

格子ソリトン

東教大 光研 戸田盛和

§ 1. Introduction

格子ソリトンの考察において、格子よりも簡単と思われ、連続体の非線型媒質を振り返ってみる必要がしばしばある。ここい少し歴史的に連続体の場合から始めて格子にいたる非線型波の取扱いを述べてみたい。

§ 2. KdV 方程式

Korteweg と de Vries とは small but finite amplitude の shallow water wave を扱って KdV 方程式を導き、その解として一回のソリトン (そういう名称はまだなかった) の解と二重り波 (cnoidal wave) を得て、また後者の微少な変形を研究している。これは 1895 年のことである。

Gardner と Morikawa (1960) は磁場 B が存在するときの hydromagnetic wave in a cold plasma が

KdV 方程式に表わされたことを示した。格子波も連続体近似でこの方程式に帰せしめる (Zabusky, 1963)。KdV 方程式の再帰現象は Zabusky と Kruskal によって発見された (1965)、ソリトンの運動という観点から解釈された。ソリトン自身の相互作用 (衝突・通過) は 1967 年に計算機実験によって示された。プラズマ波のソリトンは Ikezi 等によって実験的に示された (1970)。浅い水の波によって KdV の解を調べることもなされた (1970, Zabusky 等)。

非線型の格子振動については Fermi-Pasta-Ulam の研究がある (1955)。F-P-U は一次元の非線型格子の振動の熱平衡に近づくであろうという予想の下に計算機実験を行ったが、予想に反して再帰現象を認めた。この研究は Jackson, Ford, Zabusky, Saito 等によって続けられた。この系の振動系は不安定になるだろうという Izrael と Chirikov (1966) の提唱もある。Visseren 等は格子振動による熱伝導の研究から非線型格子およびこれに不純物を入れたときの振動を計算機により調べ (主に 2 次元格子)、16 mm フィルムに収めた (1967)。これらの仕事には、非線型のポテンシャルも

$$\phi(r) = \frac{\alpha}{2} r^2 + \frac{\beta}{3} r^3 + \frac{\gamma}{4} r^4 + \dots$$
 のように展開した 2 項、あるいは 3 項までをとって計算している。Toda は $\phi(r) = \frac{a}{b}(e^{-br} - 1) + ar$ (exp-格子) を用いて非線型 1 次元格子を調

べている。Hirota-Suzuki は非線型 K_p ハミルトン系をもつ LC-ladder 回路により非線型波の伝播を眼に見えようようにした。

Taniuchi 等は ion-acoustic wave in plasma の KdV を導き出したことを示した (1966)。また, Taniuchi, Yajima は非線型 Schrödinger 方程式 $i\psi_t = \mu\psi_{xx} + |\psi|^2\psi$ の性質を研究している。Varma 等は結晶中の heat pulse の非線型な伝播がこの方程式で表わされたことを示した (1970)。

§3. 格子の方程式間の関係

非線型格子の主要例として, KdV, nonlinear Schrödinger 等の方程式を導くことにより, これらの間の関係を調べよう。

格子においてバネのポテンシャルを

$$\phi(r) = \frac{\kappa}{2} r^2 + \frac{\kappa\alpha}{p+2} r^{p+2}$$

とすると格子の運動方程式は

$$\omega_0^{-2} \ddot{y}_n = (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \alpha [(y_{n+1} - y_n)^{p+1} - (y_n - y_{n-1})^{p+1}]$$

と書ける。 $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$, $p=1$ とし h を格子間隔 (バネの長さを平均), $x = nh + c\omega_0 t$, $c = h\sqrt{\kappa/m}$, $\varepsilon = 2\alpha h$ とおくと連続体近似として

$$\alpha[(y_{n+1}-y_n)^2 - (y_n - y_{n-1})^2] = \varepsilon h^2 y_x y_{xx} + O(h^5)$$

を得る。また $p=2$ とする。 $\varepsilon' = 2\alpha'h$ とし

$$\alpha'[(y_{n+1}-y_n)^3 - (y_n - y_{n-1})^3] = \frac{3}{2} \varepsilon' h^3 y_x^2 y_{xx} + O(h^6)$$

を得る。また

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2(y_{xx} + \frac{h^2}{12} y_{xxxx})$$

がある。ここで ϕ をポテンシャル

$$\phi(r) = \frac{\kappa}{2} r^2 + \frac{\kappa\alpha}{3} r^3 + \frac{\kappa\alpha'}{4} r^4$$

をとすれば

$$y_{tt} = c^2 \left[(1 + \varepsilon P y_x + Q y_x^2) y_{xx} + \frac{h^2}{12} y_{xxxx} \right]$$

を得る。ここで $\varepsilon = \varepsilon' h$ とおきなおした。

$\varepsilon P \gg Q$ とすれば $\kappa\alpha V$ の影響は α による $\frac{1}{2}\kappa\alpha$ の項より無視でき、 $\varepsilon = 2\alpha'h$ の小さい場合も考え、このようにおく。実際 $\frac{1}{2}\kappa\alpha$ の項より Q が εP に比べて大きいものがあるといふことはある。

$$\xi = \varepsilon(x - ct)/h, \quad \tau = \varepsilon^3 ct/h, \quad u/h = aW$$

とあるが ϵ^4 の項を ϵ^3 とする

$$W_\tau + \frac{1}{2}(Paw + Qa^2w^2)W_\xi + \frac{1}{24}W_{\xi\xi\xi} = O(\epsilon^2)$$

を得る。ここで $Q=0$ とあるが KdV , $P=0$ とある

が ϵ^2 modified KdV である。

$$\xi = a(\zeta + \frac{3}{24}k_0^2\tau), \quad \tau = a^2\tau,$$

$$W = \psi^{(1)} e^{i(k_0\zeta - \omega_0\tau)} + c.c.$$

$$+ a[\psi^{(2)} + \psi^{(2)} e^{2i(k_0\zeta - \omega_0\tau)} + c.c.]$$

$$+ a^2[\psi^{(3)} e^{3i(k_0\zeta - \omega_0\tau)} + c.c.] + O(a^3)$$

とある。 a のべきを ϵ とする。

$$a^0 e^{i(k_0\zeta - \omega_0\tau)} \text{ の係数は } \omega_0 + \frac{k_0^3}{24} = 0$$

$$a^1 \text{ の係数は } \psi_s^{(0)} = 0$$

$$a^2 \text{ の係数は } \frac{3}{24}k_0^2 \cdot \psi_\eta^{(0)} + \frac{P}{2}[\psi^{(1)}\psi_\eta^{(1)*} + \psi_\eta^{(1)}\psi^{(1)*}] = 0.$$

これは

$$\psi^{(0)} = -P \frac{4}{k_0^2} |\psi^{(1)}|^2$$

$$a^2 e^{i(k_0\zeta - \omega_0\tau)} \text{ の係数は}$$

$$i\psi_s^{(1)} = \frac{3k_0}{24}\psi_\eta^{(1)} + \frac{k_0}{2}(Q|\psi^{(1)}|^2\psi^{(1)} + P\psi^{(0)}\psi^{(1)}) = 0(a)$$

あるが ϵ^2 nonlinear Schrödinger 方程式を得る：

$$i\psi_s^{(1)} = \frac{k_0}{8}\psi_\eta^{(1)} + \frac{k_0}{2}\left(Q - \frac{4}{k_0^2}P^2\right)|\psi^{(1)}|^2\psi^{(1)} = 0$$

(Tappert-Varma と少し係数が異なる)。

§ 4. 結び.

定性的には次のようにいえるであろう:

格子振動で、波が伝わるかどうかわれば、連続体の式

$$y_{tt} = c^2 \left[(1 + \beta y_x + \beta' y_x^2) y_{xx} + \frac{\hbar^2}{12} y_{xxxx} \right]$$

が導かれる。 β, β' は相互作用の非線形項の形に依存する。

(i) $\beta \gg \beta'$ の場合、格子は KdV と同様である。また、

$$i\psi_\tau = \psi_{\eta\eta} - |\psi|^2 \psi$$

と同様である。この ψ のソリトン (classical soliton) も存在する。

(ii) $\beta' \gg \beta$ の場合、nonlinear Schrödinger 方程式

$$i\psi_\tau = \psi_{\eta\eta} + |\psi|^2 \psi$$

と同様に、搬送波の波長 λ が十分小さく、パルスが十分強ければ、自己集束 (self-trapping, self-focusing) が起こり、安定な Envelope-ソリトン が生じる。

以上述べたことは conjecture も含まれ、今後、厳密条件を吟味する必要がある。