

2-パラメータ最適停止問題に対応する Bellman 方程式の解について

九州大学理学部 田中輝雄 (Teruo Tanaka)

1 序

Markov 過程に対する 1-パラメータの最適停止問題の最適値関数は次の型の Bellman 方程式によって特徴付けられる :

$$f = \max\{g, Tf\}.$$

但し、 g は利得関数、 T は Markov 過程の推移作用素とする。Grigelionis and Shiriyayev [2]、Grigelionis [1]、Shiryayev [8] はこの型の方程式の解や一意性について議論をした。

Mazziotto [7] は bi-Markov 過程を定義し、それに対する 2-パラメータの最適停止問題の最適値関数は次の型の Bellman 方程式によって特徴付けられることを示した :

$$f = \max\{g, T^1 f, T^2 f\} = \max\{g, \max_{i=1,2} T^i f\}. \quad (1)$$

これは、continuous control problem において現われる型である。 T^i については以下で定義する。

ここでは、(1) の解の存在と一意性、最適値関数との関係について考える。

2 定義と問題の定式化

$T = \mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$ (1 点コンパクト化) を時間空間とし、次の半順序関係を持つものとする :

$z = (s, t), z' = (s', t') \in T$ に対して

$$\begin{aligned} z \leq z' & \text{ if and only if } s \leq s', t \leq t', \\ z \leq \infty & \text{ for all } z \in T. \end{aligned}$$

$i = 1, 2$ に対して、 $X^i = (\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathcal{F}_t^i, X^i(t), P_x^i)$ を状態空間 $(E^i, \mathcal{B}^i)$ をもつ互いに独立な 1-パラメータの Markov 過程とする。

Mazziotto [7] に従い bi-Markov 過程を次のように定義する :

- $E = E^1 \times E^2$

- $X(z) = (X^1(s), X^2(t)) \quad z = (s, t) \in \mathbb{N}^2$
- $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2$
- $P_{(x,y)} = P_x^1 \otimes P_y^2, \quad (x, y) \in E$
- $\{\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{T}\}$ を $\{\mathcal{F}_s^1 \otimes \mathcal{F}_t^2, (s, t) \in \mathbb{T}\}$ を含み、完備な σ -field の列とする。

定義 2.1 (1) $\mathbb{T}$ -値確率変数 T が次の条件を満たすとき stopping point であるという : 任意の $z \in \mathbb{T}$ に対して、 $\{T \leq z\} \in \mathcal{F}_z$.

(2) stopping point の列 $\{\sigma_t, t \geq 0\}$ が次の条件を満たすとき strategy であるという :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= z \\ \sigma_{t+1} &= \sigma_t + e_i \text{ for some } i \\ \sigma_{t+1} &\text{ は } \mathcal{F}_{\sigma_t}\text{-可測} \end{aligned}$$

但し、 $e_1 = (1, 0)$ 、 $e_2 = (0, 1)$ 。

(3) strategy $\{\sigma_t\}$ と $\mathcal{F}_{\sigma_t}$ -stopping time τ の組 (σ_t, τ) を tactic であるという。但し、 $\mathcal{F}_{\sigma_t} = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\sigma_t \leq z\} \in \mathcal{F}_z, \forall z\}$ 。

$\bar{\Sigma}$ を

$$P_{(x,y)}(\tau \leq \infty) = 1, \quad \forall (x, y) \in E$$

を満たす tactic 全体、

Σ を

$$P_{(x,y)}(\tau < \infty) = 1, \quad \forall (x, y) \in E$$

を満たす tactic 全体とする。

この時、2 パラメータ最適停止問題とは

$$\begin{aligned} S(x, y) &= E_{(x,y)}[g(X(\sigma_{\tau^*}))] = \sup_{(\sigma_t, \tau) \in \Sigma} E_{(x,y)}[g(X(\sigma_\tau))] \\ \bar{S}(x, y) &= E_{(x,y)}[g(X(\sigma_{\tau^*}))] = \sup_{(\sigma_t, \tau) \in \bar{\Sigma}} E_{(x,y)}[g(X(\sigma_\tau))] \end{aligned}$$

となる $(\sigma_t^*, \tau^*) \in \Sigma$ (resp. $\bar{\Sigma}$) を求めることである。

但し、 $g(X(\infty)) = \limsup_{z \rightarrow \infty} g(X(z))$ 。

T^i を Markov 過程 X^i の推移作用素とすると

$$\begin{aligned} T^1 f(x, y) &= E_{(x,y)}[f(X(1, 0))], \\ T^2 f(x, y) &= E_{(x,y)}[f(X(0, 1))] \end{aligned}$$

が成立する。

3 bi-excessive 関数と最適値関数

$\mathbf{B}$ を $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^2$ -可測な $(-\infty, +\infty]$ -値関数の全体とする。

定義 3.1 $f \in \mathbf{B}$ が次を満たすとき *bi-excessive (with respect to T^1 and T^2)* という：

for all $(x, y) \in E$, $i = 1, 2$, $T^i f(x, y)$ は well defined で

$$T^i f(x, y) \leq f(x, y).$$

定義 3.2 $g \in \mathbf{B}$ とする。bi-excessive 関数 $f \in \mathbf{B}$ が次を満たすとき *smallest bi-excessive majorant of g* という：

$$f \geq g,$$

$h \geq g$ となる任意の bi-excessive 関数 h に対して, $f \leq h$ 。

$Qg = \max\{g, T^1 g, T^2 g\}$ によって Q を定義するとき、

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n g$$

は smallest bi-excessive majorant of g となる。

定理 3.1 g が $E[\sup_z g^-(X(z))] < \infty$ を満たすとする。その時、

(i) S は the smallest bi-excessive majorant of g .

(ii) $S = \bar{S}$.

(iii) $S = \max\{g, T^1 S, T^2 S\}$.

(iv) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n g = \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n g^b$

但し、 $g^b(x, y) = \min\{g(x, y), b\}$ 。

4 方程式 (1) の解について

(1) の解と最適値関数 S が一致するための条件として、 ∞ における条件を与える。

命題 4.1 g が $E[\sup_z g^-(X(z))] < \infty$ 、 $E[\sup_z g^+(X(z))] < \infty$ を満たすとし、 f は $E[\sup_z f^+(X(z))] < \infty$ 、 $E_{(x,y)}[f^-(X(e_i))] < \infty$ を満たす (1) の解とする。

この時、 $S = f$ となるための十分条件は

$$\limsup_z g(X(z)) = \limsup_z f(X(z)). \quad (2)$$

注意 4.1 1-パラメータの最適停止問題の場合は、(2) は必要十分条件である。(see Shiriyayev [8]).

5 方程式 (1) の解の一意性について

Grigelionis [1] が与えた条件のもとで、方程式 (1) の解の一意性を考える。

$G \in \mathcal{B}$ に対して、

$$\begin{aligned}\hat{T}_G f(x, y) &= \max\{T^1 1_G f(x, y), T^2 1_G f(x, y)\} \\ \rho_n(G) &= \sup_{(x, y) \in G} (\hat{T}_G)^n 1(x, y)\end{aligned}$$

とおく。

命題 5.1 f_1 と f_2 を、 $E_{(x, y)}[f^-(X(e_i))] < \infty$ を満たす (1) の解とし、更に、

$$\sup_{(x, y)} |f_1(x, y) - f_2(x, y)| < \infty.$$

を満たす。もし、次を満たす $G \in \mathcal{B}$ が存在すれば、 $f_1 = f_2$ である：

$$\begin{aligned}\rho_n(G) &< 1 \quad \text{for some } n \\ f_1(x, y) &= f_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in E \setminus G,\end{aligned}$$

系 5.1 もし、

$$\sup_{(x, y) \in E} \max\{T^1 1_{E^1}(x, y), T^2 1_{E^2}(x, y)\} < 1$$

ならば、(1) の解は有界可測関数のクラスで一意である。

参考文献

- [1] B.I. Grigelionis. Conditions for the uniqueness of the solution of Bellman's equations. *Litovsk. Matemat. Sbornik*, 8(1968), 47–52.
- [2] B.I. Grigelionis and A.N. Shirayev. On stefan's problem and optimal stopping rules for Markov processes. *Theory Prob. Application*, 11(1966), 541–558.
- [3] U. Krengel and L. Sucheston. Stopping rules and tactics for processes indexed by a directed set. *J. Multivariate Anal.*, 11(1981), 199–229.
- [4] N.L. Lazrieva. Solutions of the Wald–Bellman equation. *Litovsk. Matem. Sbornik*, 19(1974), 79–88.

- [5] A. Mandelbaum. Discrete multi-armed bandits and multi-parameter processes. *Probab.Th.Rel.Fields*, **71**(1986),129–147.
- [6] A. Mandelbaum and R.J. Vanderbei. Optimal stopping and supermartingales over partially ordered sets. *Z.Wahrsch.verw.Geiete*, **57**(1981),253–264.
- [7] G. Mazziotto. Two parameter optimal stopping and bi-Markov processes. *Z.Wahrsch.verw.Geiete*, **69**(1985),99–135.
- [8] A.N. Shiriyayev. *Optimal stopping rules*. Springer-Verlag,Berlin, 1979.