

Exponentials of certain completions of the unitary
form of a Kac-Moody algebra

愛媛大・理 須藤 清一
(Kiyokazu Suto)

§0. 序 $\mathfrak{g}$ を, 対称化可能な Cartan 行列を持つ複素
Kac-Moody 環, $\mathfrak{f}$ をその unitary 実形とする.

[3] の中で我々は, $\mathfrak{g}$ の随伴表現及び dominant
integral な最高 weight を持つ既約表現の標準的な完備化
における C^m -vectors の空間を自然な形で定義し, その簡単
な特徴付けを与えた. この特徴付けを用いると, 各
 C^m -vectors の空間に自然に位相が入り, $\mathfrak{g}$ の作用が連続に
拡張される.

随伴表現の場合の各 C^m -vectors の空間における $\mathfrak{g}$ 及
び $\mathfrak{f}$ の閉包をそれぞれ $\mathfrak{g}_m$, $\mathfrak{f}_m$ とする.

本報告では, k_2 の C^1 -vectors への作用が
exponentiable であり $m = 0, 1, 2, \dots$ に対して $\mathfrak{f}_{m+2}$ の
exponentials が C^m -vectors の空間を不変にすることを示
す. これは [3] で得られた, $m = \omega$ に対する結果, 即ち,
 $\mathfrak{f}_\omega$ の exponentials が C^k -vectors の空間 ($k = 0, 1, 2,$
 $\dots, \omega, \omega$) を全て不変にする, を拡張するものである.

§1. 記号と準備

本節の内容に関しては，詳しくは [1]

及び [3] を参照されたい．

A を対称化可能な一般型 Cartan 行列とする． $\mathfrak{g}_R$ を A を Cartan 行列に持つ実 Kac-Moody 環， $\mathfrak{h}_R$ を $\mathfrak{g}_R$ の Cartan 部分環とする．すると， $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_R \mathfrak{g}_R$ は A を Cartan 行列とする複素 Kac-Moody 環， $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_R \mathfrak{h}_R$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環になる．

Δ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系， Δ_+ を正 root の全体， $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ を root 空間分解とする．

$\mathfrak{n}_\pm = \sum_{\alpha \in \Delta_\pm} \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ とおく．分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$ に関する $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{n}_\pm$ ， $\mathfrak{h}$ の上への射影をそれぞれ $P_\pm$ ， P_0 とする．

A を対称化可能としたから $\mathfrak{g}$ 上には standard invariant form $(\cdot | \cdot)$ が存在する． $(\cdot | \cdot)$ の $\mathfrak{h}$ への制限は非退化なので， $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{h}^*$ の上への線型全単射 ν が

$$(h_1 | h_2) = \nu(h_1)(h_2) \quad \text{for } h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$$

によって定まる．

$\mathfrak{g}$ 上の反線型反同型 $\mathfrak{g} \ni x \longrightarrow x^* \in \mathfrak{g}$ で

$$h^* = h \quad \text{for } h \in \mathfrak{h}_R, \quad (\mathfrak{g}^\alpha)^* = \mathfrak{g}^{-\alpha} \quad \text{for } \alpha \in \Delta$$

$$(x^*)^* = x \quad \text{for } x \in \mathfrak{g}$$

を満たすものが存在する．すると unitary 実形 $\mathfrak{k}$ は

$$\mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g}; x + x^* = 0\}$$

と定義される。

$\mathfrak{g}$ 上の Hermitian form $(\cdot|\cdot)_0$ を

$$(x|y)_0 = (x|y^*) \quad \text{for } x, y \in \mathfrak{g}$$

と定める。 $(\cdot|\cdot)$ の不変性により, $(\cdot|\cdot)_0$ は

contravariant である。即ち

$$((\text{ad } x)y|z)_0 = (y|(\text{ad } x^*)z)_0 \quad \text{for } \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

が成立つ。この性質により root 空間分解が $(\cdot|\cdot)_0$ に関する直交分解であることがわかる。特に $(\cdot|\cdot)_0$ は $(\text{ad } \mathfrak{t})$ -不変であり, $\mathfrak{n}_{\pm}$ は互いに直交する。更に [2] によれば, $(\cdot|\cdot)_0$ は $\mathfrak{n}_{-} + \mathfrak{n}_{+}$ 上では正定値である。

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を最高 weight に持つ既約最高 weight 表現を $(\pi_{\lambda}, L(\lambda))$ とする。もし $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ ならば $L(\lambda)$ 上には非退化な contravariant Hermitian form $(\cdot|\cdot)_{\lambda}$ が存在する。更に λ が dominant integral ならば $(\cdot|\cdot)_{\lambda}$ は正定値である [2, Th.1]。

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の基底 $\{h_i\}_i$ を

$$(h_i|h_j)_0 = \delta_{ij} \text{ or } -\delta_{ij} \quad \forall i, j$$

を満たすようにとる。 $\mathfrak{h}$ 上の内積 $(\cdot|\cdot)_1$ で $\{h_i\}$ を正規直交基底とするものを取り, 次によって $\mathfrak{g}$ 全体に拡張する。

$$(x|y)_1 = (P_{-}(x)|P_{-}(y))_0 + (P_0(x)|P_0(y))_1 + (P_{+}(x)|P_{+}(y))_0$$

for $x, y \in \mathfrak{g}$.

すると次の様な $\mathfrak{g}$ 上の線型作用素 T が存在する.

(1) T は $(\cdot|\cdot)_1$ に関して unitary かつ self-adjoint. 従って involutive.

(2) $(x|y)_0 = (x|Ty)_1$ for $x, y \in \mathfrak{g}$.

(3) $1 - T \leq 2P_0$.

以下では, (π, V) を随伴表現 $(\text{ad}, \mathfrak{g})$, または dominant integral な最高 weight $\Lambda \in \mathfrak{h}_R^*$ をもつ最高 weight 表現 $(\pi_\Lambda, L(\Lambda))$ とする. $(\cdot|\cdot)_\pi$ を上で導入した V 上の内積とする. 即ち, $\pi = \text{ad}$ ならば $(\cdot|\cdot)_\pi = (\cdot|\cdot)_1$ であり, $\pi = \pi_\Lambda$ ならば $(\cdot|\cdot)_\pi = (\cdot|\cdot)_\Lambda$ である.

(π, V) の weight の全体を $P(\pi)$, weight μ の weight 空間を V_μ とし, $\underline{V} = \coprod_{\mu \in P(\pi)} V_\mu$ とおく. $\mathfrak{g}$ の作用は $\underline{V}$ まで自然に拡張されるが, 拡張された表現も π と書く.

$H(\pi)$ を V の $(\cdot|\cdot)_\pi$ に関する完備化とする. すると $H(\pi)$ は次の様にして $\underline{V}$ の部分空間と看做される.

$$H(\pi) = \{ (v_\mu)_{\mu \in P(\pi)} \in \underline{V}; \sum_{\mu \in P(\pi)} \|v_\mu\|_\pi^2 < +\infty \}.$$

§2. C^m -vectors 以下 $h_0 \in \mathfrak{h}_R$ を strictly dominant:

$$\alpha(h_0) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_+$$

なる元として固定する. [2, Prop.3.1] と同様の方法で次の

命題を得る.

命題 2.1 [3, Prop.2.1]. i) $\exists C_1 > 0$ s.t. $\forall x, y \in$

$\mathfrak{g}$

$$\|[x, y]\|_1 \leq C_1 (\|[h_0, x]\|_1 \|y\|_1 + \|x\|_1 \|[h_0, y]\|_1),$$

ii) $\exists C_{1, \Lambda} > 0$ s.t. $\forall x \in \mathfrak{g}, v \in L(\Lambda)$

$$\|\pi_\Lambda(x)v\|_\Lambda \leq C_{1, \Lambda} (\|x\|_1 \|v\|_\Lambda + \|[h_0, x]\|_1 \|v\|_\Lambda + \|x\|_1 \|\pi_\Lambda(h_0)v\|_\Lambda).$$

これから帰納的に

命題 2.2 [3, Cor.2.3]. $x_1, \dots, x_m \in \mathfrak{g}, v \in L(\Lambda)$

とする.

i)

$$\begin{aligned} & \|[x_1, \dots, [x_{m-1}, x_m] \dots]\|_1 \\ & \leq (m-1)! C_1^{m-1} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m \geq 0 \\ p_1 + \dots + p_m = m-1}} \prod_{j=1}^m \frac{1}{p_j!} \|(\text{ad } h_0)^{p_j} x_j\|_1. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} & \|\pi_\Lambda(x_1) \dots \pi_\Lambda(x_m)v\|_\Lambda \\ & \leq (m+1)! C_{1, \Lambda}^m \sum_{\substack{p_1, \dots, p_m, q \geq 0 \\ p_1 + \dots + p_m + q \leq m}} \left\{ \prod_{j=1}^m \frac{1}{p_j!} \|(\text{ad } h_0)^{p_j} x_j\|_1 \right\} \times \\ & \quad \times \frac{1}{q!} \|\pi_\Lambda(h_0)^q v\|_\Lambda. \end{aligned}$$

C^m -vectors の空間を次の様に定義する.

定義 2.3

$$H_0(\pi) = H(\pi),$$

$$H_m(\pi) = \{v \in H_{m-1}(\pi); \pi(x)v \in H_{m-1}(\pi) \quad \forall x \in \mathfrak{g}\},$$

$$H_\infty(\pi) = \bigcap_{m \geq 0} H_m(\pi).$$

命題 2.2 によって次は明らか.

命題 2.4 [3, Th. 2.2].

$$H_m(\pi) = \{v \in \underline{V}; \pi(h_0)^m v \in H(\pi)\}$$

$$\forall m = 0, 1, 2, \dots$$

そこで, $H_m(\pi)$ 上の内積 $(\cdot | \cdot)_{\pi, m}$ を

$$(u | v)_{\pi, m} = \sum_{j=0}^m (\pi(h_0)^j u | \pi(h_0)^j v)_\pi$$

$$\text{for } u, v \in H_m(\pi)$$

によって定義すると $H_m(\pi)$ は Hilbert 空間になる. $H_\infty(\pi)$ 上には射影極限位相を考える. 命題 2.1 によって $\mathfrak{g}$ の作用は次の様に連続に拡張される.

命題 2.5 [3, Prop. 3.2]. $m = 0, 1, 2, \dots$ とする. $\mathfrak{g}$

の V への作用は連続な双線型写像

$$H_{m+1}(\text{ad}) \times H_{m+1}(\pi) \ni (x, v) \longrightarrow \pi(x)v \in H_m(\pi)$$

に拡張される. 特に $H_\infty(\text{ad})$ は位相 Lie 環であり, $H_\infty(\pi)$ に連続に作用する.

明らかに $g \ni x \longrightarrow x^* \in g$ は $H_m(ad)$ 上の involutive antilinear isometry に拡張される．そこで

$$\mathfrak{f}_m = H_m^u(ad) = \{x \in H_m(ad); x + x^* = 0\}$$

とおく． $\mathfrak{f}_m$ は $\mathfrak{f}$ の $H_m(ad)$ における閉包と一致する．

§3. Negative space inclusion $H_m(\pi) \hookrightarrow H(\pi)$ は連続

だから， $v \in H(\pi)$ に対して， $F_v \in H_m(\pi)^*$ が

$$F_v(u) = (u|v)_\pi \quad \text{for } u \in H_m(\pi)$$

によって定義できる．この F_v の norm を $\|v\|_{\pi, -m}$ とし，

$\|\cdot\|_{\pi, -m}$ による $H(\pi)$ の完備化を $H_{-m}(\pi)$ とする． $H_{-m}(\pi)$

は $\underline{V}$ の部分空間と看做せる：

$$H_{-m}(\pi) = \{(v_\mu) \in \underline{V}; \sum_{\mu} (\sum_{j=0}^m \mu(h_0)^{2j})^{-1} \|v_\mu\|_\pi^2 < +\infty\}.$$

また定義によって， $(\cdot|\cdot)_p$ は $H_m(\pi)$ と $H_{-m}(\pi)$ の非退化な pairing を与える．

$x \in H_{m+1}(ad)$ とする．命題2.5 により $ad x^*$ は $H_{m+1}(ad)$ から $H_m(ad)$ の中への連続写像．一方 §1 の作用素 T は $H_m(ad)$ 上の可逆有界作用素に一意に拡張される．従って任意の $y \in H_{-m}(ad)$ に対して

$$H_{m+1}(ad) \ni z \longrightarrow ((T \circ (ad x^*) \circ T)z | y)_1$$

は $H_{m+1}(ad)^*$ の元を定める．よって $H_{-m-1}(ad)$ の元 w が一意に存在して

$$(z|w)_1 = ((T \circ (\text{ad } x^*) \circ T)z|y)_1 \quad \forall z \in H_{m+1}(\text{ad}).$$

そこで $(\text{ad } x)y = w$ とおく.

同様に $H_{m+1}(\text{ad})$ の元の $H_{-m}(\pi_\Lambda)$ への作用を

$$(u|\pi_\Lambda(x)v)_\Lambda = (\pi_\Lambda(x^*)u|v)_\Lambda$$

$$\text{for } x \in H_{m+1}(\text{ad}), u \in H_{m+1}(\pi_\Lambda), v \in H_{-m}(\pi_\Lambda)$$

によって定義する.

定義によって線型写像 $\pi(x): H_{m+1}(\pi) \longrightarrow H_m(\pi)$ の

norm と $\pi(x): H_{-m}(\pi) \longrightarrow H_{-m-1}(\pi)$ の norm は一致する.

§4. Exponentials of $\mathfrak{t}_m$'s $m = 0, 1, 2, \dots$ とする.

$H_m(\pi)$ 上の norm $|\cdot|_{\pi, m}$ を

$$|v|_{\pi, m} = \sum_{j=0}^m \|\pi(h_0)^j v\|_\pi \quad \text{for } v \in H_m(\pi)$$

によって定める. すると

$$\|v\|_{\pi, m} \leq |v|_{\pi, m} \leq \sqrt{m+1} \|v\|_{\pi, m}$$

$$\forall v \in H_m(\pi)$$

だから $|\cdot|_{\pi, m}$ は $\|\cdot\|_{\pi, m}$ と同値な norm である. この

norm で $H_{m+1}(\pi)$ 上の $\mathfrak{t}_{m+1}$ の作用を評価すると次の補題を得る.

補題 4.1. $x \in \mathfrak{t}_{m+1}$ とする.

i)

$$|(1 - (\text{ad } x))y|_{\text{ad}, m} \geq (1 - C_1 2^{m+1} |x|_{\text{ad}, m+1}) |y|_{\text{ad}, m}$$

$$\forall y \in H_{m+1}(\text{ad}).$$

ii)

$$\|(1-\pi_{\Lambda}(x))v\|_{\Lambda, m} \geq (1-C_1 \Lambda^{2^{m+2}} \|x\|_{\text{ad}, m+1}) \|v\|_{\Lambda, m}$$

$$\forall v \in H_{m+1}(\Lambda).$$

ただし, $H_k(\Lambda) = H_k(\pi_{\Lambda})$, $\|\cdot\|_{\Lambda, k} = \|\cdot\|_{\pi_{\Lambda}, k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

一方 negative space への作用に関しては次の様な評価を得る.

補題 4.2. $\exists c_m(\pi), c'_m(\pi) > 0$ s.t. $\forall x \in k_{m+1}, v \in H_{-(m-1)}(\pi)$

$$\|(1+\pi(x))v\|_{\pi, -m} \geq c_m(\pi)(1-c'_m(\pi)\|x\|_{\text{ad}, m+1})\|v\|_{\pi, -m}.$$

$x \in k_{m+2}, \varepsilon \in \mathbb{R}$ とする. 定義によって

$1+\varepsilon\pi(x): H_{-m}(\pi) \longrightarrow H_{-m-1}(\pi)$ が単射

$$\iff (1-\varepsilon\pi(x))H_{m+1}(\pi) \text{ が dense in } H_m(\pi).$$

従って補題 4.2 により $|\varepsilon|$ が十分小さければ

$(1-\varepsilon\pi(x))H_{m+1}(\pi)$ は $H_m(\pi)$ で稠密である. これと補題 4.1

を合せて

補題 4.3. $x \in k_{m+2}, \varepsilon \in \mathbb{R}$ とする. $|\varepsilon|$ が十分小さけ

れば $H_m(\pi)$ 上の有界作用素 $R_\pi(x; \varepsilon)$ で

$$R_\pi(x; \varepsilon)(1 - \varepsilon\pi(x))v = v \quad \forall v \in H_{m+1}(\pi)$$

となるものが一意に存在する. 更に

$$|R_\pi(x; \varepsilon)|_{\text{op}, m} \leq (1 - C|\varepsilon x|_{\text{ad}, m+1})^{-1}.$$

ただし, $|\cdot|_{\text{op}, m}$ は $|\cdot|_{\pi, m}$ に関する作用素 norm で, $C = C_1 2^{m+1}$ (if $\pi = \text{ad}$), or $C_{1, \Lambda} 2^{m+2}$ (if $\pi = \pi_\Lambda$).

これにより [4, Chap IX] の criterion が適用できて次の定理を得る.

定理 4.4. $m = 0, 1, 2, \dots$, $x \in k_{m+2}$ とする. $H_m(\pi)$ 上の有界作用素からなる 1-径数群 $e^{t\pi(x)} = \exp(t\pi(x))$, $t \in \mathbb{R}$ でその無限小生成作用素が $\pi(x): H_{m+1}(\pi) \longrightarrow H_m(\pi)$ の閉包であるようなものが一意に存在する. 更に

$$|e^{\pi(x)}|_{\text{op}, m} \leq \exp(C|x|_{\text{ad}, m+1}).$$

もちろん, $m < m'$ のとき $x \in \mathfrak{k}_{m'+2}$ に対して $H_m(\pi)$ 上の $e^{\pi(x)}$ と $H_{m'}(\pi)$ 上の $e^{\pi(x)}$ は $H_{m'}(\pi)$ 上では一致する. 従って上の定理は, 言葉をかえていえば, $H(\pi)$ 上で定義された $x \in \mathfrak{k}_{m+2}$ の exponential $e^{\pi(x)}$ が部分空間 $H_1(\pi), H_2(\pi), \dots, H_m(\pi)$ を全て不変にすることを主張している.

さて $x, y \in \mathfrak{k}_{m+3}$, $v \in H_{m+1}(\pi)$ とすると定理 4.1 によ

り

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta} \{ e^{(t+\delta)\pi(x)} e^{(t+\delta)\pi(y)} v - e^{t\pi(x)} e^{t\pi(y)} v \} \\
&= e^{(t+\delta)\pi(x)} \left\{ \frac{1}{\delta} (e^{(t+\delta)\pi(y)} v - e^{t\pi(y)} v) - \pi(y) e^{t\pi(y)} v \right\} \\
&\quad + e^{(t+\delta)\pi(x)} \pi(y) e^{t\pi(y)} v + \frac{1}{\delta} \{ e^{(t+\delta)\pi(x)} \} e^{t\pi(y)} v \\
&\longrightarrow e^{t\pi(x)} \pi(x+y) e^{t\pi(y)} v \quad (\delta \longrightarrow 0) \quad \text{in } H_m(\pi).
\end{aligned}$$

補題 4.5. $\forall x, y \in \mathfrak{t}_{m+3}, v \in H_{m+1}(\pi)$ に対して

$$\frac{d}{dt} e^{t\pi(x)} e^{t\pi(y)} v = e^{t\pi(x)} \pi(x+y) e^{t\pi(y)} v \quad \text{in } H_m(\pi).$$

従って

$$e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} v - v = \int_0^1 e^{t\pi(x)} \pi(x+y) e^{t\pi(y)} v \, dt \quad \text{in } H_m(\pi).$$

C を補題 4.3 の通りとすると

$$\begin{aligned}
& |e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} v - v|_{\pi, m} \\
&\leq \int_0^1 e^{Ct|x|_{ad, m+1}} C|x+y|_{ad, m+1} e^{2Ct|y|_{ad, m+2}} |v|_{\pi, m+1} \, dt.
\end{aligned}$$

結局次の命題を得る.

命題 4.6. $m = 0, 1, 2, \dots, x, y \in \mathfrak{t}_{m+3}, v \in$

$H_{m+1}(\pi)$ とすると

$$\begin{aligned}
& |e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} v - v|_{\pi, m} \\
&\leq C e^{C(|x|_{ad, m+1} + 2|y|_{ad, m+1})} |x+y|_{ad, m+1} |v|_{\pi, m+1}.
\end{aligned}$$

特に $\exp: \mathfrak{t}_{m+3} \ni x \longrightarrow e^{\pi(x)} \in B_S(H_m(\pi))$ は, $\mathfrak{t}_{m+3}$ の $|\cdot|_{ad, m+2}$ について有界な任意の部分集合上で, $|\cdot|_{ad, m+1}$ について一様連続. ただし $B_S(H_m(\pi))$ は $H_m(\pi)$ 上の有界作用素全体に強位相を考えたもの.

この連続性によって [3, §5] で与えた exponentials の満たす交換関係が次の様に拡張される. まず連続性によって

命題 4.7 (cf. [3, Prop. 5.4]) $\forall x \in \mathfrak{t}_4, y \in H_1(ad)$

$$e^{\pi(x)} \pi(y) e^{-\pi(x)} = \pi(e^{(ad \ x)} y).$$

従って, 二つの一径数群 $e^{\pi(x)} e^{t\pi(y)} \dots e^{-\pi(x)}$ と $\exp(t\pi(e^{(ad \ x)} y))$ ($x \in \mathfrak{t}_4, y \in \mathfrak{t}_2$) が同じ無限小生成作用素を持つことになり, 結局次を得る.

命題 4.8 (cf. [3, Prop. 5.5]) $\forall x \in \mathfrak{t}_4, y \in \mathfrak{t}_2$

$$e^{\pi(x)} e^{\pi(y)} e^{-\pi(x)} = \exp \pi(e^{(ad \ x)} y).$$

参考文献

- [1] V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Birkhäuser, 1983.
- [2] V. G. Kac and D. H. Peterson, Unitary structure in representations of infinite dimensional groups and a convexity theorem, Invent. Math., 76 (1984), 1-14.
- [3] K. Suto, Differentiable vectors and analytic vectors in completions of certain representation spaces of a Kac-Moody algebra, J. Math. Kyoto Univ., 28 (1988), 633-659.
- [4] K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, 1980.