に安定 (または Ω -安定) となるための必要十分条件を求めることである. そして, この問題は, 微分可能な力学系の理論の発展の中で, 最も大きな柱の1つである. そして, この問題の現在の到達点について述べると共に, これと5孤

生ずる問題を述べることにする.

C^0 多様体 M の接ベクトル束 $T(M)$ とする. $\Lambda \subset M$ に対し $T_\Lambda(M)$ をその Λ への制限とする. C^1 微分同相写像 $f: M \rightarrow M$ の微分 Tf は $T(M)$ の束同型を引き起す. 同様, $f(\Lambda) = \Lambda$ とすると Tf は $T_\Lambda(M)$ の束同型となる.

$\Lambda \subset M$ がコンパクトで $f(\Lambda) = \Lambda$ とする. 以下, 次の2つの条件をみたすとき, Λ を f の双曲型集合としよう.

(1) $T_\Lambda(M)$ は Tf 不変な2つの部分ベクトル束 E^s, E^u の Whitney 和に分解される. 即ち $T_\Lambda(M) = E^s \oplus E^u$

(2) 適当な定数 $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ があって, M の適当な Riemannian metric に依りて

$$\|Tf^n(v)\| \leq C \lambda^n \|v\|, \quad v \in E^s$$

$$\|Tf^{-n}(v)\| \leq C \lambda^n \|v\|, \quad v \in E^u$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ が成立する.

C^1 微分同相写像 $f: M \rightarrow M$ に対して, $x \sim y$ ($x, y \in M$) とは $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ となることを定義する. (ただし, d は M の metric). この同値類を W_x^s で表す. 同様に $x \sim_u y$ ($x, y \in M$) を $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0$ と定義し, その同値類を W_x^u で表す.

定理1 (Cf. [4]) Λ が f の双曲型集合で S , $x \in \Lambda$ に対して, W_x^s, W_x^u は E_x^s, E_x^u から S の injective C^1 immersion の

像である. (E_x^0, E_x^1 は E^0, E^1 の x 上のファイバー.)

次に $f: M \rightarrow M$ (C^∞ 微分同相写像) に対して, 主要な性質を公理の形で述べる.

Axiom A (a) $\Omega(f)$ は f の双曲型集合である.

$$(b) \overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$$

定理 2 (cf. [4]) f が Axiom A を満たすとき, $M = \bigcup_{x \in \Omega(f)} W_x^s$
 $= \bigcup_{x \in \Omega(f)} W_x^u$: (ただし M はコンパクト.)

次に, $E^s = \{v \in T(M) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tf^n(v)\| = 0\}$, $E^u = \{v \in T(M) \mid$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tf^{-n}(v)\| = 0\}$, $E_x^s = E^s \cap T_x(M)$, $E_x^u = E^u \cap T_x(M)$
 とおく, とき $T_x(M) = E_x^s + E_x^u$ かつ, すべて $x \in M$ に対して成立するとき, f は strong transversality condition を満たすといふ.

定理 3 (cf. [0]) $f: M \rightarrow M$ がコンパクト C^∞ 多様体 M の C^∞ 微分同相写像で, strong transversality condition を満たすならば, f は 構造的に安定 である.

この定理によつて, 構造的に安定とあるための十分条件が与えられたわけであるが, 2 点が必要であることが問題である.

定理 4 (cf. [4]) $f: M \rightarrow M$ が Axiom A を満たす C^∞ 微分同相写像 ($\gamma \geq 1$), (M はコンパクト) とする. このとき,

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$$

なる $\Omega(f)$ の分割で, 次の性質 E を満たすものが存在する.

(1) Ω_i は空でない f 不変な閉集合である. $i=1, \dots, k$ は, このような空でない f 不変な閉集合 2 つの和に分割できる. $i=1, \dots, k$

(2) $f|_{\Omega_i}: \Omega_i \rightarrow \Omega_i$ ($i=1, \dots, k$) は dense orbit を持つ.

この定理による $\Omega(f)$ の分割 $\{\Omega_1, \dots, \Omega_k\} \in \Omega(f)$ の スベクトル分解 とする.

$W^s(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W_x^s$, $W^u(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W_x^u$ とおく.
 (2) $W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_j) \neq \emptyset$ のとき, $\Omega_i \leq \Omega_j$ と定義する. $\leq$ は $\{\Omega_1, \dots, \Omega_k\}$ の順序を生成するとき, 互に $\leq$ による cycle を存在しないとき, f は no cycle property を満たすという.

定理 5 M をコンパクト (多) 多様体で, $f: M \rightarrow M$ を C^1 級合同同胚写像 ($r \geq 1$) とする. M が f を Axiom A と no cycle property を満たすならば, f は Ω -安定である. (cf. [5]).

定理 6 上と同じ記号で, f が Axiom A を満たし, Ω -安定ならば, f は no cycle property を満たす. (cf. [8]).

以上から生ずる問題として, 次のようなものがある.

問題 1 (a) 構造的に安定ならば Axiom A を満たすか.

(b) Ω -安定ならば Axiom A を満たすか.

問題 2 f が Axiom A を満たすとき, 定理 4 (2) の $f|_{\Omega_i}$

を位相的に分類せよ.

可算個の開密な開集合の共通部分を含む集合を residual という. $\text{Diff}^r(M)$ の適当な residual set に属する f に対して成り立つような性質を generic という.

問題3 W_x^s, W_x^u ($x \in M$) が M の smooth submanifold となるような性質は generic か.

問題4 Axiom A(a) と Axiom A(b) が 等 である.

Pugh [9] の closing lemma と, $r=1$ のときは, Axiom A(b) が generic であることは知られている.

問題5 Axiom A と no cycle property を満たす f に対して, そのスペクトル分解 $\{\Omega_1, \dots, \Omega_k\}$ の作る順序集合を特長づけよ.

問題6 Axiom A を満たす f の homotopy class を特長づけよ. (cf. Zeeman [6]).

§2 Anosov 微分同相写像

$f: M \rightarrow M$ が, コンパクト多様体 M の C^r 微分同相写像のとき ($r \geq 1$), M が f の双曲型集合となれば, f を Anosov 微分同相写像 とする.

問題7 f が Anosov ならば $\Omega(f) = M$ となるか.

問題8 f が Anosov ならば $\Omega(f) = M$ ならば, f は hyperbolic inframannifold automorphism と位相的に共役か.

問題9 2つの homotopic な Anosov 微合同相写像は、位相的に共役か。

これに就いて, Newhouse [7], Franks [3] によれば, codimension 1, すなわち $\dim E^s = 1$ または $\dim E^u = 1$ なる S , 上の問題 7, 8, 9 は肯定的である。

また Manning [6] によれば, infranilmanifold 上の Anosov 微合同相写像は hyperbolic infranilmanifold automorphism と位相的に共役である。従って今後は, infranilmanifold 以外の Anosov 微合同相写像が存在するかどうかが問題となる。さらに、この問題は基本的である。

問題10 Anosov diffeomorphism の homotopy class を特徴づけよ。例えば Anosov $f: M \rightarrow M$ に対して,

$f_*: H_1(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{R})$ は hyperbolic か。すなわち、固有値はすべて絶対値が 1 にならないか。

これに就いては Franks [2], Hirsch [4], Shiraiwa [11] Manning [5] がある。

§3 Morse Smale Diffeomorphism とその他

M をコンパクト C^∞ 微分多様体。 $f: M \rightarrow M \in C^r$ 微合同相写像 ($r \geq 1$) とする。すなわち、次の条件をみたすとき、 f は Morse Smale とする。

- (1) $\Omega(f)$ は有限集合, (なお $\Omega(f) = \text{Per}(f)$)。

(2) $\Omega(f)$ は f の双曲型集合

(3) $\Omega(f) \ni x, y$ に対して, $W_x^{s\bullet}$ と W_y^u は transversal に交わる.

Morse Smale の微合同相写像に就いて基本的な問題は次のようにある.

問題11 Morse Smale に就いて, Axiom A と no cycle property が成立することは知られているか, (Cf. [13]), 是非について, 問題5を考えよ.

問題12 Morse Smale 微合同相写像の homotopy class を特徴づけよ.

この問題について, Shub [12], Bowen [1] によれば, $f: M \rightarrow M$ が Morse Smale ならば, $f_*: H_*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{R})$ の固有値は, すべてのベキ根である.

問題13 同相写像 $h: M \rightarrow M$ に対して, その topological entropy を entropy h で表わす. 11 3 $h_*: H_*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_*(M; \mathbb{R})$ の固有値の絶対値の最大を λ とするとき,

$$\text{entropy } h \geq \log \lambda$$

が成立するか.

この問題については Bowen [1] による部分的な結果がある. 少なくとも Axiom A をみたし $\dim \Omega = 0$ ならば, 上は成立する.

さて最後の問題として.

問題14 以上の問題の analogy を flow の場合に考察せよ.

そして, 微分同相写像の問題は, flow の問題から来たと
いう歴史的事実がある. Smale によれば, 微分同相写像の
理論から flow の理論への橋渡しは, 割り合ひ簡単であること
である. しかし, Zeeman によれば, その逆の方が容易なこ
とであるとの事であるが, 両方の問題を同時に意識しな
から考えた方がよいと知られる.

参考文献

- [1] R. Bowen: Entropy versus Homology for Certain Diffeomorphisms, to appear
- [2] J. Franks: Anosov Diffeomorphisms on Tori, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 117-124.
- [3] J. Franks: Anosov Diffeomorphisms, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 61-94.
- [4] M. Hirsch: Anosov Maps, Polycyclic Groups and Homology, Topology 10 (1971), 177-184.
- [5] A. Manning: Anosov Diffeomorphisms on Nilmanifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 423-426.
- [6] A. Manning: There are no New Anosov Diffeomorphisms on

Tori, to appear

[7] S. Newhouse: On Codimension One Anosov Diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970), 761-770.

[8] J. Palis: A note on Ω -Stability, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 221-222.

[9] C. Pugh: An Improved Closing Lemma and a General Density Theorem, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010-1021.

[10] J. Robbin: A Structural Stability Theorem, Ann. of Math. 94 (1971), 447-493.

[11] K. Shiraiwa: Some conditions on Anosov Diffeomorphisms, to appear

[12] M. Shub: Morse-Smale Diffeomorphisms are Unipotent on Homology, Salvador Symposium on Dynamical Systems.

[13] S. Smale: Morse Inequalities for a Dynamical System, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 43-49.

[14] S. Smale: Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 747-817.

[15] S. Smale: The Ω -Stability Theorem, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 289-298.

[16] C. Zeeman: to appear