

hyperfunction の measure による 表現について*)

東大 理 金子 見

hyperfunction の理論において, local operator という無限階の微分作用素が自然に出てくる。そこで考えるのが自然であるとともに, 一方実際に古典的な問題を解くのにそういうものを考察することが必要になるということを第一回のシンポジウムの時に報告した。あれ以来 hyperfunction 学派の発展は目覚しく, 今では hyperfunction における一々の理論は他の解析的な範疇との関連を示すこともそれ自身意義があるということを認めぬ人はいないであろう。それにもかかわらず今日は敢えてまた hyperfunction と古典解析学的感覚とのつながりの例を論ずることにした。それは古典的な有限階の微分作用素に加え local operator

*) この原稿は 1972 年 1 月に書き直したものである。実際に行われた講演及びその直後に作成した原稿には重大な誤り及び不備があった。関係各位に謹んでおわびしつ。

を駆使することによって hyperfunction を微分積分学が古典的な函数を扱ったように易々と扱おうという試みに対する第一歩でもある。

§ 1. 位相的な考察

K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし $\mathcal{O}(K)$ を K の近傍で実解析的な函数の作る空間とする。 $\mathcal{B}[K]$ を K に台をもつ hyperfunction の空間とする。 良く知られているように $\mathcal{O}(K)$ は DFS 空間, $\mathcal{B}[K]$ は FS 空間となり, 互いに dual である。

$J(D)$ を一つの定数係数 local operator とする。(即ち, ある条件を満たす無限階の微分作用素。 [1] §2 を見よ。)

$f \in \mathcal{O}(K)$ に対し

$$\|f\|_J = \sup_{x \in K} |J(D)f(x)|$$

は一つのセミノルムを定める。 $J(D)$ をいろいろ動かしたとき, これらのセミノルムが定める $\mathcal{O}(K)$ の位相を $\mathcal{O}_J(K)$ で表わそう。我々はまず次のことに注意する。

補題 1.1 次の二つは同値である。

1) $\mathcal{O}(K)$ の弱位相 $\sigma(\mathcal{O}(K), \mathcal{B}[K])$ は $\mathcal{O}_J(K)$ より弱い。

2) 任意の超函数 $u \in \mathcal{B}[K]$ は $u = J_1(D)\mu_1 + \dots + J_N(D)\mu_N$

と表わされる。ここに J_i は定数係数 local operator, μ_i は K に台をもつ測度である。

証明. $2) \Rightarrow 1)$ は容易。 $1) \Rightarrow 2)$. $u \in \mathcal{B}[K]$ を任意に選ぶ。仮定により定数係数 local operator $J_i, i=1, \dots, N$ が存在して

$$|\langle f, u \rangle| \leq \sup_{x \in K} |J_1(D)f(x)| + \dots + \sup_{x \in K} |J_N(D)f(x)| \quad \forall f \in \mathcal{O}(K)$$

という不等式が成り立つ。これより u は部分空間

$$\left\{ \begin{pmatrix} J_1(D)f \\ \vdots \\ J_N(D)f \end{pmatrix} ; f \in \mathcal{O}(K) \right\} \subset C(K)^N$$

の上の汎函数として $C(K)^N$ の通常の supremum ノルムで連続であることがわかる。故に Hahn-Banach の定理により $C(K)^N$ 上の連続線型汎函数まで拡張され、次いで

Riesz の定理により

$$\begin{aligned} \langle f, u \rangle &= \int_K J_1(D)f \mu_1 + \dots + \int_K J_N(D)f \mu_N \\ &= \langle f, J_1(-D)\mu_1 + \dots + J_N(-D)\mu_N \rangle \end{aligned}$$

と表現される。ここに最後の式は測度 μ_i を hyperfunction とみなし $J_i(D)$ を dual に移したものである。q.e.d.

この補題を基礎として講演では convex な K に対し, Fundamental Principle と類似の Fourier 変換の

technique を用いて $\sigma(\sigma(k), \beta[k]) < \sigma_g(k)$ を直接証明し、これを用いて $\beta[k]$ の measure による表現定理 (補題 1.1 の主張 2)) を示そうとしたのであったが、その後発見した証明の gap がどうしても埋められないうえ、以下これと関連した分野でわかったことを記す。それらは同じ頃、或いはその後半年あまりの間にいろいろな所々話したものである。

$\sigma(\sigma(k), \beta[k]) < \sigma_g(k)$ はわかっていないが、次のことはわかる。その前に $\sigma_g(k) < \sigma(k)$ は trivial にわかることを注意しておこう。

定理 1.2 $\sigma_g(k) \rightarrow \sigma(\sigma(k), \beta[k])$ は sequential に連続である。(よく知られているように sequence の収束に関して $\sigma(k)$ と $\sigma(\sigma(k), \beta[k])$ は一致するが、これは $\sigma_g(k) \rightarrow \sigma(k)$ と云っても同じである。)

証明。 $\{f_n\} \subset \sigma_g(k)$ とし、 $f_n \rightarrow f$ in $\sigma_g(k)$ とする。定義より明に $\forall p \in k$ に対し、 $J(D)f_n(p) \rightarrow J(D)f(p)$ 。これは $\langle f_n, J(-D)\delta(x-p) \rangle \rightarrow \langle f, J(-D)\delta(x-p) \rangle$ と書かなおせるが、一点に台を持つ hyperfunction の構造定理によりこれは $f_n \rightarrow f$ in $\sigma(\sigma(p), \beta[p])$ (従って in $\sigma(p)$) を意味する。 $\sigma(p)$ の列の収束に関してよく知られた性質により、これは点 p のある複素近傍 V が存在してその

上と同様に $f_n \rightarrow f$ を意味する。このことは $\forall p \in K$ について云えるのだから、結局 K のある複素近傍が存在してそこに於いて同様に $f_n \rightarrow f$ 。つまり $\mathcal{O}(K)$ の位相で収束することがわかった。q.e.d.

系 1.3. $\mathcal{O}_g(K)$ は sequentially complete である。

証明。上と同様の証明で $\mathcal{O}_g(K)$ の Cauchy 列は $\mathcal{O}(K)$ の Cauchy 列になることがわかる。q.e.d.

実解析函数の新しい特徴づけに関する定理 (講演で予告したこと) はこれから証明できるはずである。一変数のときには [3] を見よ。そこでは $\mathcal{O}_g(K) \supset \sigma(\mathcal{O}(K), \beta[K])$ (一変数のときは正しい) を用いているが、上の定理 1.2. が十分である。従ってそこで正しいかどうかわからないと述べた Remark の内容も上の論法で正しいことがわかる。(一点で議論すれば十分だから)

注意. 次の §2. で一変数のときには補題 1.1, 2) を示すので、同補題によりこの場合には $\mathcal{O}_g(K) \supset \sigma(\mathcal{O}(K), \beta[K])$ も正しい。また、何変数であっても K が一点のときは $\mathcal{O}_g(0) = \sigma(\mathcal{O}(0), \beta[0])$ である。一般には K が内点を持つと正しいが、 K が一点でなく平べったいときは正しくないと予想される。定理 1.2. があるので位相的な面から反例を作

るのは容易でない。

§2. compact support の超函数の構造定理

Schwarz の distribution は local には連続函数の有限階の微分である。local operator を用いれば hyperfunction を用いてもこの類似が成立つ。

定理2.1 $u \in \mathcal{B}[K]$ は $u = J(D)f(x)$ と表わされる。
ここに J は定数係数 local operator, $f(x)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の連続函数である。

証明の方針. K は convex と思つてよい。 u の Fourier 変換は良く知られたように

$$(2.1) \quad |\tilde{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi| + H_K(\xi)}, \quad \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$$

という増大度を持つ整函数であるが、この増大度は次のように書き直される。

$$(2.2) \quad |\tilde{u}(\xi)| \leq C e^{\frac{|\xi|}{\varphi(|\xi|)} + H_K(\xi)}$$

ここに $\varphi(r)$ は ∞ に単調に増加する $r \geq 0$ の函数であつて、
実際

$$\psi(r) = \sup_{|\xi|=r} \tilde{u}(\xi) \exp(-H_K(\xi))$$

とおけば

$$(2.3) \quad \varphi(r) = \inf_{s \leq r} \max \left\{ 1, \frac{s}{\log(e + \psi(s))} \right\}$$

でよい。次の段階は実軸の付近においてこの増大度 $e^{\frac{|\xi|}{\varphi(|\xi|)}}$

を実現する entire infra-exponential function を作ることである。これには二通りの作り方がある。第一は

$$(2.4) \quad J(\xi) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{(m\varphi(m))^2} \right)$$

を用いるもので、対応する local operator $J(D)$ は elliptic になる。これは distribution を $\Delta^N f(x)$ と表わすことに相当している。第二は

$$(2.5) \quad J(\xi) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_1^2}{(m\varphi(m))^2} \right) \cdots \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_n^2}{(m\varphi(m))^2} \right)$$

を用いるもので、ここには $\psi(r) = \frac{1}{n} \varphi(nr)$ ととればよい。これは distribution を $(D_1 \cdots D_n)^N f(x)$ と表わすことに相当する。

$$(2.6) \quad \frac{|\xi|}{\varphi(|\xi|)} \leq \sum_{j=1}^N \frac{|\xi_j|}{\psi(|\xi_j|)}$$

がわかるから、いずれの場合も初等的な計算 ([1] を見よ。) で

$$F(\xi) = \frac{\hat{u}(\xi)}{(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{\left[\frac{n}{2}\right] + 1} J(\xi)}$$

は実軸を含むある帯で正則で $|F(\xi)| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|^2)^{\left[\frac{n}{2}\right] + 1}}$ を満たし、従ってその Fourier 逆変換 $f(x)$ は連続であることが知られる。 $f(x)$ と $u(x)$ の関係は Fourier 超函数論の枠内で考えればよい。くわしい説明は省く ([5] を見よ),

ともかく常識で想像されるように積分・微分に対応して

$$u(x) = J(D)f(x)$$

となる。q.e.d.

系2.2 (一変数のとき) K を $\mathbb{R}^1$ のコンパクト区間とすれば $u \in \mathcal{B}[K]$ に対し補題1.1の主張2)が(従って1)も)成立つ。([2])

証明. 上で得られた表現 $u = J(D)f(x)$ において $f(x)$ を K 上に“切り落とせば” もとの u との差は高々両端の上に台を持つ hyperfunction であるから, 一点 support の hyperfunction の構造定理により $u = J(D)(f(x)\chi_K(x)) + J_1(D)\delta(x-a) + J_2(D)\delta(x-b)$ と3つで表わされる。

注. 佐藤先生は2つで十分だろうと予想している。その根拠は $u = J(D)v$. v は K に台をもつ non-quasianalytic class の hyperfunction (以下の定義を見よ) と表わせるという因数分解定理の成否による。なおこの因数分解定理は多変数の場合には trivial な反例がある。:

$J(D_1)\delta(x_1, x_2) - \delta(x_1, x_2 - 1)$ ここで J は3'り3'りの infra-exponential にとる。その Fourier 変換 $J(\xi_1) - e^{i\xi_2}$ は一般に local にも global にも既約である。

・多変数のときは上の系2.2ほどの程度成り立つであろうか? ここでは不満足ながら次のことを示すにとどめる。

まず,

定義. $u \in \beta[K]$ が non-quasianalytic class であるとは $\tilde{u}$ が評価 (2.2) を $(H_K(S))$ の K は convex hull と (2)

$$(2.7) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \varphi(m)} < \infty$$

なる φ に対し満たすことである。

定理 2.3 $K = \overline{\Omega}$ は compact とし Ω は cone property を持つ領域とする。(すなわち Ω の各境界点に対しその点を頂点とし頂点以外は Ω に含まれるような non-degenerate cone の先端が存在する) このとき $\beta[K]$ の元 u が non-quasianalytic class (上の定義) に属するものは $u = \sum_{i=1}^N J_i(D) \mu_i$ の形に表わされる。ここに $J_i(D)$ は定数係数 local operator, μ_i は K に台を持つ測度で個数 N は K の形状のみによって定まる。

証明. u が non-quasianalytic class ならば regularization に対応する local operator $J(D)$ は compact support の differentiable function に施すことができる, 結果は measure の範囲にとどまる。実際 [6], p.2 には $\psi(x) = \frac{1}{n} \varphi(nx)$, $C(x) = \frac{x}{\psi(x)} + \log(1+x^2)$ とおいて, 仮定より

$$\int_1^{\infty} \frac{C(x)}{x^2} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \varphi(m)} < \infty$$

*) さらに φ は $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log m}{m \varphi(m)} < \infty$ を満たすとする。

だから

$$(2.8) \quad |F(z)| \leq C e^{-\frac{x}{\varphi(x)} - n \log(1+x^2) + A|y|}$$

なる評価を持つ一変数の整函数が存在する。これらを各変数について掛ければ

$$(2.9) \quad |F(\xi_1) \cdots F(\xi_n)| \leq C e^{-\sum_{j=1}^n \left(\frac{|\xi_j|}{\varphi(|\xi_j|)} + n \log(1+|\xi_j|^2) \right) + A|\operatorname{Im} \xi|}$$

$$\leq C (1+|\xi|^2)^{-n} e^{-\frac{|\xi|}{\varphi(|\xi|)} + A|\operatorname{Im} \xi|}$$

を満たす整函数が得られた。従ってこの Fourier 逆変換

$\varphi(x)$ は先に述べたような性質を持つ定数 $C = \int \varphi(x) dx$ で

割って、compact 集合 L の characteristic function

χ_L との convolution をとることにより函数 $\chi_L * \frac{1}{C} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

は L の十分内部では 1 に等しく、 L の十分外部では 0 に等しく、

上の $J(D)$ を施しても L_2 にとどまることかわかる。^{*}

Cutting function が得られたところまで次のことを確かめる：

$u \in \mathcal{B}[L]$ が non-quasianalytic ならば $u = J(D)f(x)$

と表わされる。ここに $f(x)$, $g(x)$ は L_2 函数でその

support は L の任意に小さい近傍に入らうにとることができる。

何故なら、まず $u = J(D)f(x)$ と (2.4) の $J(D)$ で表わ

し、上で得た cutting function χ (L のある近傍で 1

に等しくなるようにとる。) で f を cut する。 $J(D)$ は

^{*} $\varphi(x) \geq 0$ は以下必要としない。

elliptic で L_2 外では $J(D)f(x) = 0$ なのだから $f(x)$ は cutting function が 1 でないところでは real analytic で、従って

$$(2.10) \quad u = J(D)(\chi(x)f(x)) + J(D)((1-\chi(x))f(x))$$

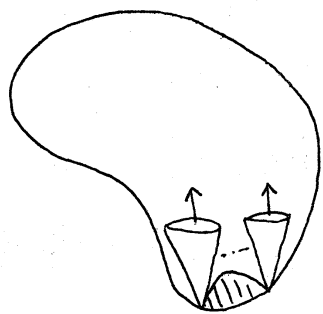
において第2項は $J(D)$ を施しても L_2 の範囲にとどまるのである。

support の方が広からぬような sharp な表現定理にするために我々は次に hyperbolic operator を使う。

つまり (2.5) の $J(\xi)$ において、各因子を

$$(2.11) \quad \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_m}{i m \psi(m)}\right)$$

にとることができるのである。(non-quasianalytic の仮定!) こうして得られた (2.5) に対応する $J(D)$ は基本解が第一象限に support を持つような hyperbolic operator となる。さらに実の linear な座標変換によりこの support の cone の開きがいくらでも小さいような $J(D)$ を作ることが可能である。以上の準備の下に与えられた $u \in \beta[K]$ を先ほど作った cutting function を用いていくつかに分ける。まず境界付近の部分と完全に内部に入っている部分に分けると、内部に入っている方は最初に述べた elliptic operator を用いて2個で表わす方法で済む。次に境界付近をいくつか有限個に切って各片は共通の cone が K の内部

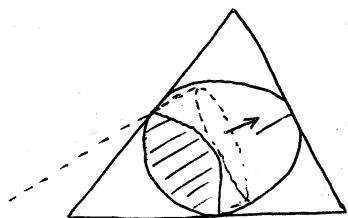


にとれるようにできる。compact
だからこれは可能である。これら各片
1に対し2は2番目に述べた hyper-
bolic operator による
regularization をやる。support
は対応する cone に沿って広がる適

当なところで cut すると今度の剰余類 (2.10) と同様)
は必ずしも L_2 に属するかどうかわからないが, support
は K の完全内部にある。そしてそれが再び non-quasi-
analytic class の hyperfunction になることも容
易にわかるから*, これに対し再び第1の elliptic operator
による regularization を適用すれば結局定理の主張す
る表現が完成したことになる。個数 N が K の形状だけで決ま
ること以上は以上の議論から明である。q.e.d.

注意. K が convex のとき1に個数を計算してみると

$n+3$ 個で良い (但し立方体のように
「外接」する n -単体が書けない場合は例
外的に $n+4$ 個) ことがわかる。佐藤先
生^の以前の予想では $n+1$ 個であるし,
 $n=1$ の場合と比べると大層甘い計算の
ようである。



*) ここで P.9 脚注に追加した条件が必要となるようである。

§ 3. 開集合上の超函数の構造定理

§ 2 で述べた定理 2.1 は実はもっと強い形で成り立つ。
すなわち $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ の元の構造定理と比較せよ)

定理 3.1 $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対し $\exists J(D), \exists f: \text{continuous on } \mathbb{R}^n$ が存在して $u = J(D)f$ と書ける。 $J(D)$ は elliptic にとれる。

証明. u を Fourier hyperfunction $\mathcal{O}_f(\mathbb{D}^n)$ の元として拡張する。これを以下同じ文字で表わすことにする。
Fourier 変換して $\tilde{u} = [F(\xi)]$, すなわち, $F(\xi)$ を $\tilde{u}$ の定義函数とすれば

$$(3.1) \quad |F(\xi)| \leq C_{\varepsilon, I} e^{\varepsilon|\xi|} \quad \text{for } \eta \in I$$

ここに $I \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ であり, $\xi = \xi + i\eta$ と書いた。今 $\delta > 0$ を fix すれば § 2 で (2.1) から (2.2) を出したのと同様の考察で

$$(3.2) \quad |F(\xi \pm i\delta)| \leq C e^{\frac{|\xi|}{\varphi(|\xi|)}} \quad \exists \varphi \uparrow \infty$$

がわかる。故に (2.4) で $J(\xi)$ を定め

$$G(\xi) = \frac{F(\xi)}{(1 + \xi_1^2 + \xi_n^2)^{[\frac{n}{2}] + 1}} J(\xi)$$

とおけば

$$|G(\xi \pm i\delta)| \leq C \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{[\frac{n}{2}] + 1}}$$

かつ

$$[F(\xi)] = J(\xi)[G(\xi)]$$

従って $[G(\xi)]$ の Fourier 逆変換 v に対し $u = J(D)v$ が成り立つ。あと v が連続であることを見ればよいが、これには Fourier 逆変換の計算を積分路 $\xi \pm i\delta$ の上で行おう。ことにより v の定義函数 $V(z)$ に対し

$$V(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^0 e^{-i(x\xi - y\delta) + x\delta + y\xi} G(\xi \pm i\delta) d\xi + \dots$$

の各項は $y \downarrow 0$ としても収束する積分を表わすことがわかる。故に $V(z)$ の定める超函数 v は連続である。q.e.d.

系 3.2 $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ を任意の開集合とすると $\beta(\Omega)$ の元には $u = J(D)f$, $\exists J(D)$, $\exists f: \text{continuous on } \Omega$, と書ける。

証明. β の flabbiness により定理 3.1 に帰着される。

また上記証明から次のこともわかる。

系 3.3 $\mathbb{R}^n$ 上の任意の増大度をもった連続函数 $f(x)$

及び任意の $\delta > 0$ に対し $f(x) = J(D)g(x)$ となる連続函数 $g(x)$ の評価 $|g(x)| \leq e^{\delta|x|}$ となるものがある。つまり超函数論的には増大度は exponential type まで考えれば十分である？！

注意 1. 無限階の微分作用素でさらに“積分”することによ

り $f(x)$ として *non-quasianalytic* なる限りいくらでも
 ためらかなものを選ぶことができることは明であろう。特
 に C^∞ 級にとれることは重要である。

注意2. $J(D)$ の作り方はきわめて任意である。すなわち、
 J を作るに用いる数 $\varphi(m)$ は少々動かしても影響ないから
 あらかじめ与えられた数に対して *transcendental* に
 とることができる。特に $J(\xi)$ はあらかじめ与えられたい
 つかの多項式 $P_k(\xi)$ と既約になるように作れる。これは
 応用上重要である。

注意3. 上の証明でとった連続函数 $f(x)$ の速さにおける
 増大度は $|f(x)| \leq C e^{\delta|x|}$ である。ここに $\delta > 0$ はいく
 らでも小さくとれるが、その度には J 及び f をとり替へねばなら
 ない。この f を *infra-exponential type* にとれるか
 どうかは予て調べていない。

§4. 応用など。

定理3.1 又はその系を利用して連続函数或は C^∞ 函数で
 成立している定理を *hyperfunction* の世界に持ち込む
 ことができる。例えば凸領域における定数係数線型偏微分
 作用素(有限階)の *hyperfunction solution* に対して
 も指数函数表示定理が成り立つことが、 C^∞ 級解の結果をこ

うして持ち込むことにより証明できる。([4]), 結果は

$u \in \beta_p(\Omega)$ に対し

$$(4.1) \quad u(x) = \sum_{\lambda=1}^l \int_{N_\lambda} d_\lambda(\xi, -ix) e^{-ix\xi} d\mu(\xi)$$

ここに $\{N_\lambda\}$ は $\mathcal{P}$ に associate した代数多様体の族であり,

d_λ は Noether 作用素, μ は $\mathcal{P}$ 上の測度, μ は

$$\sum \int_{N_\lambda} |d_\lambda(\xi, -ix)| \exp(-\varepsilon|\xi| + H_k(\xi)) |d\mu(\xi)| < \infty$$

なる増大度を満たす。従って (4.1) の積分は hyperfunction

の意味である。すなわち x が実軸にあるときは位相的の意味

では収束せず, x が虚に逃げるとき正則函数を与える。その

境界値として定まる hyperfunction がもとの u に等しい

のである。

引用文献

- [1] Kaneko, A., On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 17-3 (1970) 567-580
- [2] ———, On the structure of hyperfunctions with compact supports, Proc. Japan Acad. Supplementary edition (1971), to appear. (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo)
- [3] ———, A new characterization of real analytic functions, Proc. Japan Acad. 47-10 (1971) 774-775
- [4] ———, Fundamental Principle and extension of solutions of partial differential equations, Proc. Symposium on Hyperfunctions at Katata, October, 1971, to appear. (Springer. Lecture Note)
- [5] Kawai, T., 超函数論における Fourier 変換の理論とその応用, 数理科学講究録 108 (1969) pp 84-288
- [6] Mandelbroit, S., Fonctions entières et Transformées de Fourier Applications, Math. Soc. Japan, 1967