

保型形式の満たす微分方程式について

大山 陽介 (大阪大・理学部)
Ohyama, Y.

0. はじめに

テータ零値の満たす微分方程式の研究は Jacobi にさかのぼる。その後、Halphen、Chazy などが研究したが、今世紀に入って、まとまった研究としては忘れ去られた感がある。テータ零値に限らない一般の保型形式の満たす微分関係式については、その後も散発的にいろいろ研究されているようである。なお、最近、自己双対 Einstein 計量との関係が指摘されている。

ここでは、Halphen の微分方程式

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dX_2}{d\tau} + \frac{dX_3}{d\tau} &= 2X_2X_3, \\ \frac{dX_4}{d\tau} + \frac{dX_2}{d\tau} &= 2X_4X_2, \\ \frac{dX_3}{d\tau} + \frac{dX_4}{d\tau} &= 2X_3X_4. \end{aligned}$$

について、2通りの導出方法を述べる。一つは、テータ函数の加法定理と熱方程式を用いるものである。もう一つは、楕円積分が満たす超幾何微分方程式を用いるものである。研究会では、前者の方法についてのみ述べた。

次に、Halphen の方程式の解空間の構造について調べる。この非線形方程式の正則な (有理型の) 解を完全に決定することができる。

Halphen の方程式を高次元に一般化することも考えられる。2次元の場合の試みについては、数研講究録 No.810 p.202--217 を参照されたい。

1. Jacobi のテータ函数

Jacobi の楕円テータ函数は

$$\begin{aligned}
 \theta_1(z, \tau) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{(n-1/2)^2 \pi i \tau} e^{(2n-1)\pi i z}, \\
 \theta_2(z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n-1/2)^2 \pi i \tau} e^{(2n-1)\pi i z}, \\
 \theta_3(z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2 \pi i \tau} e^{2n\pi i z}, \\
 \theta_4(z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{n^2 \pi i \tau} e^{2n\pi i z},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

で定義される。ここで、 z は複素数、 τ は虚部が正の複素数である。 θ_1 は z について奇関数、 $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ は z について偶関数である。以下では、 $\theta_j = \theta_j(0, \tau)$ ($j=2,3,4$) とかく。

テータ函数の性質としては、

- 1) z -変数について、加法公式を満たす。
- 2) τ -変数について、保型性を持つ。
- 3) (z, τ) -変数について、熱方程式を満たす。

などが挙げられる。ここでは、とりあえず保型性を忘れて、(1) (3) の性質から出発する。具体的に方程式を書くと、

加法公式：

$$\begin{aligned}
 \theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2\theta_3 &= \theta_2(x)\theta_3(x)\theta_2(y)\theta_3(y) - \theta_1(x)\theta_4(x)\theta_1(y)\theta_4(y), \\
 \theta_4(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2\theta_2 &= \theta_4(x)\theta_2(x)\theta_4(y)\theta_2(y) + \theta_1(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_3(y), \\
 \theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3\theta_4 &= \theta_3(x)\theta_4(x)\theta_3(y)\theta_4(y) - \theta_1(x)\theta_2(x)\theta_1(y)\theta_2(y),
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

熱方程式：

$$\frac{\partial^2 \theta_j(z, \tau)}{\partial z^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta_j(z, \tau)}{\partial \tau},
 \tag{4}$$

加法公式の両辺を x, y で 2 回ずつ微分して、 $x=y=0$ とすると

$$(5) \quad \begin{aligned} (\theta_2^{(4)} \theta_3 - 2\theta_2^{(2)} \theta_3^{(2)} + \theta_2 \theta_3^{(4)}) \theta_2 \theta_3 &= (\theta_2^{(2)} \theta_3 + \theta_2 \theta_3^{(2)})^2, \\ (\theta_4^{(4)} \theta_2 - 2\theta_4^{(2)} \theta_2^{(2)} + \theta_4 \theta_2^{(4)}) \theta_4 \theta_2 &= (\theta_4^{(2)} \theta_2 + \theta_4 \theta_2^{(2)})^2, \\ (\theta_3^{(4)} \theta_4 - 2\theta_3^{(2)} \theta_4^{(2)} + \theta_3 \theta_4^{(4)}) \theta_3 \theta_4 &= (\theta_3^{(2)} \theta_4 + \theta_3 \theta_4^{(2)})^2. \end{aligned}$$

ここで

$$(6) \quad X_j(\tau) = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \log \theta_j(0, \tau);$$

($j=2,3,4$) と置けば、熱方程式より

$$\begin{aligned} X_j &= \frac{2}{4\pi i} \frac{\theta_j^{(2)}}{\theta_j}, \\ \frac{dX_j}{d\tau} &= \frac{2}{(4\pi i)^2} \left(\frac{\theta_j^{(4)}}{\theta_j} - \left(\frac{\theta_j^{(2)}}{\theta_j} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

となるので、代入して Halphen の方程式

$$\begin{aligned} \frac{dX_2}{d\tau} + \frac{dX_3}{d\tau} &= 2X_2X_3, \\ \frac{dX_4}{d\tau} + \frac{dX_2}{d\tau} &= 2X_4X_2, \\ \frac{dX_3}{d\tau} + \frac{dX_4}{d\tau} &= 2X_3X_4, \end{aligned}$$

を得る。

Halphen の方程式は次のようにも書き直されるので、3 階の holonomic な方程式である：

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{dX_2}{d\tau} &= X_2X_3 + X_2X_4 - X_3X_4 \\ \frac{dX_3}{d\tau} &= X_2X_3 - X_2X_4 + X_3X_4 \\ \frac{dX_4}{d\tau} &= -X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4. \end{aligned}$$

2. 楕円積分と Halphen の方程式

本節では、Halphen の方程式を別の方法で導き出す。歴史的に言えば、保型函数の研究は楕円積分に繋がる。楕円積分は、楕円曲線の周期積分であり、超幾何微分方程式を満たす。そこで、出発点を超幾何方程式にとり、それから Halphen の方程式を導出する。Jacobi はこの方法でテータ零値の満たす微分方程式を見つけたのであるが、彼はテータ零値の対数微分ではなく、テータ零値そのものが満たす、単独の方程式を求めたため、得られた方程式は複雑なものになっている。

楕円積分は次で定義される：

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

$x=k^2$ とおくと、 K, K' は、次の超幾何微分方程式を満たす：

$$(8) \quad x(1-x)y'' + (1-2x)y' - \frac{1}{4}y = 0.$$

正確にいうと、

$$K = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right), \quad K' = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-x\right).$$

となる。ここで、derivation δ を

$$\delta = x(1-x)\frac{d}{dx}$$

で定めると、(8) は

$$\delta^2 y = \frac{x(1-x)}{4}y$$

と書き直される。したがって、

$$K\delta^2 K' - K'\delta^2 K = 0$$

となり、これから、適当な定数 a が存在して、

$$K\delta K' - K'\delta K = a$$

よって、

$$\delta\left(\frac{K'}{K}\right) = \frac{a}{K^2}.$$

ここで、接続公式

$$\pi K' = -K \log x + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{n!} \right\} x^n \left(\log 2 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \cdots - \frac{1}{2n} \right) \right)$$

を用いると

$$\frac{K'}{K} \sim -\frac{1}{\pi} \log x + (\text{holomorphic}) \quad (x \sim 0)$$

となるので、 $a = -\pi^{-1}$ となる。ここで、

$$\tau = i \frac{K'}{K}$$

とおくと

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\pi i x(1-x)K^2}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \pi i x(1-x)K^2 \frac{d}{dx} \\ &= \pi i K^2 \delta. \end{aligned}$$

さて、ここで、

$$X := K, \quad Y := \sqrt{x}K, \quad Z := \sqrt{1-x}K$$

とおく。超幾何微分方程式 (8) を (9) を使って τ に関する微分に書き直そう：

$$\frac{1}{\pi i K^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\pi i K^2} \frac{d}{d\tau} K \right) = \frac{x(1-x)}{4} K.$$

$$\frac{K''}{K} - 2 \left(\frac{K'}{K} \right)^2 = -\frac{\pi^2}{4} K^4$$

ここで ' は τ に関する微分である。したがって、

$$(10) \quad (\log X)'' = (\log X)'^2 - \frac{\pi^2}{4} Y^2 Z^2.$$

また、

$$\begin{aligned} (\log Y)' &= \frac{K'}{K} + \frac{1}{2} \frac{x'}{x} = (\log X)' + \frac{\pi i}{2} Z^2, \\ (\log Z)' &= \frac{K'}{K} - \frac{1}{2} \frac{x'}{1-x} = (\log X)' - \frac{\pi i}{2} Y^2 \end{aligned}$$

より、

$$(11) \quad (\log Y)' - (\log X)' = \frac{\pi i}{2} Z^2,$$

$$(12) \quad (\log Z)' - (\log X)' = -\frac{\pi i}{2} Y^2.$$

そこで、

$$A = (\log X)', \quad B = (\log Y)', \quad C = (\log Z)'$$

とおくと、(10) より

$$A' = A^2 - (B - C)(C - A) = -BC + CA + AB.$$

また、(11)、(12) より

$$\begin{aligned} B' &= A' + \frac{\pi i}{2} Z Z' = A' + \pi i Z^2 C \\ &= -BC + CA + AB + 2(B - A)C \\ &= BC - CA + AB \\ C' &= A' - \frac{\pi i}{2} Y Y' = A' - \pi i Y^2 B \\ &= -BC + CA + AB + 2(C - A)B \\ &= BC + CA - AB. \end{aligned}$$

以上によって、 A 、 B 、 C が Halphen の方程式 (7) の解になることがわかった。

注意： 楕円積分はテータ零値でかける：

$$K = \frac{1}{2}\pi\theta_3^2, \quad \sqrt{x}K = \frac{1}{2}\pi\theta_2^2, \quad \sqrt{1-x}K = \frac{1}{2}\pi\theta_4^2.$$

また、 x を τ の関数で表示すると

$$x = \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

3.4. Halphen の方程式

1.2

~~2.3~~節で述べたことから、テータ零値の対数微分 (6) は Halphen の方程式 (1) の一つの解である。また、Halphen の方程式は、次の性質を持つ：

命題 1 $X_j(\tau)$ ($j=2,3,4$) が Halphen の方程式を満たせば、 $ad-bc=1$ となる任意の複素数 a, b, c, d に対して、

$$\widetilde{X}_j(\tau) = \frac{1}{(c\tau + d)^2} X_j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) - \frac{c}{c\tau + d}$$

もまた、Halphen の方程式の解となる。

命題 1 から、Halphen の方程式の generic な解空間が得られたことになる。実際、 X_j が互いに異なる時、Halphen の方程式の解は、テータ零値を使って命題 2 の形で表される：

定理 2 t を任意の複素数、 k_1, k_2, k_3 を相異なる複素数とする。 X_j を初期条件 $X_j(t) = k_j$ ($j=2,3,4$) を満たす Halphen の方程式の解とすると、 $ad-bc=1$ となる複素数 a, b, c, d が

存在して、

$$X_j(\tau) = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \log \left(\vartheta_j(0, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}) (c\tau + d)^{-1/2} \right)$$

となる。

Halphen の方程式の解空間は、generic な部分は、定理 2 とテータ函数の変換公式より、 $\Gamma_2 \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ となる。 $X_2 = X_3$ となる場合は、有理式で解ける。即ち

$$X_2(\tau) = X_3(\tau) = -\frac{c}{c\tau + d},$$

$$X_4(\tau) = -\frac{c}{c\tau + d} + \frac{a}{(c\tau + d)^2}.$$

従って、 $P^1(\mathbb{C})$ の上の次数 2 の line bundle でパラメトライズされる。

文献

詳しくは

Y. Ohyama, *Differential Relations of Theta Functions*, 大阪大学プレプリント

を見てください。Jacobi, Halphen, Chazy の古典的文献は

C.G.J.Jacobi, *Über die Differentialgleichung, welcher die Reihen $1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \text{etc.}$, $2^4 \sqrt{q} + 2^4 \sqrt{q^9} + 2^4 \sqrt{q^{25}} + \text{etc.}$ Genüge Leisten.*, Crelles J., 36, 97--112, 1848.

G.Halphen, *Sur une système d'équations différentielles*, C.R.Acad.Sci., Pais, 92, 1101--1103, 1881.

J.Chazy, *Sur les équations différentielles du troisième order et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Acta Math., 34, 317--385, 1911.