

Multiple Sine Functions

東大・数理 黒川信重 (Nobushige Kurokawa)

§0. 歴史

(1) サイン(正弦)関数 ... アルキメデス, ..., オイラー, ..., テイリクレ, ...
(加法公式) 1748 1840
↓

(2) "2重サイン関数"(名前なし) ... ヘルダー, 新谷
1886 1977
↓

(3) 多重サイン関数 (黒川 1990)

ここでは, (1) における基本的性質として 次の2つを取り
挙げる。簡単のため $S_1(x) = 2 \sin(\pi x)$ とおく。

(1-a) 分布性 (distribution property) = 乗法公式:

$$S_1(Nx) = \prod_{k=0}^{N-1} S_1\left(x + \frac{k}{N}\right),$$

$$\text{とくに} \quad \prod_{k=1}^{N-1} S_1\left(\frac{k}{N}\right) = N.$$

(1-b) テイリクレの定理 ("類数公式"の書き換え):

χ を mod N ($N \geq 2$) の原始偶指標とするとき

その テイリクレ L 関数

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

に対して, $s=0$ は 1 位の零点 z あり

$$L'(0, \chi) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) \log S_1\left(\frac{k}{N}\right).$$

これは, 通常, 関数等式 $L(s, \chi) \leftrightarrow L(1-s, \bar{\chi})$ を通して

$$L(1, \chi) = -\frac{\tau(\chi)}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \bar{\chi}(k) \log S_1\left(\frac{k}{N}\right),$$

$$\tau(\chi) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) e^{2\pi i k/N} \text{ は ガウス和,}$$

と書かれるものと同値である。

(2) において ヘルダ^[2] は “2重サイン関数” と呼ばれる

べき関数を導入し, 新谷^[6] は (ヘルダーを引用して
いなか) 少し変形した “2重サイン関数” を扱った

が, 両者とも記号 $F(z)$ を用いており名前を
付けておらず サイン関数の “2重版” であること

がわかりにくくなっている。新谷は (1-b) の

実2次体の L 関数への拡張を示した。詳しく
は 新谷[6] を参照されたいが, 実2次体 K と
ある型の指標 χ に対して $L'_K(0, \chi)$ が “2重
サイン関数” ($S_2(x, \omega)$ と §3 で書くもの) の $\log$ の

1次系合で表わせることを示した。これは、実2次元の
 群体を構成するというフネッカーの青春の夢(の実2次
 体版)に連なる結果である。

(3) における応用としては次の2つがある：

(3-a) セルバーグ・ゼータ関数のガンマ因子の計算。

(3-b) ゼータ関数やL-関数の特殊値の表示。

詳しくは [3]-[5] (1990年8月発表) を参照されたい。

多重サイン関数の拓殖の道は 次のとおりであり、

この項に解説したい：

$\mathcal{S}_r(x)$: ヘルダー型多重サイン関数

↓

$S_r(x)$: 新谷型多重サイン関数
 (特殊パラメーター)
 (周期)

↓

$S_r(x; \omega_1, \dots, \omega_r)$: 新谷型多重サイン関数
 (一般パラメーター)
 (周期)

§1. ヘルダー型多重サイン関数 $\mathcal{S}_r(x)$

$r \geq 2$ に対し

$$P_r(x) = (1-x) \exp\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^r}{r}\right)$$

とおき、ヘルダー型多重サイン関数 $\mathcal{S}_r(x)$ を

次のように定義する：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_r(x) &= \exp\left(\frac{x^{r-1}}{r-1}\right) \prod_{n=-\infty}^{\infty} {}' P_r\left(\frac{x}{n}\right)^{n^{r-1}} \\
 &= \exp\left(\frac{x^{r-1}}{r-1}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(P_r\left(\frac{x}{n}\right) P_r\left(-\frac{x}{n}\right)^{(-1)^{r-1}}\right)^{n^{r-1}}.
 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_1(x) &= 2 \sin(\pi x) = 2\pi x \prod_{n=-\infty}^{\infty} {}' P_1\left(\frac{x}{n}\right) \\
 &= 2\pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

とある。

たとえば

$$\mathcal{S}_2(x) = e^x \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1 - \frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^n e^{2x} \right\},$$

$$\mathcal{S}_3(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^{n^2} e^{x^2} \right\}$$

である。ハルダ-〔2〕が研究したのは $\mathcal{S}_2(x)$ である。

基本性質 ($r \geq 2$):

① 微分方程式

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{J_r'}{J_r}(x) = \pi x^{r-1} \cot(\pi x), \\ J_r(0) = 1. \end{cases}$$

(b) (代数的微分方程式)

$$\begin{cases} J_r''(x) = (1-x^{r-1}) J_r'(x)^2 J_r(x)^{-1} + (r-1) x^{-1} J_r'(x) \\ \quad - \pi^2 x^{r-1} J_r(x), \\ J_r(0) = 1, \\ J_r'(0) = \begin{cases} 1 & \dots \quad r=2 \\ 0 & \dots \quad r \geq 3. \end{cases} \end{cases}$$

[$r=1$ のときは $J_1''(x) = -\pi^2 J_1(x)$ と 糸糸型になるが, $r \geq 2$ のときは 非糸糸型.]

② 積分表示

$$J_r(x) = \exp \left(\int_0^x \pi t^{r-1} \cot(\pi t) dt \right),$$

$$=: z^{\alpha} \quad \int_0^x \subset \mathbb{C} - \{\pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

③ ガンマ関数の多重版との関係:

“ r 重ガンマ関数” $J_r(x)$ を

$$g_r(x) = \exp\left((-1)^r \frac{x^{r-1}}{2(r-1)}\right) \prod_{n=1}^{\infty} P_r\left(-\frac{x}{n}\right)^{-n^{r-1}}$$

と定義すると

$$S_r(x) = g_r(x)^{(-1)^r} g_r(-x)^{-1}.$$

これは

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \Gamma(1+x)^{-1} \Gamma(1-x)^{-1}$$

というオイラーによる有名な関係式の類似である。

④

周期性: $S_r(x+1) = S_r(x) \times (\text{lower order})$.

分布性:

$$S_r(Nx) = \left\{ S_r(x) S_r\left(x + \frac{1}{N}\right) \cdots S_r\left(x + \frac{N-1}{N}\right) \right\}^{N^{r-1}} \\ \times (\text{lower order}).$$

⑤ 多重対数との関係: $\text{Im}(x) < 0$ のとき

$$S_r(x) = \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(2\pi i)^k}{k!} x^k L_{r-k}^i(e^{-2\pi i x})\right. \\ \left. + \frac{\pi i}{r} x^r + \frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}} \zeta(r)\right) \\ = \exp\left(-\frac{(r-1)!}{(2\pi i)^{r-1}} L_r^i(e^{-2\pi i x}) + (\text{lower order})\right).$$

$\operatorname{Im}(x) \geq 0$ でも同様。こゝで、

$$\operatorname{Li}_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$$

は多重対数。

⑥ セータ関数や L 関数の特殊値の表示:

$$\zeta(3) = \frac{8\pi^2}{7} \log\left(\frac{2^{\frac{1}{4}}}{\mathscr{S}_3(\frac{1}{2})}\right),$$

$$\zeta(5) = \frac{32\pi^4}{93} \log\left(\frac{\mathscr{S}_5(\frac{1}{2}) 2^{11/12}}{\mathscr{S}_3(\frac{1}{2})^{9/14}}\right),$$

⋮

(注: $\mathscr{S}_1(\frac{1}{2})=2$, $\mathscr{S}_2(\frac{1}{2})=\sqrt{2}$, ...))

一般には 帰納的関係式

$$\begin{aligned} \zeta(2m+1) &= (-1)^m \frac{(4\pi)^{2m}}{(2m)!(2^{2m+1}-1)} \log\left(\mathscr{S}_{2m+1}(\frac{1}{2}) 2^{-\frac{1}{4^m}}\right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k} (4^{m-k}-1)}{(2k)!(2^{2m+1}-1)} \zeta(2m-2k+1) \end{aligned}$$

から

$$\zeta(2m+1) = (\text{有理数}) \times \pi^{2m} \times \log\left(\prod_{\substack{k \leq 2m+1 \\ \text{奇数}}} \mathscr{S}_k(\frac{1}{2})^{(\text{有理数})}\right)$$

の形となる。この $\zeta(3)$ の式については 多重サイン関数を用いてはいなかったが オイラー (全集 I-15 巻, p.150, 1772 年) を参照されたい。

こゝに, χ を 原始指標 $\text{mod } N$ ($N \geq 2$) として

$\chi(-1) = (-1)^{r+1}$ とすると, 次のように ディリクレ L 関数の特殊値 $L(r, \chi)$, $L'(1-r, \chi)$ が 多重サイン関数の対数を用いて表示できる:

$$L(2, \chi) = -\frac{2\pi i}{N} \tau(\chi) \log \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\mathcal{S}_2(\frac{k}{N})}{\mathcal{S}_1(\frac{k}{N})^{\frac{k}{N}}} \right)^{\overline{\chi}(k)},$$

$$L'(-1, \chi) = \frac{1}{2} \log \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\mathcal{S}_2(\frac{k}{N})}{\mathcal{S}_1(\frac{k}{N})^{\frac{k}{N}}} \right)^{\chi(k)},$$

$$L(3, \chi) = \frac{2\pi^2}{N} \tau(\chi) \log \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\mathcal{S}_3(\frac{k}{N}) \mathcal{S}_1(\frac{k}{N})^{\frac{k^2}{N^2}}}{\mathcal{S}_2(\frac{k}{N})^{\frac{2k}{N}}} \right)^{\overline{\chi}(k)},$$

$$L'(-2, \chi) = -\frac{1}{2} \log \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\mathcal{S}_3(\frac{k}{N}) \mathcal{S}_1(\frac{k}{N})^{\frac{k^2}{N^2}}}{\mathcal{S}_2(\frac{k}{N})^{\frac{2k}{N}}} \right)^{\chi(k)},$$

---。

§2. 新谷型 多重サイン関数 $S_r(x)$ (特殊パラメータ)

バーンズ型の多重ガンマ関数 $\Gamma_r(x)$ を 多重フルビッツ

$$\begin{aligned} \zeta_r(s, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} r H_n (n+x)^{-s} \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} (n_1 + \dots + n_r + x)^{-s} \end{aligned}$$

を用いて $\Gamma_r(x) = \exp(\zeta'_r(0, x))$ と定義する。基本的性質についてはバーンズ [1] を参照。

たとえば $\Gamma_1(x) = \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$ となる。さらに

新谷型多重サイン関数 $S_r(x)$ (特殊パラメータ) を

$$S_r(x) = \Gamma_r(x)^{-1} \Gamma_r(r-x)^{(-1)^r}$$

と定義する。たとえば $S_1(x) = 2 \sin(\pi x)$ となる。

基本性質 ($r \geq 2$)

$$\textcircled{0} \quad S_r(x) = C_r \prod_{k=1}^r S_k(x)^{c(r,k)},$$

$$C_r = \begin{cases} 1 & \dots r = \text{even} \\ e^{2\zeta'(1-r)} & \dots r = \text{odd} \end{cases},$$

$$c(r,k) = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \binom{k}{l} l^r \in \mathbb{Z}$$

$$(c(r,r) = (-1)^{r-1} (r-1)!, \dots, c(r,1) = 1).$$

$$\textcircled{1} \quad (a) \quad \frac{S'_r}{S_r}(x) = {}_r H_{-x} \pi \cot(\pi x),$$

$$\text{ただし, } {}_r H_{-x} = (-1)^{r-1} \binom{x-1}{r-1}.$$

$$(b) \quad S_r''(x) = (1 - P(x)^{-1}) S_r'(x)^2 S_r(x)^{-1} \\ + P'(x) P(x)^{-1} S_r'(x) - \pi^2 P(x) S_r(x),$$

$$\text{ただし, } P(x) = {}_r H_{-x}.$$

$$(2) \text{ 周期性: } S_r(x+1) = S_r(x) S_{r-1}(x)^{-1}$$

[分布性については より一般に §3 (2) 参照]

(3) 階数 1 の任意のセルバーグ・ゼータ関数のガンマ因子 (単位因子) が多重サイン関数 $S_r(x)$ を通して計算でき, 結果は $M = \Gamma \backslash G / K$ のセルバーグ・ゼータ関数 $Z_M(s)$ のガンマ因子 $\Gamma_M(s)$ と書くと次のとおり:

$$\Gamma_M(s) = \begin{cases} (\Gamma_{2n}(s) \Gamma_{2n}(s+1))^{vol(M)(-1)^{n-1}} & \dots G = SO(1, 2n) \\ \left(\prod_{k=0}^n \Gamma_{2n}(s+k) \binom{n}{k}^2 \right)^{vol(M)(-1)^{n-1}} & \dots G = SU(1, n) \\ \left(\prod_{k=0}^{2n-1} \Gamma_{4n}(s+k) \frac{1}{2n} \binom{2n}{k} \binom{2n}{k+1} \right)^{-vol(M)} & \dots G = Sp(1, n) \\ (\Gamma_{16}(s) \Gamma_{16}(s+1)^{10} \Gamma_{16}(s+2)^{28} \Gamma_{16}(s+3)^{28} \Gamma_{16}(s+4)^{10} \Gamma_{16}(s+5))^{-vol(M)} & \dots G = F_4 \end{cases}$$

$$= \det \left(\sqrt{\Delta_{M'} + p_M^2} + s - p_M \right)^{vol(M)(-1)^{dim(M)/2}}.$$

ここで $\Delta_{M'}$ は コンパクト双対対称空間 $M' = G'/K$ のラプラス作用素。

金建となるのは $Z_M(s)$ の関数等式

$$Z_M(2\rho_M - s) = Z_M(s) \exp\left(\text{vol}(M) \int_0^{s-\rho_M} \mu_M(it) dt\right)$$

($\mu_M(t)$ は プラシエレル 測度) において

$$\exp\left(\int_0^{s-\rho_0} \mu_M(it) dt\right) \stackrel{(\gamma)^{\dim(M)/2}}{=} \begin{cases} S_{2n}(s) S_{2n}(s+1) \cdots G = SO(1, 2n) \\ \prod_{k=0}^n S_{2n}(s+k) \binom{n}{k}^2 \cdots G = SU(1, n) \\ \prod_{k=0}^{2n-1} S_{4n}(s+k)^{\frac{1}{2n} \binom{2n}{k} \binom{2n}{k+1}} \cdots G = Sp(1, n) \\ S_{16}(s) S_{16}(s+1)^{16} S_{16}(s+2)^{28} S_{16}(s+3)^{28} S_{16}(s+4)^{16} S_{16}(s+5) \cdots G = F_4 \end{cases}$$

となることであり、したがって、完備化されたゼータ関数

$\hat{Z}_M(s) = Z_M(s) \Gamma_M(s)$ は 対称的関数等式をみたす:

$$\hat{Z}_M(s) = \hat{Z}_M(2\rho_M - s).$$

同時に、プラシエレル 測度 $\mu_M(t)$ のバッチ数型の新公式も得る。
詳しくは [3]–[5] を参照されたい。

④ ゼータ関数 χ L 関数の特殊値の表示は ③ を通して
§1 と同様である。

§3. 新谷型多重サイン関数 $S_r(x, \omega)$ (一般パラメータ)

パラメータ $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ を“周期”とする 多重
サイン関数 $S_r(x, \underline{\omega}) = S_r(x; \omega_1, \dots, \omega_r)$ を次のように

定義する：

$$S_r(x, \underline{\omega}) = \Gamma_r(x, \underline{\omega})^{-1} \Gamma_r(|\underline{\omega}| - x, \underline{\omega})^{(-1)^r},$$

$$\Gamma_r(x, \underline{\omega}) = \exp\left(\zeta_r'(0, x, \underline{\omega})\right),$$

$$\zeta_r(s, x, \underline{\omega}) = \sum_{\underline{n}=(n_1, \dots, n_r) \geq 0} (\underline{n} \cdot \underline{\omega} + x)^{-s}.$$

ただし、 $\zeta_r(s, x, \underline{\omega})$ は一般パラメータの多重ゼータ関数であり、微分 ζ_r' は $s=1$ に関するものであり、

$\Gamma_r(x, \underline{\omega})$ は一般パラメータの多重ガンマ関数。

たとえば、 $\Gamma_1(x, \omega) = \frac{\Gamma(\frac{x}{\omega})}{\sqrt{2\pi}} \omega^{\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2}}$ あり

$$S_1(x, \omega) = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)$$

となる。なお、 $|\underline{\omega}| = \omega_1 + \dots + \omega_r$ 。また $S_r(x) = S_r(x(1, \dots, 1))$ 。

基本性質

① 周期性： $S_r(x + \omega_i, \underline{\omega}) = S_r(x, \underline{\omega}) S_{r-1}(x, \underline{\omega}(i))^{-1},$

$$\underline{\omega}(i) = (\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \dots, \omega_r).$$

なお $S_0(x, \phi) = -1$, $\Gamma_0(x, \phi) = \frac{1}{x}$, $|\phi| = 0$,

$$\zeta_0(s, x, \phi) = x^{-s} \quad \text{と解釈する。}$$

② 分本性：
(乗法公式) $S_r(Nx, \underline{\omega}) = \prod_{\substack{\underline{k}=(k_1, \dots, k_r) \\ k_i=0, \dots, N-1}} S_r\left(x + \frac{\underline{k} \cdot \underline{\omega}}{N}, \underline{\omega}\right),$

$$\prod_{\substack{\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_i = 0, \dots, N-1}}' S_{\mathbf{r}}\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \underline{\omega}}{N}, \underline{\omega}\right) = N.$$

③ 同次性: ($c > 0$ に対して)

$$S_{\mathbf{r}}(c\mathbf{x}, c\underline{\omega}) = S_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \underline{\omega}).$$

④ ゼータ関数や L 関数の特殊値の表示: §1, §2 の結果の拡張として n 次元実代数体 K の指標 χ に対して $L_K(s, \chi)$ が $s=0$ で 1 位の零点をもつとき ($\Leftrightarrow$ ガンマ因子が $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)^{n-1}$) ある $\alpha_j \in K$ を用いて

$$L'_K(0, \chi) \doteq \sum_j c_j \log S_{\mathbf{r}_j}(\alpha_j, \underline{\omega}_j)$$

の形の有限和表示が得られる。ただし, $\mathbf{r}_j \leq n$.

これは $n=1$ のときは §0 で述べた ディリクレの結果 (1840), $n=2$ のときは 新谷 [6] (1977) の結果の拡張になる。とくに

$$\exp(L'_K(0, \chi)) \doteq \prod_j S_{\mathbf{r}_j}(\alpha_j, \underline{\omega}_j)^{c_j}$$

が 新谷-Stark の仮想乗数の表示を与えている。

§1-§3 の記述から明らかのように 多重サイン関数の特殊値の研究は重要な課題である。

文 献

- [1] E.W. Barnes: "On the theory of the multiple gamma function" Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904) 374-425.
- [2] O. Hölder: "Ueber eine transcendente Function" Göttingen Nachrichten 1886, Nr. 16, pp. 514-522.
- [3] N. Kurokawa: "Multiple sine functions and Selberg zeta functions" Proc. Japan Acad. 67A (1991) 61-64.
- [4] —: "Gamma factors and Plancherel measures" Proc. Japan Acad. 68A (1992) 256-260.
- [5] —: "Multiple zeta functions: an example" Advanced Studies in Pure Math. vol 21 (1992) pp. 219-226
= Proc. of "Zeta Functions in Geometry" (Tokyo, 1990 Aug.) edited by N. Kurokawa and T. Sunada; Kinokuniya, Tokyo.
- [6] T. Shintani: "On a Kronecker limit formula for real quadratic fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977) 167-199.