

S^{2n-1} 上の無限次元グラスマン多様体, Free Fermion Fock 空間 および current 代数

早大 理工 郡 敏昭
(Tosiaki Kori)

複素平面の単位円周 S^1 上の $L^2(S^1, d\theta)$ を $\{|z| < 1\}$ で正則な函数の境界値として表わされるものと, $\{|z| > 1\}$ で正則 (∞ で 1 位の零) な函数の境界値としてあらわされるものに分割し (Plemelj の定理), 自由フェルミ場の第二量子化とそれにもなう問題, ボソン化, ヤコビ三対恒等式, 等の基本的なモデルにすること, は良く知られている。この講演では S^{2n-1} 上においてその類似を展開する。

1. S^{2n-1} 上の無限次元グラスマン多様体,

$$B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\},$$

$$L^2(B, d\sigma) \quad ; \quad \sigma(B) = 1 \text{ と仮定,}$$

の部分空間を導入しよう。

$H_+ : z^\alpha, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$, が生成する $L^2(B)$ の閉線形部分空間。

$H_- : \bar{z}^\beta, |\beta| > 0$, が生成する $L^2(B)$ の閉線形部分空間。

$H_\Theta : \bar{z}^\beta, |\beta| \geq 0$, が生成する閉線形部分空間。

$K = H_+ \oplus H_-$, 閉線形空間としての直和。

H_+ と H_Θ とは双一次形式 $\int_B f \cdot g \, d\sigma, f \in H_+, g \in H_\Theta$ により互いに双対である。

H_+ と H_- は K の中で互に直交補空間になっている。

$$c_\alpha = \left(\frac{(n+|\alpha|-1)!}{\alpha! (n-1)!} \right)^{1/2}, \quad |\alpha| \geq 0,$$

と置く。

$\{e_\alpha = c_\alpha z^\alpha; |\alpha| \geq 0\}$ は H_+ の正規直交基底を与え, $\{e_{-\beta} = c_\beta \bar{z}^\beta; |\beta| > 0\}$ は H_- の正規直交基底を与える。

$$P_+ : K \rightarrow H_+, \quad P_- : K \rightarrow H_-$$

を直交射影とする。

定義

B 上の無限次元グラスマン多様体を次のように定義する:

$$\text{Gr}(K) = \left\{ W : \begin{array}{l} K \text{ の閉線形空間で} \\ P_+|_W : W \rightarrow H_+ \text{ はコンパクト作用素} \end{array} \right\}$$

$\left\{ p \mid W : W \rightarrow H_- \text{ はフレッドホルム作用素} \right\}$

$W \in \text{Gr}(K)$ の枠を与えよう。

まず multiindices に順序を決める。

$\mathcal{N} = (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$, $\mathcal{N}^c = (\mathbb{Z}_{\leq 0})^n - (0, \dots, 0)$
 とおく。 $\alpha, \beta \in \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N}$ に対し辞書式順序
 $\alpha \geq \beta \iff (i) \quad |\alpha| > |\beta|$, 又は
 (ii) $|\alpha| = |\beta|$ である番号 $j \leq n$ に対し
 $\alpha_n = \beta_n, \dots, \alpha_{n-j+1} = \beta_{n-j+1}, \alpha_{n-j} > \beta_{n-j}$.

を定める。

$\mathcal{N}_\alpha^c = \{ \beta \in \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N} ; \beta < \alpha \}$, $\mathcal{N}_\alpha = \{ \beta \in \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N} ; \beta \geq \alpha \}$
 とおく。

$$\mathcal{S} = \left\{ S \subset \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N} ; \begin{array}{l} \#(\mathcal{N} \cap S) < \infty \\ \#(\mathcal{N}^c \cap S^c) < \infty \end{array} \right\}$$

$\mathcal{S} \ni S$ に対し $\kappa(S) = \#(\mathcal{N} \cap S) - \#(\mathcal{N}^c \cap S^c)$
 を S の charge と呼ぶ。

$p \in \mathbb{N}$ に対し, $(0, 0, \dots, 0)$ より順序 $<$ によつて, p 番目の場所の multiindex を $\alpha(p)$ と書く, 同じく $(0, \dots, 0)$ の p 番手前の場所の multiindex を $\alpha(-p)$ と書く;
 $\alpha(p) \in \mathcal{N}$, $\alpha(-p) \in \mathcal{N}^c$.

Charge p の $S \in \mathcal{S}$ は, ある単調増加函数

$$\sigma: \mathcal{N}_{\alpha(p)}^c \longrightarrow \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N}$$

で、十分小さな multiindex ν に対しては

$\sigma(\nu) = \nu$ となっているような函数 σ により

$\sigma(\mathcal{N}_{\alpha(p)}^c) = S$ と表わされることに注意しよう。

$S \in \mathcal{J}$ に対し

$H_S = \{ e_\nu ; \nu \in S \}$ の張る閉線形空間，
とする。

命題

$W \in \text{Gr}(K)$ に対し 一意的に $S \in \mathcal{J}$ が定まり， H_S
への直交射影

$$P_{H_S} | W: W \longrightarrow H_S$$

が同型となる。

証明は Segal の本 Proposition 7.1. or 他の分献。

$W \in \text{Gr}(K)$ に対し上の考察より， $S \in \mathcal{J}$ と，線
形等距離写像 $w: H_S \longrightarrow \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N}$ で， $w_- = p_- \circ w$
がフレッドホルム作用素， $w_+ = p_+ \circ w$ がコンパクト作
用素となるものがある。このフレッドホルム作用素 w_- の
指数 $\chi(w_-)$ がちょうど charge $\chi(S)$ に等しい。

W の線形枠は $(\mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N}) \times \mathcal{N}_\alpha^c$ ， $\alpha = \alpha(\chi(S))$ ，
 $S = \sigma(\mathcal{N}_\alpha^c)$ ，なる行列で表わされる：

$$\begin{pmatrix} w_- \\ w_+ \end{pmatrix} \downarrow \begin{matrix} \mathcal{N}^c \\ \oplus \\ \mathcal{N} \end{matrix}, \quad \xrightarrow{\mathcal{N}_\alpha^c}$$

さらに W は admissible frame と呼ばれる次の枠で表わされる:

$$\mathfrak{F} = (\xi_\mu)_{\mu \rightarrow} \\ \xi_\mu = e_{\sigma(\mu)} + \sum_{\nu \geq \sigma(\mu)} t_{\nu, \mu} e_\nu, \quad \mu \in N_\alpha^c.$$

admissible basis を用いて $W \in \text{Gr}(K)$ の Plücker embedding が得られる。すなわち $S' \in \mathcal{S}$ を charge $p = \chi(S)$ の Maya 図形 とすると $N_\alpha^c \times N_\alpha^c$ -行列 $\text{Pr}_{H_{S'}} \circ \mathfrak{F}$ は Identity $N_\alpha^c \times N_\alpha^c$ と有限位数の行列だけ異なっているにすぎないので行列式

$$\det(\text{Pr}_{H_{S'}} \circ \mathfrak{F})$$

が定まる。ここで $\alpha = \alpha(p)$, $p = \chi(S) = \chi(S')$ 。

admissible frame $\mathfrak{F}$ をとり変えるとこの行列式の値は $\mathbb{C}^*$ の ^{ある} 値だけ乗せられる。したがって写像

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}(K) & & \mathbb{P}(\pi_{T \in \mathcal{S}} \mathbb{C} e^T) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \\ W & \longrightarrow & [\det(\text{Pr}_{H_{S'}} \circ \mathfrak{F})] = \Delta_{S'}(W) \end{array}$$

が定義される。但 右辺は $\chi(T) = p$ なる $T \in \mathcal{S}$ に対して, 線形空間 $\mathbb{C} e^T = \mathbb{C} \wedge_{\nu \in N_\alpha^c} e_{\sigma(-\nu)}$ の直積を考え, その射影直線全体を表わしている。

2. 自由フェルミオンのフォック空間

$$e^S = \bigwedge_{-\nu \in N_\alpha^c} e_{\sigma(-\nu)}, \quad S \in \mathcal{J}$$

と置く。但し

$$\sigma: N_\alpha^c \rightarrow N^c \oplus N \quad \text{単調増加, } \sigma(-\nu) = \nu \text{ for } \nu \gg 0 \text{ で, } \alpha = \alpha(p), \quad p = \kappa(S), \text{ また外積}$$

は $\mu < \lambda$ なる μ, λ に對し, $\cdots \wedge e_{\lambda 1} \cdots \wedge e_{\mu 1} \cdots$ となる

よりとる。

change p のフォック空間 $\mathcal{F}_p$ を

$$\mathcal{F}_p = \bigoplus_{\substack{S \in \mathcal{J} \\ \kappa(S) = p}} \mathbb{C} e^S,$$

また

$$\mathcal{F} = \bigoplus_p \mathcal{F}_p$$

と定義する。同様に

$$\bar{e}^S = \bigwedge_{-\nu \in N_\alpha^c} e_{-\sigma(-\nu)}, \quad \alpha = \alpha(p)$$

により, conjugate Fock 空間

$$\bar{\mathcal{F}}_p = \bigoplus_{\substack{S \in \mathcal{J} \\ \kappa(S) = p}} \mathbb{C} \bar{e}^S$$

$$\bar{\mathcal{F}} = \bigoplus_p \bar{\mathcal{F}}_p$$

を定義する。

multiindex α に対し, それを表わすエネルギー状態

$|\alpha\rangle$ を

$$|\alpha\rangle = \bigwedge_{\nu \leq \alpha} e_\nu \in \mathcal{F}$$

として定め、同様に共役状態 $\langle\alpha|$ を

$$\langle\alpha| = \bigwedge_{\nu \geq \alpha} e_\nu \in \overline{\mathcal{F}}$$

で定める。

フォック空間 $\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$ 上に状態の生成・消滅をあらわす演算子を導入しよう。記号は各著者、数学者、物理学者 まちまちなので、ここでは西島“場の理論” Bjorken “Quantum Field Theory” に合わせた。

まず $\mathcal{F}$ 上の inner derivation by e_ν , $\nu \in \mathcal{N}^c \oplus \mathcal{N}$, を次のように定義する:

$$f \in K \text{ に対しては } D_\nu f = \int_B e_\nu(x) f(x) d\sigma(x),$$

として, $\varphi, \psi \in \Lambda K$ に対しては,

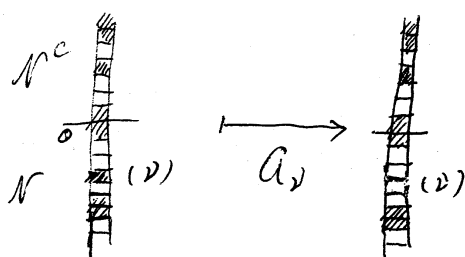
$$\nu \in \mathcal{N} \text{ なら, } D_\nu(\varphi \wedge \psi) = D_\nu \varphi \wedge \psi + (-1)^{\deg \varphi} \varphi \wedge D_\nu \psi,$$

$$\nu \in \mathcal{N}^c \text{ なら, } D_\nu(\varphi \wedge \psi) = \varphi \wedge D_\nu \psi + (-1)^{\deg \varphi} D_\nu \varphi \wedge \psi,$$

により定義を延長する。

(i) 正エネルギー状態の消滅 a_ν , $\nu \in \mathcal{N}$:

$$a_\nu e^S = D_{-\nu} e^S,$$

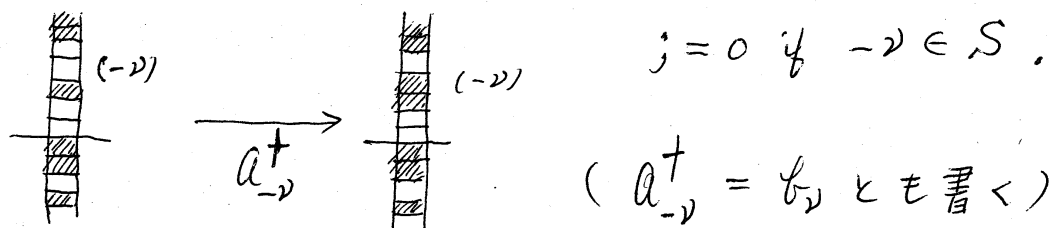


したがって $\nu \notin S$ なら

$$a_\nu e^S = 0$$

(ii) 負エネルギー状態の生成 $a_{-\nu}^+$, $-\nu \in \mathcal{N}^c$:

$$a_{-\nu}^+ e^S = e_{-\nu} \wedge e^S.$$



(iii) 正エネルギー状態の生成 a_{ν}^+ , $\nu \in \mathcal{N}$:

$$a_{\nu}^+ e^S = e_{\nu} \wedge e^S$$

(iv) 負エネルギー状態の消滅 $a_{-\nu}$, $-\nu \in \mathcal{N}^c$

$$a_{-\nu} e^S = 0, e^S,$$

$$(a_{-\nu} = b_{\nu}^+ \text{ と書く})$$

命題 (i) $S \in \mathcal{S}$ に対し 十分大きな $\nu \succ \exists \nu(S)$

については $a_{\nu} e^S = a_{-\nu}^+ e^S = 0$,

(ii) $[A, B]_+ = A \cdot B + B \cdot A$ として,

$$[a_{\nu}, a_{\mu}]_+ = [a_{\nu}, a_{-\mu}]_+ = 0$$

$$[a_{\nu}^+, a_{\mu}^+]_+ = [a_{\nu}^+, a_{-\mu}^+]_+ = 0$$

$$[a_{\nu}, a_{\mu}^+]_+ = [a_{-\nu}, a_{-\mu}^+]_+ = \delta_{\nu, \mu}$$

$$[a_{\nu}, a_{-\mu}^+]_+ = [a_{-\nu}, a_{\mu}^+]_+ = 0.$$

自由フェルミオン空間とは線形空間

$$V = V_{\text{ann}} \oplus V_{\text{cr}}$$

$$V_{ann} = \bigoplus_{\nu} \mathbb{C} a_{\nu} \oplus \bigoplus_{\mu} \mathbb{C} a_{-\mu}^{\dagger}$$

$$V_{cr} = \bigoplus_{\mu} \mathbb{C} a_{\mu}^{\dagger} \oplus \bigoplus_{\nu} \mathbb{C} a_{\nu}$$

のことをいう。 A を $a_{\nu}, a_{\nu}^{\dagger}, a_{-\nu}, a_{-\nu}^{\dagger}, \nu \in \mathcal{N}$,
 が生成するクリフォード環とすると A の左イ
 デヤル $A V_{ann}$ による A の商と, フォック空間 $\mathcal{F}$
 とは左 A -module として同型になる。 同様に

$$V_{cr} \backslash A \simeq \overline{\mathcal{F}} \quad (\text{右 } A\text{-加群として}).$$

この同型で

$$A / A V_{ann} \ni 1 + A V_{ann} \longmapsto |0\rangle \in \mathcal{F}$$

$$V_{cr} \backslash A \ni 1 + V_{cr} A \longmapsto \langle 0| \in \overline{\mathcal{F}}$$

と対応している。

真空期待値 $\mathcal{F} \times_A \mathcal{F} \ni \langle 0| a \otimes b |0\rangle \rightarrow \langle ab \rangle$
 $\in \mathbb{C}$ の定義もふつうに Wick の定理を用いてな
 される。

$$a_{\nu} |0\rangle = a_{-\nu}^{\dagger} |0\rangle = 0,$$

$$\langle 0| a_{\nu}^{\dagger} = \langle 0| a_{-\nu} = 0,$$

がすぐわかる。

4節で "current algebra" を議論するが、これらが Lie 代数 A の subLie algebra であるというのでははく然としているので、(生成・消滅) から生成され、第二量子化を考えるにちょうどよいくらいの Lie 代数を導入しておく。

$$\mathcal{Q}' = \left\{ \begin{aligned} X &= \sum_{\nu, \mu \in \mathcal{N}} (f_{\nu, \mu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu} + f_{\nu, -\mu} a_{\nu}^{\dagger} a_{-\mu} \\ &\quad + f_{-\nu, \mu} a_{-\nu}^{\dagger} a_{\mu} - f_{-\nu, -\mu} a_{\mu} a_{-\nu}^{\dagger}) \\ &\exists \delta > 0 \text{ such that} \\ &1) f_{\nu, \mu} = f_{-\nu, -\mu} = 0 \text{ for } ||\nu| - |\mu|| > \delta, \\ &2) f_{\nu, -\mu} = f_{-\nu, \mu} = 0 \text{ for } |\nu| + |\mu| > \delta \end{aligned} \right\}$$

線形空間

$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}' \oplus \mathbb{C} \mathbb{1}$ に次の交換関係を持ち、 $\mathbb{1}$ は central element になる。

$$\begin{aligned} [X, X'] &= \sum_{\nu, \mu} \left\{ \sum_i (f_{\nu, i} f'_{i, \mu} - f_{i, \mu} f'_{\nu, i} + f_{\nu, -i} f'_{-i, \mu} \right. \\ &\quad \left. - f_{-i, \mu} f'_{\nu, -i}) a_{\nu}^{\dagger} a_{\mu} + \sum_i (f_{\nu, i} f'_{i, -\mu} - f'_{\nu, i} f_{i, -\mu} \right. \\ &\quad \left. + f_{\nu, -i} f'_{-i, -\mu} - f_{-i, -\mu} f'_{\nu, -i}) a_{\nu}^{\dagger} a_{-\mu} \right. \\ &\quad \left. + \sum_i (f'_{i, \mu} f_{-\nu, i} - f_{i, \mu} f'_{-\nu, i} + f_{-\nu, -i} f'_{-i, \mu} - f_{-i, \mu} f'_{-\nu, -i}) a_{-\nu}^{\dagger} a_{\mu} \right. \\ &\quad \left. + \sum_i (f_{i, -\mu} f'_{-\nu, i} - f_{-\nu, i} f'_{i, -\mu} + f_{-i, \mu} f'_{-\nu, -i} - f_{-\nu, -i} f'_{-i, \mu}) a_{-\mu} a_{-\nu}^{\dagger} \right\} \\ &\quad + \sum_{\nu, \mu} (f_{-\mu, \nu} f'_{\nu, -\mu} - f_{\nu, -\mu} f'_{-\mu, \nu}) \cdot \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$g' \ni \left(\begin{array}{c|c} & \mu \\ \hline -\nu & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \nu^c \\ \downarrow \nu \\ \downarrow \end{array} = a_{-\nu}^+ a_{\mu}$$

$$-\nu^c \longrightarrow \nu \longrightarrow$$

等と考えれば

$$g' \ni \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = X$$

g の highest weight 表現を考えたい。

3. $\text{Map}(S^{2n-1}, GL(K^n))$ の $Gr(K^n)$ への作用
($r=1$ とし 解説, 一般性を失わない)

3.1. 筆者は「強接凸領域上の境界までこめて連続な正則函数の全体の空間の双対空間」を以前に記述した。その結果を $\mathbb{C}^n$ の単位球 $\{ |z| < 1 \}$ の場合に, また L^2 -境界値として, 述べる。次のようになる。

$\hat{D} = \{ w \in \mathbb{C}^n : 1 + w \cdot z \neq 0 \quad \forall z, |z| \leq 1 \} = \{ |w| < 1 \}$
を $D = \{ |z| < 1 \}$ の dual domain とする。

$$\gamma: \mathbb{C}^n - D \longrightarrow \overline{\hat{D}} - \{0\}$$

$$\underset{\psi}{z} \longmapsto \underset{\psi}{w} = \gamma(z) = -\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

なる $\mathbb{C}^\infty$ -対応がある。とくに $B = \{|z|=1\}$ に制限して

$\gamma|_B: B \longrightarrow \hat{B} = \{|w|=1\}$ は 1対1な $\mathbb{C}^\infty$ 写像となる。 $\gamma|_B$ による $\overline{D}$ と $\overline{\hat{D}}$ の patching を M とする; $M = \overline{D} \sqcup_{\gamma} \overline{\hat{D}}$, ($\mathbb{C}^\infty$ -多様体)。

$A_{L^2}(D) = \{h: D \text{ で正則, } B \text{ に } L^2\text{-境界値をもつ}\}$
 $A_{L^2}(\hat{D}) = \{\hat{h}: \hat{D} \text{ で正則, } \hat{B} \text{ に } L^2\text{-境界値をもつ}\}$
 とおく。各々に対するコーシー積分表現は,

$$h(z) = \int_B (1 - \bar{x} \cdot z)^{-n} h(x) \sigma(dx), \quad \begin{matrix} h \in A_{L^2}(D) \\ z \in D \end{matrix}$$

$$\hat{h}(w) = \int_B (1 + w \cdot x)^{-n} \hat{h}(-\bar{x}) \sigma(dx), \quad \begin{matrix} \hat{h} \in A_{L^2}(\hat{D}) \\ w \in \hat{D} \end{matrix}$$

となる。また $f \in L^2(B)$ に対し D 及び $\hat{D}$ で正則な函数を与えるコーシー積分は次のよう;

$$Hf(z) = \int_B (1 - \bar{x} \cdot z)^{-n} f(x) \sigma(dx), \quad z \in D,$$

$$\hat{H}f(w) = \int_B (1 + w \cdot x)^{-n} f(x) \sigma(dx), \quad w \in \hat{D}.$$

Plemelj theorem より Hf は $Hf \in A_{L^2}(D)$ へと拡張され, その $y \in B$ での境界値は,

$$Hf(y) = \frac{1}{2} f(y) + \int_{\text{p.v.}(y)} (1 - \bar{x} \cdot y)^{-n} f(x) \sigma(dx)$$

で与えられる。

また $\hat{H}f$ も拡張 $\hat{H}f \in A_{L^2}(\hat{D})$ を持ち, $y \in B$ での境界値は

$$\hat{H}f(y) = \frac{1}{2} f(y) + \int_{\text{p.v.}(y)} (1 - \bar{y} \cdot x)^{-n} f(x) \sigma(dx).$$

命題 pairing

$$A_{L^2}(D) \times A_{L^2}(\hat{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(h, \hat{h}) \longmapsto \int_B h(x) \hat{h}(-\bar{x}) \sigma(dx)$$

により, $A_{L^2}(D)$ の双対空間と $A_{L^2}(\hat{D})$ は線同型。

命題

$$A_{L^2}(D) \cong H_+, \quad A_{L^2}(\hat{D}) \cong H_\ominus$$

また

$f \mapsto Hf|_B$, $f \mapsto \hat{H}f|_B$ はそれぞれ $L^2(B)$ より H_+ , $H_\ominus$ への射影を与える。

3.2. Segal にしたがって

$$GL_{\text{res}}(K^r) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{matrix} (H_-)^r \\ \oplus \\ (H_+)^r \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} (H_-)^r \\ \oplus \\ (H_+)^r \end{matrix} \text{ 可逆} \right\}$$

で, a, d は フレドホルム作用素, b, c は コンパクト作用素

とあく。

$f \in C^\infty(B, GL(r, \mathbb{C}))$ に対し

$$M(f) = \begin{pmatrix} \hat{H} \cdot f \cdot \hat{H} & \hat{H} \cdot f \cdot H \\ H \cdot f \cdot \hat{H} & H \cdot f \cdot H \end{pmatrix} : \begin{matrix} (H_-)^r \\ \oplus \\ (H_+)^r \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} (H_-)^r \\ \oplus \\ (H_+)^r \end{matrix}$$

と定義する。 $H \cdot f \cdot H$ は テフリッツ作用素 として知られている。

命題 $M(f) \in GL_{\text{res}}(K^n)$

さらに, $\hat{H} \cdot f \cdot H$, $H \cdot f \cdot \hat{H}$ は trace class,

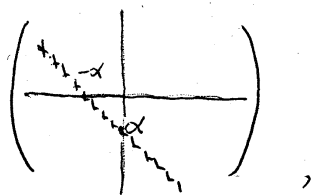
(証明と例とが同時に与えられる, $n=1$)

Ex. 1, $f(x) = c_\alpha x^\alpha$ のとき $M(f) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\text{は, } a_{-(\nu-\alpha), -\nu} = \begin{cases} \binom{\nu}{\alpha}^{1/2} \binom{n+|\alpha|-1}{n+|\nu|-1}^{-1/2} & \text{if } \nu \geq \alpha \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{(\alpha-\nu), -\nu} = \begin{cases} \binom{\alpha}{\nu}^{1/2} \binom{n+|\alpha|-1}{n+|\nu|-1}^{-1/2} & \text{if } \alpha \geq \nu \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d_{(\alpha+\nu), \nu} = \begin{cases} \binom{\nu+\alpha}{\nu}^{1/2} \binom{n+|\nu|+|\alpha|-1}{n+|\alpha|-1}^{-1/2} \\ 0 \end{cases}$$



但 $\alpha \geq \beta$ とは $\alpha_i \geq \beta_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

Ex. 2. $f(z, \bar{z}) = c_\alpha z^\alpha \cdot c_\beta \bar{z}^\beta$, $\alpha < \beta$ のとき

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$a_{-(\beta-\alpha+\nu), -\nu} = \binom{\nu+\beta}{\beta}^{\frac{1}{2}} \binom{n+|\beta|+|\nu|-1}{n+|\beta|-1}^{-\frac{1}{2}} \binom{\nu+\beta}{\alpha}^{\frac{1}{2}} \binom{n+|\beta|+|\nu|-1}{n+|\alpha|-1}^{-\frac{1}{2}}$$

etc z''

$$M(f) = \begin{pmatrix} & -(\beta-\alpha) \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$\beta-\alpha$

Ex 3 $f(z, \bar{z}) = z$ と $\bar{z}$ の多項式

$$M(f) = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathcal{J}$$

Example 3 と Weierstrass の多項式近似定理より Proposition が成り立つ。

4 カレント代数

4.1. フェルミ作用素を次の形式的ローラノ級数で定義

$$\psi(z) = \psi_+(z) + \psi_-(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu (c_\nu z^\nu) + \sum_{-\nu \in \mathbb{N}^c} a_{-\nu} (c_\nu \bar{z}^\nu)$$

$$\psi^\dagger(w) = \psi_+^\dagger(w) + \psi_-^\dagger(w) = \sum_{-\nu \in \mathbb{N}^c} a_{-\nu}^\dagger (c_\nu \bar{w}^\nu) + \sum_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu^\dagger (c_\nu w^\nu),$$

$$z = 1 \quad z \in \overline{D}, \quad w \in \widehat{D}.$$

命題 4.1, $z \in \bar{D}$, $w \in \bar{D}$ に対し,

$$\langle \psi(z) \psi^\dagger(w) \rangle = \langle \psi_+(z) \psi_-^\dagger(w) \rangle = (1 + z \cdot w)^{-n},$$

$$\langle \psi^\dagger(w) \psi(z) \rangle = \langle \psi_-^\dagger(w) \psi_+(z) \rangle = (1 + \bar{z} \cdot \bar{w})^{-n},$$

とくに $z \in \bar{D}$, $y \in B$ に対し

$$\langle \psi(z) \psi^\dagger(-\bar{y}) \rangle = (1 - z \cdot \bar{y})^{-n}, \text{ Cauchy 核.}$$

とある。

$$\langle 0 | \psi_-(z) = 0 \quad \langle 0 | \psi_-^\dagger(w) = 0$$

$$\psi_+(z) | 0 \rangle = 0 \quad \psi_+^\dagger(w) | 0 \rangle = 0$$

4.2.

カレント作用素を, $\alpha \in \mathcal{N}$ に対し,

$$J_\alpha = \int_B c_\alpha z^\alpha : \psi(z) \psi^\dagger(-\bar{z}) : \sigma(dz),$$

$$J_{-\alpha} = \int_B c_\alpha \bar{z}^\alpha : \psi(z) \psi^\dagger(-\bar{z}) : \sigma(dz),$$

と定義する。

一般に $f \in C^\infty(B)$ に対し

$$J_f = \int_B f(z) : \psi(z) \psi^\dagger(-\bar{z}) : \sigma(dz)$$

と定める。ここに $:$ は renormalization を示す。

命題 4.2.

$$J_\alpha = - \sum_{\nu \in \mathcal{N}} a_{\alpha+\nu}^\dagger a_\nu + \sum_{0 \neq \nu \subset \alpha} a_{-\nu} a_{\alpha-\nu}^\dagger + \sum_{\substack{\alpha \subset \nu \\ \alpha \neq \nu}} a_{-\nu} a_{-(\nu-\alpha)}^\dagger,$$

$$J_{-\alpha} = -\sum_{\nu \in \mathcal{N}} a_{\nu}^{\dagger} a_{\alpha+\nu} + \sum_{0 \neq \nu \subset \alpha} a_{\alpha-\nu} a_{-\nu}^{\dagger} + \sum_{0 \neq \nu \in \mathcal{N}} a_{-\nu} a_{-(\alpha+\nu)}^{\dagger}$$

命題 4.3. $z \in B$.

$$(1) [J_{\alpha}, \psi(z)] = M(z^{\alpha}) \psi(z)$$

但 $M(z^{\alpha})$ の作用は §3 より 従うもので

$$M(z^{\alpha}) \psi(z) = \sum_{\nu \not\supset \alpha} a_{-\nu} \bar{z}^{\nu-\alpha} + \sum_{\nu \subset \alpha} a_{-\nu} z^{\alpha-\nu} + \sum a_{\nu} z^{\alpha+\nu}$$

(2)

$$[J_{-\alpha}, \psi(z)] = M(\bar{z}^{\alpha}) \psi(z),$$

$$M(\bar{z}^{\alpha}) \psi(z) = \sum a_{-\nu} \bar{z}^{\nu+\alpha} + \sum_{\nu \subset \alpha} a_{\nu} \bar{z}^{\alpha-\nu} + \sum_{\nu \not\supset \alpha} a_{\nu} z^{\nu-\alpha}$$

$$(3) [J_{\alpha}, \psi^{\dagger}(-\bar{z})] = -M(z^{\alpha}) \psi^{\dagger}(-\bar{z})$$

$$M(z^{\alpha}) \psi^{\dagger}(-\bar{z}) = -\sum a_{\nu+\alpha}^{\dagger} \bar{z}^{\nu} - \sum a_{-\nu}^{\dagger} z^{\nu+\alpha} - \sum_{\nu \subset \alpha} a_{\nu}^{\dagger} z^{\alpha-\nu}$$

$$(4) [J_{-\alpha}, \psi^{\dagger}(-\bar{z})] = -M(\bar{z}^{\alpha}) \psi^{\dagger}(-\bar{z})$$

$$M(\bar{z}^{\alpha}) \psi^{\dagger}(-\bar{z}) = \sum a_{\nu}^{\dagger} \bar{z}^{\nu+\alpha} + \sum_{\nu \subset \alpha} a_{-\nu}^{\dagger} \bar{z}^{\alpha-\nu} + \sum a_{-\nu}^{\dagger} z^{\nu-\alpha}$$

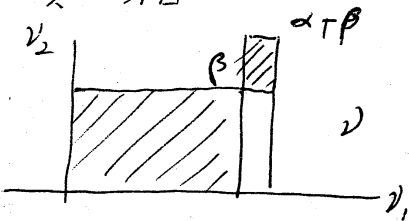
以上は, ぶつうの計算で示される.

次に交換関係を述べる.

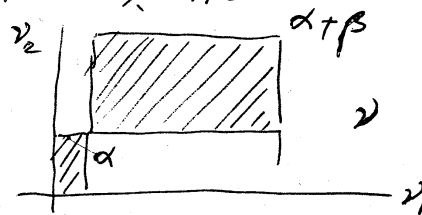
命題 4.4.

$$[J_\alpha, J_\beta] = \left(\sum_{\nu < \beta} + \sum_{\beta < \nu < \alpha + \beta} \right) a_{\alpha + \beta - \nu}^\dagger a_{-\nu} \\ - \left(\sum_{\nu < \alpha} + \sum_{\alpha < \nu < \alpha + \beta} \right) a_{\alpha + \beta - \nu}^\dagger a_{-\nu}$$

ホ-項の和



ホ = 項の和

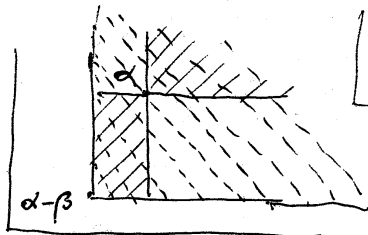


$$[J_{-\alpha}, J_{-\beta}] = \left(\sum_{\nu < \alpha} + \sum_{\alpha < \nu < \alpha + \beta} \right) a_{-\nu}^\dagger a_{\alpha + \beta - \nu} \\ - \left(\sum_{\nu < \beta} + \sum_{\beta < \nu < \alpha + \beta} \right) a_{-\nu}^\dagger a_{\alpha + \beta - \nu}$$

$$[J_\alpha, J_{-\beta}]$$

$$= \left(\sum_{\nu > \alpha} + \sum_{\alpha > \nu > \alpha - \beta} - \sum_{\nu > \alpha - \beta} \right) a_\nu^\dagger a_{\nu + \beta - \alpha}$$

$$+ \left(\sum_{\nu > \beta} + \sum_{\beta > \nu > \beta - \alpha} - \sum_{\nu > \beta - \alpha} \right) a_{-(\alpha - \beta + \nu)}^\dagger a_{-\nu}$$



$$- \delta_{\alpha, \beta} \#\{\nu: 0 < \nu < \alpha\}$$

ホ-項の $\sum$ のとり方: (実線部-点線部)

1次元の current algebra は良く知られているように、
交換関係

$$[J_m, J_n] = [J_{-m}, J_{-n}] = 0$$

$$[J_m, J_{-n}] = -\delta_{m,n} \cdot n$$

を満足する。同様の交換関係を得るには、Lie環
 $\mathcal{G}$ を商をとらねばならない。

$$\begin{aligned} \text{元} \quad & a_{\alpha-\nu}^+ a_{-\nu} - a_{\nu}^+ a_{-(\alpha-\nu)} \\ & a_{\alpha-\nu}^+ a_{\alpha+\beta-\nu} - a_{\nu}^+ a_{\nu+\beta} \\ & a_{-(\alpha-\nu)}^+ a_{-(\alpha+\beta-\nu)} - a_{-\nu}^+ a_{-(\nu+\beta)} \\ & a_{-\nu}^+ a_{\alpha-\nu} - a_{-(\alpha-\nu)}^+ a_{\nu} \end{aligned} \quad , \alpha, \nu \in \mathcal{N}$$

は $\mathcal{G}$ の center に属す。これらで生成する部分
空間を $\mathcal{J} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{G})$ とする。

$$\mathcal{Q} = \mathcal{G} / \mathcal{J}$$

とあく。 $\mathcal{Q}$ に induce される Lie bracket を
 $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{Q}}$ と書く。

命題 4.4.

$$[J_{\alpha}, J_{\beta}]_{\mathcal{Q}} = 0. \quad [J_{-\alpha}, J_{-\beta}]_{\mathcal{Q}} = 0$$

$$[J_{\alpha}, J_{-\beta}]_{\mathcal{Q}} = -\delta_{\alpha,\beta} \# \{ \nu \in \mathcal{N} \mid \nu \subset \alpha \}$$

証明. 1行目は $\mathcal{J} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{G})$ の定義より。

2行目は $a_{\nu} | \xi \rangle = 0$ for large ν を使って
 $\forall | \xi \rangle \in \mathcal{F}$ に対し 分かる。

命題 4.5,

(1) $\forall |\xi\rangle \in \mathcal{F}$ に対し十分大なる $\alpha \in \mathbb{Z}$ には

$$J_{\alpha}^{\dagger} |\xi\rangle = \langle \xi | J_{\alpha} = 0$$

(2) $\{t_{\nu}, \nu \in \mathcal{N}\} \subset \mathbb{R}$ に対し

$\sum t_{\nu} J_{\nu}$, $\sum t_{\nu} J_{-\nu}$ は well defined

(3) $\exp(\sum_{\nu} t_{\nu} J_{\nu})$ well defined z''

$$e^{\sum t_{\nu} J_{\nu}} \cdot \psi(z) \cdot e^{-\sum t_{\nu} J_{\nu}} = e^{\sum t_{\nu} M(z'')} \psi(z)$$

が成立.