

種々の作用素イデアルと補間空間

九州工大 宮崎慶一

§1. 序

ヒルベルト空間上の trace 作用素, Hilbert-Schmidt 作用素に源を遡る作用素の研究は, Grothendieck [4], [5], Pietsch [21] 等の位相線形空間の考察を動機として, 著しく発展, 展開されて来た。

有界線形作用素全体の作るノルム空間 $L(X, Y)$ の中で, イデアルを作る次のような種々の作用素類が考察されている: 核型作用素, 積分型作用素, 総和型作用素, 分解可能作用素, それらの共役作用素類。

一方, 偏微分方程式に現れる Sobolev 空間, Besov 空間, およびそれらの上の作用素の研究に就する補間空間の理論がある。

表題について, 我々は,

[I] 作用素が, 定義域および値域の補間空間とどう関りあうか,

又、[II] 種々の作用素イテールの補間空間を考へるとき、
それに属する作用素は如何なる特徴をもつか、

或は、[III] 作用素を特徴付ける種々の特性数則に、補間空間の一つである $\ell_{p,q}$ の性質を応用した作用素の考察、
に注目する。これらに関して、それぞれ

[I] : [7], [11], [19], [22], [26], [27], [28]

[II] : [15], [25]

[III] : [13], [14], [16], [17], [18], [26], [27]

等の結果がある。

こゝでは、こうした観点から、一部の結果の総括と、補間空間論的結果並びに証明の整理を報告する。

§2. 補間空間論的整理

補間空間の一般的事項については [2], [11] 参照。定義を一つすると;

X_i ($i=0, 1$) を可分位相空間 X に連続的に含まれるノルム空間の対 (interpolation pair) とし、

実補間空間 $(X_0, X_1)_{\theta, q}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$,

とは、 $t > 0$

$$K(t, x) := \inf_{\substack{x = x_0 + x_1 \\ x_i \in X_i, i=0, 1}} (\|x_0\|_{X_0} + t \|x_1\|_{X_1}) \quad \text{とし、}$$

$$X_{\theta, q} \equiv (X_0, X_1)_{\theta, q} :=$$

$$\{x \in X_0 + X_1 : \|x\|_{X_{\theta, q}} := \|t^{-\theta} K(t, x)\|_{L^q_t} < \infty\}$$

$$= \text{すなわち } \|f(t)\|_{L^q_t} := \left(\int_0^\infty |f(t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

$$\text{複素補間空間 } [X_0, X_1]_\theta, \quad 0 < \theta < 1$$

とは,

$$\mathcal{F} := \{f(z) : f(z) \text{ は } 0 < \operatorname{Re} z < 1 \text{ で解析的}, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$$

$$\text{で連続な}, f(j+it) \in X_j \ (j=0, 1)\}$$

$$\|f\|_{\mathcal{F}} := \max \left(\sup_{-\infty < t < \infty} \|f(it)\|_{X_0}, \sup_{-\infty < t < \infty} \|f(1+it)\|_{X_1} \right)$$

とし,

$$X_\theta \equiv [X_0, X_1]_\theta := \{x = f(\theta) : f \in \mathcal{F}\}$$

$$\|x\|_{X_\theta} := \inf_{x=f(\theta)} \|f\|_{\mathcal{F}}.$$

このとき, よく知られてゐる結果は次の一連の事実:

$X_0 \subset X_1$ のとき, $X_{\theta, q}$ は位相空間として, 連続的包含関係に関し, θ について単調増加, q についても単調増加, 同様に X_θ も, θ について単調増加。

Th. 1 (作用素の補間性)

$$T \in L(X_\lambda, Y_\lambda) \ (\lambda=0, 1), \quad \|T\|_{L(X_\lambda, Y_\lambda)} = M_\lambda$$

$$\Rightarrow T \in L(X_{\theta, q}, Y_{\theta, q}), \quad \|T\|_{L(X_{\theta, q}, Y_{\theta, q})} \leq C M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

$$\text{又, } T \in L(X_\theta, Y_\theta), \quad \|T\|_{L(X_\theta, Y_\theta)} \leq C M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

(C は正の定数)。

$1 \leq p_i \leq \infty \quad (i=0, 1), \quad 1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ のとき
 $(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta, p} = [L_{p_0}, L_{p_1}]_{\theta} = L_p$ が成立する。

Lorentz 空間 $L_{p, q}$ ($0 < p, q \leq \infty$) は次のように定義される:

$$m_f(\sigma) := \mu(\{x : |f(x)| > \sigma\}),$$

$$f^*(t) := \inf \{\sigma : m_f(\sigma) \leq t\},$$

$$L_{p, q} := \{f : \|t^{1/p} f^*(t)\|_{L_{q, \infty}} < \infty\}.$$

$\|f\|_{L_{p, q}} :=$

のとき,

$0 < p_0 < p_1 \leq \infty, \quad 0 < q \leq \infty, \quad 1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ に
 対して, $(L_{p_0}, L_{p_1})_{\theta, q} = L_{p, q}$ が成立する。

数列 Lorentz 空間 $\ell_{p, q}$ は次のものとする:

$$\ell_{p, q} := \left\{ \{x_i\} \in c_0 : \|\{x_i\}\|_{\ell_{p, q}} := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^{q/p-1} |x_i|^*{}^q \right)^{1/q} < \infty & (q < \infty \text{ のとき}) \\ \sup_i i^{1/p} |x_i|^* < \infty & (q = \infty \text{ のとき}) \end{cases} \right\}$$

ここで $|x_i|^*$ は 数列 $\{|x_i|\}$ の減少列への並べ替えの第 i 項

。

Th. 1 に対し, コンパクト作用素に対する補間法による保存性については, [11] により, 更に拡張した完全な形で

[7] により, 次の定理が証明された:

Th. 2 $T \in L_c(X_i, Y_i)$ (コンパクト作用素全体),

$i=0, 1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ のとき,

$$T \in L_C(X_{\theta, q}, Y_{\theta, q}) .$$

とて

Problem A 作用素の性質 (P) が (如何なる性質 (P) のとき), 定義域, 値域 (か如何なる条件をもてば) の神間空間の間の作用素として, 保たれるか?

: $T \in L_{(P)}(X_i, Y_i)$, $i=0, 1 \Rightarrow T \in L_{(P)}(X_{\theta, q}, Y_{\theta, q})$
となる (P) の条件?, X_i, Y_i の条件?

二の種の問題は, 結果の非常に有用性が予想されるが, 一般的形式では云えない。古くは, Grothendieck [4] で証明された次の結果が起源となる。有界全可測核 $K(x, y)$ (L_∞ で $\sum_{k=1}^n f_k(x) g_k(y)$ で近似される核 $K(x, y)$) による積分作用素 $K: \varphi(x) \longrightarrow \psi(x) := \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy$ は $L_1(0, 1)$ (resp. $L_\infty(0, 1)$) から $L_1(0, 1)$ (resp. $L_\infty(0, 1)$) への核型作用素。したがって, この結果を神間空間論的に広げた, K は又 $L_p(0, 1)$ から $L_p(0, 1)$ ($1 \leq p \leq \infty$) への核型作用素なることが予想される。しかし Pietsch [22] はこの予想を否定的に証明し, 又 Problem A の種類を含む次の結果を得た:

Th. 3 (i) $\forall p, q: 1 \leq p < \infty, 1 < q \leq \infty$

$\exists K: L_p(0, 1) \rightarrow L_q(0, 1)$ s.t. 核型でない。

(ii) $\forall p, q, s: 1 \leq p < \infty, 2 < q \leq \infty, 1 \leq s < q$

$$\exists K \notin \Pi_S(L_p(0,1), L_2(0,1))$$

$$(iii) \quad \forall p, q: 1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq 2$$

$$\forall K: \text{有界全可測核}$$

$$\Rightarrow K \in \Pi_1(L_p(0,1), L_q(0,1))$$

$$(iv) \quad \forall p, q: 1 \leq p < \infty, 2 \leq q < \infty$$

$$\forall K: \text{有界全可測核}$$

$$\Rightarrow K \in \Pi_2(L_p(0,1), L_q(0,1))$$

== 12 $\Pi_p(E, F)$ は E から F への p -absolutely summing operators 全体 (cf. [13], [21], [23])。

Problem A の肯定的な結果として, 次の Th. 4~6 が云え

る:

Th. 4 [19]

$$T \in \Pi_{p,q}(X_i, Y_i), i=0,1,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sigma(t)}{\rho(t)} \right)^r \frac{dt}{t} < \infty \quad \text{---- (1)}$$

$$\Rightarrow T \in \Pi_{p,q}(X_{(\sigma),\infty}, Y_{(\rho),r}).$$

== 13 $\Pi_{p,q}$ は (p,q) -absolutely summing operators 全体

, $\sigma(t), \rho(t)$ は $0 < t < \infty$ の正值可測関数で, $X_{(\sigma),r} :=$

$$\{x \in X_0 + X_1: \left\| \frac{K(t,x)}{\sigma(t)} \right\|_{L_{\sigma}^r} < \infty\}.$$

しかし, 上の定理は, 先に述べた実用的である補間空間

$$(X_0, X_1)_{\theta,q} (\equiv (X_0, X_1)_{(t)_{\theta},q})$$

に対しては (1) の条件が満されないので使えない。

Th. 5 [28]. $1 \leq q \leq \infty$, $0 < p_i < \infty$ ($i=0, 1$),
 $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ($0 < \theta < 1$) $\alpha \leq \beta$,

$$T \in S_{p_i}^{\text{app}}(X_i, Y) \Rightarrow T \in S_p^{\text{app}}(X_{\theta, q}, Y).$$

(S_p^{app} ($\equiv \mathcal{L}^p$: type $\mathcal{L}^p$ の作用素全体) の定義については [17]
 , [24] 参照)。

Th. 6. $1 \leq p_i \leq \infty$ ($i=0, 1$), $1 \leq q \leq \infty$,
 $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ($0 < \theta < 1$) $\alpha \leq \beta$

$$T \in \Pi_{p_i, q}(X, Y_i) \Rightarrow T \in \Pi_{p, q}(X, Y_{\theta}).$$

又, このとき, $\pi_{p, q}(T) \leq C (\pi_{p_0, q}(T))^{1-\theta} (\pi_{p_1, q}(T))^{\theta}$

(C は正の定数) が成立する。

(証) $\forall y \in Y_0 \cap Y_1$ に対して

$$\|y\|_{Y_0} \leq C \|y\|_{Y_0}^{1-\theta} \|y\|_{Y_1}^{\theta} \quad \text{が成立する. } \alpha \leq \beta$$

より知られていゝ ([2]).

したがって $\{x_i\} \subset X$ に対して

$$\|Tx_i\|_{Y_0} \leq C \|Tx_i\|_{Y_0}^{1-\theta} \|Tx_i\|_{Y_1}^{\theta}.$$

これから, Hölder の不等式を用い, $T \in \Pi_{p_i, q}(X, Y_i)$ なる条件から

$$\begin{aligned} \|\{ \|Tx_i\|_{Y_0} \}\|_{\ell_p} &\leq C \|\{ \|Tx_i\|_{Y_0} \}\|_{\ell_{p_0}}^{1-\theta} \cdot \|\{ \|Tx_i\|_{Y_1} \}\|_{\ell_{p_1}}^{\theta} \\ &\leq C (\pi_{p_0, q}(T))^{1-\theta} (\pi_{p_1, q}(T))^{\theta} \sup_{\|x'\| \leq 1} \|\{ \langle x_i, x' \rangle \}\|_{\ell_q}. \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \pi_{p, q}(T) \leq C (\pi_{p_0, q}(T))^{1-\theta} (\pi_{p_1, q}(T))^{\theta}.$$

以上は、序の [I] の種の結果である。

[II] の方向の結果としては、次の Th. 7 ~ 10 がある：

Th. 7 [19]. (Y_0, Y_1) を interpolation pair, $0 < \theta < 1$

とすると $L(X, Y_{\theta, \infty}) \subset (L(X, Y_0), L(X, Y_1))_{\theta, \infty}$.

そして、 $T \in L(X, Y_{\theta, \infty})$ に対し

$$\|T\|_{(L(X, Y_0), L(X, Y_1))_{\theta, \infty}} \leq C \|T\|_{L(X, Y_{\theta, \infty})}$$

(C は正の定数) が成立する。

Th. 8 [25]. $1 \leq p_i \leq \infty$ ($i=0, 1$), $1 \leq q \leq \infty$,

$1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ($0 < \theta < 1$) のとき,

$$[\Pi_{p_0, q}, \Pi_{p_1, q}]_{\theta} \subset \Pi_{p, q} \quad \text{が成立する。}$$

Th. 9 [16]. $1 \leq p_i \leq \infty$, $1 \leq q_i \leq \infty$ ($i=0, 1$),

$1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$, $1/p \leq (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ ($0 < \theta < 1$) のとき,

$$(\Pi_{p_0, q_0; r}, \Pi_{p_1, q_1; r})_{\theta, q} \subset \Pi_{p, q; r} .$$

($\Pi_{p, q; r}$ ($(p, q; r)$ -absolutely summing operator については [4] 参照) .

Th. 10 [25]. H をヒルベルト空間とすると、

$$(i) \quad 1/2 + 1/p \leq 1/q \Rightarrow \Pi_{p, q}(H, H) = L(H, H) .$$

$$(ii) \quad 1/r = 1/2 + 1/p - 1/q > 0, \quad 1 \leq q \leq 2$$

$$\Rightarrow \Pi_{p, q}(H, H) = [L(H, H), N(H, H)]_{1/r}$$

$$(iii) \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad 2 \leq q < \infty, \quad r = 2p/q \Rightarrow$$

$$[L(H, H), N(H, H)]_{1/r} \subset \Pi_{p, q}(H, H) \subset [L(H, H), N(H, H)]_{1/p} .$$

こゝに $N(E, F)$ は $E \rightarrow F$ の核型作用素全体。

[III] の方向の結果の中，核型作用素については次で述べるが，次の Th. は，作用素類と Sobolev 空間の関連の応用例を示唆する。 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ のとき Besov 空間とその次元 $d(\cdot)$ は次のように定義される：

$$B_{p,q}^r(\Omega) := (L_p(\Omega), W_p^N(\Omega))_{r/N, q} \quad (0 < r < N, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty \text{ のとき}),$$

$$B_{\infty,2}^r(\Omega) := (C(\Omega), C^N(\Omega))_{r/N, 2} \quad (0 < r < N, 1 \leq 2 \leq \infty \text{ のとき}),$$

$$d(B_{p,2}^r) := r - \frac{n}{p} \quad \text{のとき}$$

Th. 11 [27]. $\Omega (\subset \mathbb{R}^n)$ が有界, $\partial\Omega \in C^\infty$, S はある条件 (cf. [26] Satz 1) をみたす m -元多様体 ($1 \leq m \leq n$) とすると,

$$(i) \quad d(B_{2,2}^r(\Omega)) > d(B_{2,2}^{r'}(S)) \quad \text{for } r' \geq 0$$

$$(ii) \quad \text{恒等作用素 } I: B_{2,2}^r(\Omega) \rightarrow B_{2,2}^{r'}(S) \text{ は,}$$

$$0 < \beta < \infty, \quad \alpha = \frac{m}{d(B_{2,2}^r(\Omega)) - d(B_{2,2}^{r'}(S))} \quad \text{とすると}$$

き,

$$I \notin S_{\alpha,\beta}^{\text{app}}, \quad I \in S_{\alpha,\infty}^{\text{app}}.$$

Sobolev 空間の恒等作用素 $I: W_p^k(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$ は核型である ([25]) ことを注意しておく。

Sobolev 空間について，次の問題が興味がある： [10] における

る $\mathcal{L}_p$ -space と同様に (ℓ_p を $\ell_{p,q}$ に置きかえて), $\mathcal{L}_{p,q}$ -space を定義するとき,

Problem B. X_i を $\mathcal{L}_{p_i}$ -spaces ($i=0, 1$) とするに,

$(X_0, X_1)_{\theta, q}$ は $\mathcal{L}_{p, q}$ -space になるか? ただし $1/p$

$$= (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1.$$

§ 3. 核型作用素

核型作用素の統一的拡張として Laprénté [9] (or Pietsch [23]) は, 次の (p, r, s) -nuclear operator を定義した:

$T \in L(X, Y)$ は, $0 < p, r, s < \infty$, $1/p + 1/r + 1/s \geq 1$ に対し

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x'_i \otimes y_i \quad \text{--- (2)} \quad x'_i \in X', y_i \in Y$$

s.t. $\{\lambda_i\} \in \ell_p$,

$$A := \sup_{\|x\| \leq 1} \|\{ \langle x, x'_i \rangle \}\|_{\ell_r} < \infty,$$

$$B := \sup_{\|y'\| \leq 1} \|\{ \langle y_i, y' \rangle \}\|_{\ell_s} < \infty,$$

と表わされるとき, (p, r, s) -nuclear といい, 上の作用素全体を $N_{(p, r, s)}(X, Y)$,

$$\nu_{p, r, s}(T) := \inf_{(2)} (\|\{\lambda_i\}\|_{\ell_p} \cdot A \cdot B)$$

と表わす。すると

$$N_{(1, \infty, \infty)} = N(\text{nuclear operators}),$$

$$1 \leq p \leq \infty \text{ のとき } N_{(p, \infty, p')} = N_p \quad (p\text{-nuclear operators}$$

$$[20]), \quad 1/p + 1/p' = 1,$$

$0 < p \leq 1$ のとき, $N_{(p, \infty, \infty)} = N_p$ (Fredholm p -nuclear operators [5]).

我々は, π の p -nuclear operators [20] ($1 \leq p \leq \infty$ のとき) および p -nuclear operators [5] or [12] ($0 < p \leq 1$ のとき) を, それぞれ拡張して [16], [17] において, (p, q) -nuclear operators ($1 \leq p \leq \infty$ のとき), (p, q) -nuclear operators ($0 < p < 1$ のとき) の議論をした。この定義は, 統一的に述べれば,

Def. 1 $0 < p, q, r, s, u, v \leq \infty$ のとき, $T \in L(X, Y)$ が次の形に表わされれば $(p, q), (r, s), (u, v)$ -nuclear operator とする:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x'_i \otimes y_i, \quad x'_i \in X', y_i \in Y, \dots (3)$$

$$\text{o. t. } \{\lambda_i\} \in l_{p, q},$$

$$A' := \sup_{\|x\| \leq 1} \|\{ \langle x, x'_i \rangle \}\|_{l_{r, s}} < \infty,$$

$$B' := \sup_{\|y\| \leq 1} \|\{ \langle y_i, y' \rangle \}\|_{l_{u, v}} < \infty.$$

又, π のような作用素全体を $N_{(p, q), (r, s), (u, v)}(X, Y)$ と表わし, $v_{(p, q), (r, s), (u, v)}(T) := \inf_{(3)} \|\{\lambda_i\}\|_{l_{p, q}} \cdot A' \cdot B'$ とおく。

すると, $1 \leq p, q \leq \infty$ のとき [16] の (p, q) -nuclear operator は $N_{(p, q), (\infty, \infty), (p', q')} = N_{p, q}$ ($1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$) と表わし,

$0 < p < 1$, $0 < q \leq \infty$ のとき [17] の (p, q) -nuclear operator

は $N(p, q), (\infty, \infty), (\infty, \infty) = N_{p, q}$ となる。

又, $1 \leq q < p \leq \infty$, $1/q - 1/p = 1/s$ のとき

$N(\frac{s}{r+1}, s), (p, p), (q', q') = \mathcal{F}_{p, q; r}$ ((l_p, l_q) -r-factorable operators 全体 ([18] 参照)) が [18] の結果から云える。

なお, (p, q) -nuclear operators の諸性質を調べるには, $1 \leq p \leq \infty$ の場合と, $0 < p < 1$ の場合とで, (定義は統一されると思われる) 計算が平行に行われるので, 証明は別々の工夫がいる。([16], [17] 参照)。しかし結果は大体同じ様な形で得られ, その一部を次の形で述べておく:

Th. 12 [16], [17]. $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ のとき,
 $N_{p, q}$ は L の quasi-normed ideal となる。

Th. 13 [16], [17]. $0 < p, q \leq \infty$ のとき, $T \in N_{p, q}$ なるための必要十分条件は $T \in L(X, Y)$ が次の形に分解可能なことである:
 $T = QDP$

o.t. $P \in L(X, l_\infty)$, $Q \in L(l_{p, q}, Y)$, $D \in L(l_\infty, l_{p, q})$ で,
 D はある $\{\lambda_i\} \in l_{p, q}$ による diagonal operator。

Pietsch は [24] で, ヒルベルト空間上の作用素 T の $|T| = (T^*T)^{1/2}$ の固有値の一般化である (Banach 空間上の) 作用素の種々の (singular numbers) s -numbers を組織的に論じ

た。 s -numbers を利用した作用素類の中,

$$S_{p,q}^{app}(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : \{a_n(T)\} \in \ell_{p,q}\},$$

($a_n(T)$ は T の n 次 approximation number)

$$S_{p,q}^{gel}(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : \{b_n(T)\} \in \ell_{p,q}\},$$

($b_n(T)$ は T の n 次 Gelfand number)

$$\alpha_{p,q}(T) := \|\{a_n(T)\}\|_{\ell_{p,q}},$$

$$\beta_{p,q}(T) := \|\{b_n(T)\}\|_{\ell_{p,q}}$$

に關し, Ha [6] の結果の拡張として, 次の Th. を得る:

Th. 14 [17]. $0 < p < 1, p \leq q \leq \infty$ のとき

$$\begin{array}{ccc} N_{p,q}(X,Y) & \subset & N_{p,q}^Q(X,Y) \\ \cup & & \cup \\ S_{p,q}^{app}(X,Y) & \subset & S_{p,q}^{gel}(X,Y) \end{array}$$

なる関係が成立し, 又

$$\nu_{p,q}(T) \leq 2^{1/p - 1/q + 2} \alpha_{p,q}(T) \quad \text{for } \forall T \in S_{p,q}^{app},$$

$$\nu_{p,q}^Q(T) \leq 2^{1/p - 1/q + 2} \beta_{p,q}(T) \quad \text{for } \forall T \in S_{p,q}^{gel}.$$

すなわち $N_{p,q}^Q$ は quasi- (p,q) -nuclear operators 全体で,

この定義および $\nu_{p,q}^Q = 2$ の quasi-norm $\nu_{p,q}^Q(T)$ に關しては, [16], [17] 参照。

(注) $\ell_{p,q} \ni \{s_n\}$ の quasi-norm を取扱うときは, s_n の代りに $s_n' = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$, $\{s_n'\} \in \ell_{p,q}$ の形で取扱う方が quasi-norm の代りに norm として扱えるので便利。ただし

計算がややこしくなる。

§ 4. l_p -空間の間の恒等作用素

この節では, l_p -空間の間の恒等作用素が p の値によって異なる総和作用素となるか, を論究した Bennett の次の結果 ([1]) の証明を神間空間論的に見通しよくする。

Th. 15 [1], [3]. $1 \leq p \leq q \leq 2$ のとき, 恒等作用素 $I: l_p \rightarrow l_q$ は $I \in \Pi_{\frac{2p^2}{p^2-2p+2q}, 1}$ となる。

[1], [3] の証明は Hölder の不等式を何回も用いて, 定義から忠実に, 又数列を組み替へ matrix の神題を用意して説明してある。ここでは, この証明を, 大筋では同じであるが, Th. 6 を用いて整理する。

先づ, 古典的な

$$\begin{aligned} (\text{Orlicz}) \quad I_{l_1 \rightarrow l_1} &\in \Pi_{2,1} \\ \text{又 } 1 \leq p \leq 2 \text{ のとき } I_{l_p \rightarrow l_p} &\in \Pi_{p,1} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

$$(\text{Grothendieck}) \quad I_{l_1 \rightarrow l_2} \in \Pi_{1,1} \quad \dots (5)$$

はよく知られている。

従って, Th. 6 から, $X = l_1, Y_0 = l_1, Y_1 = l_2, 1 \leq p \leq 2,$
 $\theta = 2 - \frac{2}{p}$ とし,

Cor. 1 $1 \leq p \leq 2, r = \frac{2p}{3p-2}$ のとき,

$$I_{l_1 \rightarrow l_p} \in \Pi_{r,1} \quad .$$

これは Kwapien [8] の Th. $1 \leq p \leq \infty$ のとき, $1/r = 1 - |1/p - 1/2|$ とおくと $L(l_1, l_p) = \Pi_{r,1}(l_1, l_p)$ から出る結果でもある。

Th. 6 に対し, 定義域の補間に関する定理:

Problem C. $T \in \Pi_{p_i, q}(X_i, Y)$ ($i=0, 1$), X_i に適当な条件を付けた $\Rightarrow T \in \Pi_{p, q}(X_{0,1}, Y)$?

が解決すれば, Th. 15 の証明は一歩んに片付くが, この Prob. C は未解決。したがって, この部分に当る所は今の所,

Bennett の結果 [1]: $I_{l_p \rightarrow l_2} \in \Pi_{p,1}$ ---- (6)

(これは (5) $I_{l_1 \rightarrow l_2} \in \Pi_{1,1} \subset \Pi_{p,p}$ から導く) を利用する。すると, (4), (6) から再び Th. 6 を用いて,

$$I_{l_p \rightarrow l_2} \in \Pi_{\frac{2p+2q}{p+2q}, 1} \quad \text{が云える。}$$

参考文献

- [1] G. Bennett, Inclusion mappings between l^p - spaces, J. Funct. Anal. 13 (1973), 20 - 27
- [2] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation spaces, Springer, 1976
- [3] B. Carl, Absolut - $(p, 1)$ - summierende identische Operatoren von l_u in l_v , Math. Nachr. 63 (1974), 353 - 360
- [4] A. Grothendieck, La théorie de Fredholm, Bull. Soc. Math. France 84 (1956), 319 - 384

- [5] —————, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16, 1955
- [6] C. W. Ha, Approximation numbers of linear operators and nuclear spaces, J. Math. Analysis Appl. 46 (1974), 292 - 311
- [7] K. Hayakawa, Interpolation by the real method preserves compactness of operators, J. Math. Soc. Japan 21 (1969), 189 - 199
- [8] S. Kwapien, Some remarks on (p, q) - absolutely summing operators in l_p - spaces, Studia Math. 29 (1968), 327 - 337
- [9] J. T. Lapresté, Sur une generalisation de la notion d'opérateurs nucléaires et sommants dans les espaces de Banach, C. R. Acad. Sci. 275 (1972), 45 - 48
- [10] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ - spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968), 275 - 326
- [11] J. L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci Publ. Math., 19 (1964), 5 - 68
- [12] A. S. Markus, Some criteria for the completeness of a system of root vectors of linear operator in a Banach space, Amer. Math. Soc. Transl. 85 (1969), 59 - 91
- [13] K. Miyazaki, p - absolutely summing operators の補間法による一般化, 数理解析研講究全集 136 (1972), 91 - 110
- [14] —————, $(p, q; r)$ - absolutely summing operators, J. Math. Soc. Japan 24 (1972), 341 - 354
- [15] —————, On a theorem of interpolation for Banach spaces of $(p, q; r)$ - absolutely summing operators, Bull. Kyushu Inst. Tech. 20 (1973), 21 - 23

- [16] ————— , (p, q) - nuclear and (p, q) - integral operators,
Hiroshima Math. J., 4 (1974), 99 - 132
- [17] ————— , (p, q) - nuclear operators in case of $0 < p < 1$,
ibid 6 (1976), 555 - 572
- [18] ————— and M. Kato, Factorable operators through a diagonal
operator between l_p - spaces, Bull. Kyushu Inst.
Tech. 24 (1977), 49 - 57
- [19] J. Peetre, Zur Interpolation von Operatorenräumen Arch. Math.
21 (1970), 601 - 608
- [20] A. Persson and A. Pietsch, p - nukleare und p - integrale Abbildungen
in Banachräumen, Studia Math. 33 (1969), 19 - 62
- [21] A. Pietsch, Nuclear locally convex spaces, Springer Verlag,
Berlin - Heidelberg - New York, 1972
- [22] ————— , Gegenbeispiele zur Interpolationstheorie der
nuklearen und absolutsummierenden Operatoren, Arch.
Math. 20 (1969), 65 - 71
- [23] ————— , Theorie der Operatorenideale, Wiss. Beiträge
Fried. - Schiller Univ., 1972
- [24] ————— , S - Numbers of Operators in Banach spaces, Studia
Math. 51 (1974), 201 - 223
- [25] A. Pietsch and H. Triebel, Interpolationstheorie für Banach-ideale
von beschränkten linearen Operatoren, Studia Math.
31 (1968), 95 - 109
- [26] H. Triebel, Über die Verteilung der Approximations - zahlen kompakter
Operatoren in Sobolev Besov Räumen, Inventiones Math.
4 (1967), 275 - 293

- [27] ———— , "Über die Approximationszahlen der Einbettungsoperatoren $J (B_{p,q}^r (\Omega) \longrightarrow B_{p,q}^r (S))$, Arch. Math. 19 (1968), 305 - 312
- [28] ———— , Interpolationseigenschaften von Entropie- und Durchmesseridealen kompakter Operatoren, Studia Math. 34 (1970), 89 - 107