

有限鏡映群の不変式 — 特に E 型 —

埼玉大 理 矢野 環

京都大 理 関口 次郎

§ 0. ユークリッド空間 $E = \mathbb{R}^l$ における, 鏡映から生成された有限群は, 完全に決定され, Coxeter 群と呼ばれて色々な性質が示されている。(Bourbaki: Lie Algebra 45)

E への作用が既約であるものを, 既約 Coxeter 群と呼ぶことにする. 既約 Coxeter 群 W_l は, l 個の鏡映からなる生成元の集合 $S = \{s_1, \dots, s_l\}$ をもち, W_l はそれらの s_i 間の基本関係式

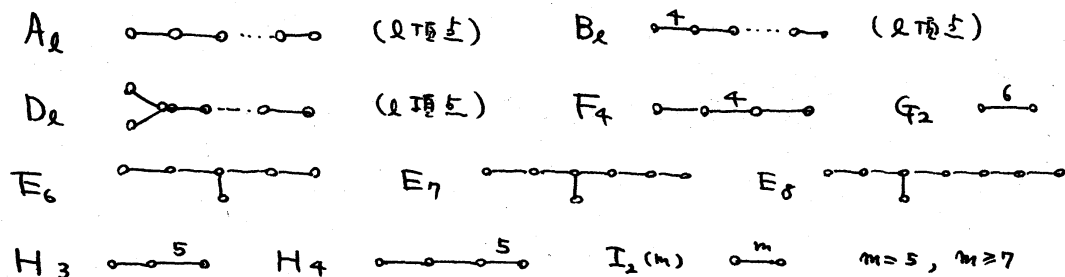
$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = e, \quad s_i^2 = e \quad \text{によって定まる群となる.}$$

ここに m_{ij} は自然数 ^{≥ 2} であり, $m_{ij} \geq 3$ の時, s_i と s_j を, 上に m_{ij} を書きこいた積分で結ぶことにより, グラフを得る. この

(W_l, S) のグラフを呼ぶ. 既約 Coxeter 群のグラフは,

次のものに限る. (一般の Coxeter 群は既約 Coxeter 群の直積となり, そのグラフは, グラフの和集合となる.) 線分上に書きこいた数字は, $m_{ij} \geq 4$ のときのみ記す.

表 1 (W_l, S)



このうち上3行は, Lie 環の Root 系, Weyl 群に対応するものである。第4行は, 2, 3, 4 次元に於ける, 例外的な正多面体の合同群である。(A_l, B_l は l 次元での正 $l+1, 2l$ 面体の合同群。 $B_l \in C_l$ と見れば正 $2l$ 面体のうち。 F_4, H_4 は 4 次元の正 24 面体, 正 120 (又は 600) 面体, H_3 は 3 次元の正 12 (又は 20) 面体, $I_2(m)$ は正 m 角形のうち $m=5, m \geq 7$ の合同群である。)

E (又は dual E^*) の symmetric algebra $\wedge W_l$ は自然に作用するが, その不変式環について次のことが知られている。

定理 1 $R = S(E^*)^{W_l}$ は多項式環に同型であり, 同次式により生成される。

即ち, E^* の basis を $\xi_1, \dots, \xi_l$ とすれば, $R = R[x_1, \dots, x_l]$ となり各 x_i は ξ_i の同次 m_i 次式であるようにとれる。

表 2 (m_i)

A_l :	$m_i = i+1$	B_l :	$m_i = 2i$
D_l :	$l=2k$ $m_i = 2i$ $i \leq k, m_i = 2(i-1)$ $i > k$ $l=2k+1$ $m_i = 2i$ $i \leq k, m_{k+1} = l, m_i = 2(i-1)$ $i > k+1$	F_4 :	2, 6, 8, 12
E_6 :	2, 5, 6, 7, 8, 12	G_2 :	2, 6
E_7 :	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18	E_8 :	2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30
H_3 :	2, 6, 10	H_4 :	2, 12, 20, 30
$I_2(m)$:	2, m		

x_i の具体的な形は, $A_\ell, B_\ell, D_\ell, \overbrace{I_\ell(m)}^{\text{I}_\ell(m)}$ については比較的容易に
 あたえられるが, 他の場合については, 殆ど存在証明の域を出
 ていないのが実状であった. J. S. Frame [] は特殊な座標系
 を用いて E_6 の不変式を表示している. 又, A. Borel - F. Hirzebruch []
 は F_4 の x_2, x_6, x_8 について言及している.

我々は, 後の研究の必要上, すべての不変式を,
 explicit に決定することになった.

以下 W_ℓ は既知 Coxeter 群とする. 又, $m_1 \leq \dots \leq m_\ell$ と仮定す.

§1 行列 $M(W_\ell)$

E の正規直交基を $\{e_i\}$ と, dual basis を $\{\xi_i\}$ としよう.

$W_\ell \hookrightarrow O(E) (O(E^*))$ (直交群) とみなせることより, 2 次の
 不変式は (一つしかなく以上) $x_i = \xi_i^2 + \dots + \xi_\ell^2$ とおけばよい.

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell})$ と定める. $W_\ell \hookrightarrow O(E^*)$ を用いて,

$\nabla x_i \cdot \nabla x_j$ は不変式となることわかる. ところで

定義 2 $m_{ij}(x) = \frac{1}{2} \nabla x_i \cdot \nabla x_j,$

$$M(W_\ell) = (m_{ij}(x))_{i,j=1,\ell} \quad (\text{対称行列})$$

この行列 $M(W_\ell)$ について, 斎藤恭司氏並びに我々は,
 次の事実を予想している.

予想 3. 適当な不変式の生成元 $y_1, \dots, y_\ell$ が存在して,

$$M(W_\ell) = (m_{ij}(y))_{i,j=1,\ell}$$

の anti-diagonal $m_{i, l-i}(y)$ 以外には, 最高次基本不変式が
 があるわけではない。

そのような $\{y_i\}$ はもし存在するならば, 本質的に unique である。
 我々の定めた不変式を用いて調べたところ, A_ℓ, B_ℓ, D_ℓ の
 小さい場合, $F_4, G_2, E_6, H_3, H_4, I_2(m)$ $i=1, 2$ については
 予想の成立が確かめられている。このうちの場合, $m_{i, l-i}(y)$
 は真に y_ℓ を含んでいる。この y_ℓ を含む (乗数, weight を
 含む) y_ℓ の定数倍を含む) ことは, A_ℓ, D_ℓ, E_ℓ については
 斎藤氏らの根拠より保証されてもいることであり, B_ℓ につ
 いては, 不変式の形よりわかる。従って, 特に

$$\det M(W_\ell) = c y_\ell^\ell + \dots \quad (c \neq 0)$$

という形をしている。この式, あるいは予想の幾何学的意
 味は現在不明である。簡単な一例をあげておこう。

$$I_2(m) \quad (I_2(3)=A_2, I_2(4)=B_2, I_2(6)=G_2, I_2(2)=A_1 \times A_1)$$

$$x_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad x_2 = (-2)^m \prod_{i=0}^{m-1} (\cos(i\alpha)\xi_1 + \sin(i\alpha)\xi_2) \quad \alpha = \frac{\pi}{m}$$

$$\text{とすると,} \quad M(I_2(m)) = \begin{pmatrix} 2x_1 & mx_2 \\ mx_2 & 2m^2 x_1^{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\det M(I_2(m)) = -m^2 (x_2^2 - 4x_1^m)$$

ここで, $M(W_L)$ の重要性について一言しておく.

$\det M(W_L) = f(x)$ とおく. ベクトル場 X_i を

$$X_i = \sum m_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{と定めるとき,} \quad \mathcal{G} = \sum_{i=1}^L \mathcal{G} X_i$$

は, ちょうど $f(x)$ を不変にする Vector 場の垂体になる, といふことが, 有解の $\log \text{pole}$ の一般論よりわかる. として $f(x)$ の代わりに $f(x)^\alpha$ の解析的性質が, $\mathcal{G}$ を通じて充ち足りることができる. これについては T. Yano - J. Sekiguchi [1][2] を参照せよ. 我々は, その研究のために 不変式を決定したのである.

§ 2. 不変式の構成.

W_L の不変式 $x_1, \dots, x_L$ の構成を, 直接に ξ_i の多項式として行なうことは, (しばしば) 非常に複雑化する. そこで, 次の方法を採用する.

W_L の適当な部分群 W_{L-1} で, (W_L, S) のグラフの subgraph で表わされるものをとり, 表現空間 V の正規直交基底 $e_1, e_2, \dots, e_{L-1}, e_L$ を, $\{e_1, \dots, e_{L-1}\}$ に W_{L-1} が作用しているようにとる. $V \ni \sum_{i=1}^{L-1} \xi_i e_i + x e_L$ により dual V^* の座標を定める. W_{L-1} の基本不変式 $w_1, \dots, w_{L-1}$ は ξ_i により表わされる. $(W_L, S) \supset (W_{L-1}, S')$
 $S' = \{s_1, \dots, s_{L-1}\}$ とすれば,

(w_k, S) の基本不変式は, $\mathbb{C}[w_1, \dots, w_{k-1}, t]$ の元であって
鏡映 S_k により不変なものとして特徴づけられる。

さらに, 初めにいくつかの x_i を求めることに より, 次の方
法によって 新しい x_j を求める。即ち,

$$x_i = \varphi_i(w, t) \quad \text{とすれば,}$$

$$\nabla_{(\varphi, t)} x_i \cdot \nabla_{(\varphi, t)} x_j = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \nabla_{\varphi} \varphi_i \cdot \nabla_{\varphi} \varphi_j$$

ここで 第2項は $\nabla_{\varphi} w_k \cdot \nabla_{\varphi} w_{k'}$ を用いて, w と t の式に書き
あらわしうる。第1項はたゞちに $\mathbb{C}[w, t]$ の元である。

しかるに, 左辺は 不変式であることが知られている。よって
右辺を, すでに知られている不変式 x_i を用いて, 表示でき
るかぎり表示した時, 新しい不変式と以前のものとの
多項式であり, 特に, φ の weight の基本不変式の存在が
わかっている場合には, φ の表示を得ることとなる。

この構成には, m_{ij} の weight に十分注意する必要がある。

表 3 m_{ij} の weight の配列。

E_6	2	5	6	8	9	12
	5	8	9	11	12	15
	6	9	10	12	13	16
	8	11	12	14	15	18
	9	12	13	15	16	19
	12	15	16	18	19	22

E_7	2	6	8	10	12	14	18
	6	10	12	14	16	18	22
	8	12	14	16	18	20	24
	10	14	16	18	20	22	26
	12	16	18	20	22	24	28
	14	18	20	22	24	26	30
	18	22	24	26	28	30	34

$$E_8$$

2	8	12	14	18	20	24	30
8	14	18	20	24	26	30	36
12	18	22	24	28	30	34	40
14	20	24	26	30	32	36	42
18	24	28	30	34	36	40	46
20	26	30	32	36	38	42	48
24	30	34	36	40	42	46	52
30	36	40	42	46	48	52	58

上記の方法は, H_4 の不変式も求まる際に, H_3 の不変式係数の多項式として表示した方針に基づくものである.

§3. E_6, E_7, E_8

§2 の方針に従い, 不変式の決定を具体的に示す.

詳細はすべて [3] にゆずる.

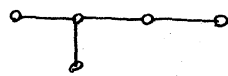
E_7 において必要となる D_6 の m_{ij} の表は次の通りである.

$$D_6 : \quad \frac{1}{2} M(D_6)$$

対称な部分は省略.

x_2					
$2x_4$	$3x_6 + x_2x_4$				
$3x_6$	$4x_8 + 2x_2x_6$	$5x_{10} + 3x_2x_8 + x_4x_6$			
$3x_6'$	$\frac{5}{2}x_2x_6'$	$2x_4x_6'$	$\frac{1}{4}x_{10}$		
$4x_8$	$5x_{10} + 3x_2x_8$	$6x_6'^2 + 4x_2x_{10} + 2x_4x_8$	$\frac{3}{2}x_6x_6'$	$5x_2x_6'^2 + 3x_4x_{10} + x_6x_8$	
$5x_{10}$	$6x_6'^2 + 4x_2x_{10}$	$5x_2x_6'^2 + 3x_4x_{10}$	x_8x_6'	$4x_4x_6'^2 + 2x_6x_{10}$	$3x_6x_6'^2 + 8x_8x_{10}$

E_6 : 基本不変式 $w_2, w_5, w_6, w_8, w_9, w_{12}$ である。

subdiagram  D_5 を採用し、

ξ の不変式 $\Sigma \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_8$ である。 ($\sigma_5 = \xi_1 \cdots \xi_5$)

即ち、 $V_6 = \mathbb{C}^6$ の ^{orthonormal} basis $e_1, e_2, \dots, e_5, e'_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_8 - e_9 - e_6)$ とし、 V の元 $\Sigma_{i=1}^5 \xi_i e_i + p e'_6$ を ξ に表示する。

D_5 は $\Sigma \xi_i e_i$ に作用している。このとき、

$$w_2 = p^2 + \sigma_2$$

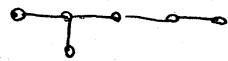
$$w_5 = \frac{1}{24} p^5 - \frac{1}{12} \sigma_2 p^3 + \left(-\frac{1}{8} \sigma_2^2 + \frac{1}{2} \sigma_4\right) p - \sqrt{3} \sigma_5$$

$$w_6 = \frac{1}{6} p^6 - \sigma_2 p^4 + \left(\frac{3}{2} \sigma_2^2 - 5 \sigma_4\right) p^2 - 20\sqrt{3} \sigma_5 p + (-\sigma_2 \sigma_4 + 6 \sigma_6)$$

を表現できる。

この方法を E_7, E_8 に対して適用する。

E_7 : 基本不変式 $y_2, y_6, y_8, y_{10}, y_{12}, y_{14}$

subdiagram  D_6 の基本不変式

$x_2, x_4, x_6, x'_6, x_8, x_{10}$. ($\xi_1, \dots, \xi_6$ による表示)

$$V_7 = \mathbb{C}^7 = \sum_{i=1}^6 \xi_i e_i + t e'_7 \quad e'_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_8 - e_7)$$

E_8 : $z_2, z_8, z_{12}, z_{14}, z_{18}, z_{20}, z_{24}, z_{30}$

subdiagram 12 E_7 より D_7 がとれる。どちらにしようか

も考えてみるべきかもしれない。

E_7 の不変式 $(\tau=t^2) y_2, y_6, y_8, y_{10}, y_{12}, y_{14}, y_{18}$

$x_2, x_4, x_6, x'_6, x_8, x_{10}$ は D_6 の基本不変式

$$y_2 = \tau + x_2$$

$$y_6 = \frac{1}{4}\tau^3 - \frac{1}{4}x_2\tau^2 + \left(-\frac{11}{4}x_2^2 + 10x_4\right)\tau + (x_2x_4 - 6x_6 - 60x'_6)$$

$$y_8 = \frac{1}{16}\tau^4 - \frac{1}{4}x_2\tau^3 + \left(\frac{5}{8}x_2^2 - x_4\right)\tau^2 + \left(\frac{3}{8}x_2^3 - \frac{5}{2}x_2x_4 + 9x_6 - 78x'_6\right)\tau \\ + (x_4^2 - 3x_2x_6 + 6x_2x'_6 + 12x_8)$$

$$y_{10} = \left(\frac{1}{8}x_2^3 - \frac{1}{2}x_2x_4 + x_6 + 2x'_6\right)\tau^2 + \left(\frac{1}{32}x_2^4 - \frac{1}{4}x_2^2x_4 - 2x_2x'_6\right. \\ \left.+ \frac{1}{2}x_4^2 - 2x_8\right)\tau + (-x_2^2x'_6 + 4x_4x'_6 + 4x_{10})$$

$$y_{12}|_{\tau=0} = \frac{2}{9}x_4^3 - x_2x_4x_6 + 2x_2x_4x'_6 + 3x_6^2 - 36x_6x'_6 - 84x'_6{}^2 \\ + 3x_2^2x_8 - 8x_4x_8 - 12x_2x_{10}$$

$$y_{14}|_{\tau=0} = -\frac{1}{2}x_2^2x_4x'_6 + 2x_4^2x'_6 + 24x_2x_6^2 + 24x'_6x_8 - \frac{3}{2}x_2^2x_{10} + 8x_4x_{10}$$

$$y_{18}|_{\tau=0} = -\frac{1}{2}x_2^3x'_6{}^2 + 2x_2x_4x'_6{}^2 + 12x_6x'_6{}^2 + 24x'_6{}^3 - x_2^2x'_6x_8 + 4x_4x'_6x_8 \\ + \frac{1}{32}x_2^4x_{10} - \frac{1}{4}x_2^2x_4x_{10} + \frac{1}{2}x_4^2x_{10} + 6x_2x'_6x_{10} + 2x_8x_{10}$$

この決定には, HITAC 8400 など μ に手動計算を併用し

た。 y_{12}, y_{14}, y_{18} の $\tau \neq 0$ での完全な式については []

参照。 $m_{ij}'(y) = \frac{1}{4} D y_i \cdot D y_j$ の一部を記すと,

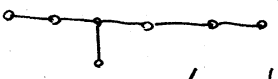
$$m_{6,6} = y_2^2 y_6 + 5 y_2 y_8 + 270 y_{10}, \quad m_{6,8} = 2 y_2^2 y_8 - 3 y_2 y_{10} + 18 y_{12}$$

$$m_{8,8} = 9 y_2 y_{12} + 2 y_6 y_8 + 84 y_{14}, \quad m_{6,10} = \frac{5}{2} y_2^2 y_{10} - 14 y_{14}$$

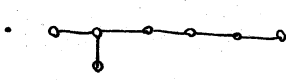
$$m_{8,10} = -\frac{3}{2} y_6 y_{10} - y_2 y_{14}, \quad m_{10,10} = 8 y_{18}$$

$$m_{6,12} = -24 y_6 y_{10} + \frac{2}{3} y_8^2 + 46 y_2 y_{14} + 3 y_2^2 y_{12}$$

E_8 : $V_8 = \mathbb{Q}^8$ を正規直交基とし, subdiagram $\sim D_7$ or E_7 にあわせて, 2つのとり方が可能である。

 E_7 に注目する場合は $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \sim e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_8 - e_1), e'_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_8 + e_1)$ とし,

$V \ni \sum_{i=1}^6 \xi_i e_i + t e'_1 + u e'_8$ とする。そして, (ξ, t) で表示された, E_7 の不変式 ξ_i とする。

 D_7 の場合は, $V \ni \sum_{i=1}^7 \xi_i e_i + r e_8 \sim 1$, $\{\{\xi_1, \dots, \xi_7\}\}$ で表示された D_7 の基本不変式 $s_2, s_4, s_6, s_7, s_8, s_{10}, s_{12}$ とする。

$$Z_2 = u^2 + y_2 = r^2 + s_2$$

$$Z_8 = s_2 r^6 + (12s_2^2 - 35s_4) r^4 + (s_2^3 - 14s_2 s_4 + 84s_6) r^2 + 1680 s_4 s_7 r + (s_2^2 s_4 + 10s_4^2 - 36s_2 s_6 + 120s_8)$$

$$Z_8|_{u=0} = y_2 y_6 + 10 y_8$$

$$\begin{aligned} Z_{12} = & \left(\frac{13}{30}s_2^2 - s_4\right) r^8 + \left(\frac{59}{45}s_2^3 - \frac{16}{3}s_2 s_4 + 9s_6\right) r^6 - 84s_7 r^5 \\ & + \left(\frac{13}{30}s_2^4 - \frac{47}{15}s_2^2 s_4 + \frac{41}{6}s_4^2 - \frac{11}{5}s_2 s_6 - 6s_8\right) r^4 + 1104 s_2 s_7 r^3 \\ & + \left(-\frac{2}{15}s_2^3 s_4 - s_2 s_4^2 + \frac{19}{5}s_2^2 s_6 - 12s_2 s_8 + 176s_{10}\right) r^2 + \\ & + (-7s_2^2 + \frac{88}{3}s_4) s_7 r + \left(\frac{13}{30}s_2^2 s_4^2 + \frac{4}{9}s_4^3 - s_2^2 s_8 - \frac{16}{5}s_2 s_4 s_6 \right. \\ & \left. + \frac{48}{5}s_6^2 + 10s_2^2 s_8 - 16s_4 s_8 - 16s_2 s_{10} + 192s_{12}\right) \end{aligned}$$

$$Z_{14}|_{u=0} = \frac{1}{10} y_6^2 + \frac{1}{3} y_2^2 y_8 + 2y_2 y_{10} + 2y_{12}$$

$$Z_{14}|_{u=0} = \frac{1}{2} y_2^3 y_8 + \frac{28}{5} y_6 y_8 + 3y_2^2 y_{10} + 12y_2 y_{12} + 84y_{14}$$

他はまた check されている。 $Dz_i \cdot Dz_j$ の例は 12,

$$\frac{1}{4} Dz_8 \cdot Dz_8 = z_2^3 z_8 + 30 z_2 z_{12} + 50 z_{14}.$$

[1] T. Yano-J. Sekiguchi, On the microlocal structure of weighted homogeneous polynomials associated to Coxeter groups 1

[2] " - " ; " 2

[3] " - " ; " 3

[4] J. S. Frame: The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents 83-119

付記 又一著者は、同時同帯に " Gauss Manin Connection のある filtration と、不変量 $L(f)$ について " と題する講演を行った。それは、斎藤泰司氏の一般論に代わり、ある

filtration の isolated singularity にかかわる connection の場合は、 $\dim \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1/f}^{(L(f)=2n+2)}$ あるいは b 函数論に代わる色々の不変量によって記述されたというものであった。当講演録の斎藤氏の原稿も、一般論のみに記してある中で、私の方も次の機会にしろさせていただく。