

有限数列と単体的複体の組合せ論

曰比孝之 (北海道大学)
理学部
Takayuki Hibi

序. 昨今の「数之上げ」の組合せ論における重要な研究対象として, 単体的複体の面の数之上げ, および凸多面体に含まれる格子点の数之上げが挙げられる。前者は Euler の公式 $v - e + f = 2$ に, 後者は Minkowski の「数の幾何」に源を有し, いずれも伝統的な話題であるが, 近年, この両者と可換環論や代数幾何との著しい相互関係が明らかになり, 現在, 欧米諸国では活気に満ちた研究活動が展開されている。本講では, 前者の話題を扱い, 現状を概観したい (cf. [B-K]).

2) 単体的複体の f -列

頂点集合と呼ばれる有限集合 V 上の単体的複体とは, V の部分集合の集合で, 条件 (i) $\{v\} \in \Delta$ ($v \in V$) および (ii) $\sigma \in \Delta$, $\tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$ を満たすものであった。

各 $\sigma \in \Delta$ は Δ の面と呼ばれる。いま $d := \max\{\#\sigma; \sigma \in \Delta\}$ と置き, Δ の次元を $\dim \Delta := d-1$ と定義する。更に, $f_i = f_i(\Delta) := \#\{\sigma \in \Delta; \#\sigma = i+1\}$ ($0 \leq i < d$) とし, $f(\Delta) := (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ を Δ の f -列と呼ぶ。また, 単体的複体 Δ が純であるとは, σ が Δ の極大面であるが $\#\sigma = d$ が成立するときを言う。便宜上, Δ の f -列 $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ から, 公式

$$\sum_{i=0}^d f_{i-1} (x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^d h_i x^{d-i}$$

で ($f_{-1} = 1$ と置く) Δ の h -列 $h(\Delta) := (h_0, h_1, \dots, h_d)$ を定義する。すると,

$$h_0 = 1, h_1 = \#\sigma - d, f_{d-1} = \sum_{i=0}^d h_i$$

である。

周知のように, 単体的複体 Δ には幾何学的実現と呼ばれる図形 $|\Delta|$ が対応する。

たとえば $d=3$ とし, 図-1 および 図-2 の単体的複体 (の

幾何学的実現) を考えると, それらの f -列は $(5, 6, 1)$, $(7, 11, 5)$, h -列は $(1, 2, -1, -1)$, $(1, 4, 0, 0)$ となる。もちろん 図-2 は純であるが, 図-1 は純ではない。

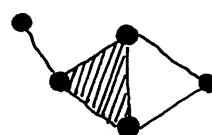


図-1

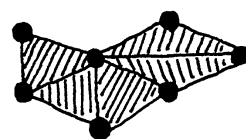


図-2

他方, 体を係数とする Δ の i -次元被約 homology 群を $\tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{Q})$ で表し, $\beta_i = \beta_i(\Delta; \mathbb{Q}) := \dim_{\mathbb{Q}} \tilde{H}_i(\Delta; \mathbb{Q})$ とし, $\beta(\Delta; \mathbb{Q}) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d-1})$ を Δ の Betti 数と呼ぶ。

我々の研究課題は, 単体的複体の著名な類が与えられたとき, その類に属する単体的複体から生起する f -列の組合せ論的特徴付けを探せ — という極めて明確なものである。もちろん f -列を知ることと h -列を知ることとは, 原理的には, 同値である。以下, そのような考察の対象となる単体的複体の類の幾つかを挙げながら既知の結果を紹介したい。

記号の準備であるが, 正の整数 f と i が与えられたとき,

$$f = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \dots + \binom{n_j}{j}$$

$$n_i > n_{i-1} > \dots > n_j \geq j \geq 1$$

なる表示が一意的に存在する。このとき

$$f^{(i)} := \binom{n_i}{i+1} + \binom{n_{i-1}}{i} + \dots + \binom{n_j}{j+1}$$

$$f^{<i>} := \binom{n_i+1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \dots + \binom{n_j+1}{j+1}$$

と定義し, 更に $0^{<i>} = 0$ と置く。

b) Kruskal-Katona の定理

まず, Kruskal [Kru] と Katona [Kat] により, 独立に得られた, 任意の $d-1$ 次元単体的複体から得られる f -列の組合せ論的特徴付けを述べる。

定理 (Kruskal-Katona) 与えられた正の整数を成分とする数列 $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ に対し $d-1$ 次元単体的複体 Δ で $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ となるものが存在するための必要十分条件は $f_{i+1} \leq f_i^{(i+1)}$ ($0 \leq i < d-1$) となることである。

なお, Greene-Kleitman [G-K] は上記の定理とその周辺の話題の優れた survey paper である。

c) 純な単体的複体

純な単体的複体の f -列の特徴付けは, 現在の所, まだ得られていないと信じる。ただし,

定理 ([H₁]) 純な $d-1$ 次元単体的複体 Δ の f -列 $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ は不等式

$$(i) \quad f_i \leq f_{(d-2)-i}, \quad 0 \leq i \leq [(d-2)/2]$$

(ii) $f_0 \leq f_1 \leq \dots \leq f_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}$
を満たす。

d) Cohen-Macaulay 単体的複体

可換環論, 組合せ論として位相幾何学を結び付ける虫工の掛け橋がCohen-Macaulay 複体 [Sta₁] である。なお, Cohen-Macaulay 複体は可換環論的に, また位相幾何学的に定義することが可能である (Reisner [Rei]) が, 以下では, 簡単のため, 後者の定義を採用する。

単体的複体 Δ が体 k 上 Cohen-Macaulay であるとは, Δ の任意の面 σ ($\sigma = \emptyset$ も含む) に対し

$$\tilde{H}_i(\text{link}_{\Delta}(\sigma); k) = 0, \quad \forall i < \dim(\text{link}_{\Delta}(\sigma))$$

が成立することである。ただし,

$$\text{link}_{\Delta}(\sigma) := \{\tau \in \Delta : \sigma \cap \tau = \emptyset, \sigma \cup \tau \in \Delta\}$$

である。たとえば Δ の幾何学的実現が球面や球体であれば, Δ は任意の体上 Cohen-Macaulay である。また, Cohen-Macaulay 複体は純である。

さて, [Sta₂] で述べられている次の定理は, 本質的には, Macaulay [Mac] で既に得られている。

定理 (Macaulay-Stanley) 与えられた整数の数列 $(h_0, h_1, \dots, h_d)$ に対し $d-1$ 次元 Cohen-Macaulay 単体的複体 Δ 2" $h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ となるものが存在するための必要十分条件は (i) $h_0 = 1$ かつ (ii) $0 \leq h_{i+1} \leq h_i^{<i>$ ($1 \leq i < d$) となることである。

可換環論の観点から Cohen-Macaulay 複体を扱った survey paper として [Hoc], [Sta₄], または [H₃], [H₄] がある。

e) matroid 複体

頂点集合 V 上の単体的複体 Δ が matroid 複体であるとは,

(i) $\sigma, \tau \in \Delta, \#(\sigma) < \#(\tau)$ ならば $\sigma \cup \{v\} \in \Delta$ となる $v \in \tau - \sigma$ が存在する,

(ii) $\dim(\Delta - v) = \dim \Delta, \forall v \in V$, ただし $\Delta - v := \{\sigma \in \Delta; v \notin \sigma\}$ である

なる条件が満たされることを言う。

たとえば, V が線型空間の非零な元の有限集合で, V が張る部分空間と $V - \{v\}, \forall v \in V$, が張る部分空間が一致すると仮定し, Δ を V の線型独立な部

分集合の全体とすると Δ は matroid 複体となる。

Björner などの組合せ論家が matroid 複体の f -列に興味を持っているとのことであるが、現状では、matroid 複体の f -列の組合せ論的特徴付けを探求ことは、ちょっと無理な気がする。ただし、Cohen-Macaulay 環の標準 ideal の理論を使うと、次の定理が得られる。

定理 ($[H_2]$) 次元 $d-1$ の matroid 複体 Δ の h -列 $h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ に対し 線型不等式

$$h_0 + h_1 + \dots + h_i \leq h_d + h_{d-1} + \dots + h_{d-i} \quad (0 \leq i \leq d)$$

が成立する。

予想 次元 $d-1$ の matroid 複体 Δ の h -列を $h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ とせよ。このとき

$$(i) \quad h_i \leq h_{d-i} \quad (0 \leq i \leq [d/2])$$

$$(ii) \quad h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{[d/2]}$$

が成立する。

5) 球面の三角形分割

球面の三角形分割の h -列の組合せ論的特徴付けに関しては“球面版 McMullen g -予想”と呼ばれるものがある。

たが, [B-L], [Sta₃] から約10年が経過した1990年7月に Kalai が終止符を打った。

定理 (Kalai) 与えられた整数の数列 $(h_0, h_1, \dots, h_d)$ に対し $d-1$ 次元単体的複体 Δ で

$$(i) \quad h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$$

$$(ii) \quad |\Delta| \simeq d-1 \text{次元球面}$$

となるものが存在するための必要十分条件は

$$(i) \quad h_0 = 1$$

$$(ii) \quad h_i = h_{d-i}, \quad 0 \leq i \leq d$$

$$(iii) \quad 0 \leq h_{i+1} - h_i \leq (h_i - h_{i-1})^{<i>}, \quad 0 \leq i < [d/2]$$

が成立することである。

球面の三角形分割の h -列に関しては [Sta₅] が適切な survey paper である。

9) Buchsbaum 複体の Betti 数列

単体的複体 Δ が体 k 上 Buchsbaum であるとは,
 $\emptyset \neq \sigma \in \Delta$ に対し

$$\tilde{H}_i(\text{link}_{\Delta}(\sigma); k) = 0, \quad \forall i < \dim(\text{link}_{\Delta}(\sigma))$$

が成立し,更に Δ が純であるときを言う。Buchsbbaum複体の f -列に関しては [Sch]などの結果があるが,組合せ論的特徴付けを採することは将来の課題である。ただし, Buchsbbaum複体の Betti 数列の振舞については次の定理がある。

定理 ([B-H]) 与えられた任意の非負整数から成る数列 $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d-1})$ に対し $d-1$ 次元単体的複体 Δ で条件「任意の体 K 上 Δ は Buchsbbaum であって, しかも $\beta(\Delta; K) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{d-1})$ が成立する」を満たすものが存在する。

参 考 文 献

- [B-H] A. Björner and T. Hibi, Betti numbers of Buchsbbaum complexes, Math. Scand., to appear.
- [B-K] A. Björner and G. Kalai, On f -vectors and homology, in "Combinatorial Mathematics," Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 555, 1989, pp. 63-80.
- [B-L] L. Billera and C. Lee, A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f -vectors of simplicial convex polytopes, J. Combin. Theory, Ser. A 31 (1981), 235-255.
- [G-K] C. Greene and D. Kleitman, Proof techniques in the theory of finite sets, in "Studies in Combinatorics" (G.-C. Rota, ed.), The Mathematical Association of Ameraca, Washington, D. C., 1978, pp. 22-79.

- [H₁] T. Hibi, What can be said about pure O-sequences ?, J. Combin. Theory Ser. A 50 (1989), 319-322.
- [H₂] _____, Face number inequalities for matroid complexes and Cohen-Macaulay types of Stanley-Reisner rings of distributive lattices, preprint (January, 1991).
- [H₃] _____, 有限数列と可換環, 第6回可換環論研究集会報告集 (1984年) .
- [H₄] _____, An invitation to enumerative combinatorics via commutative algebra, 数理解析研究所講究録第641巻 (1988年) .
- [Hoc] M. Hochster, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, in "Ring Theory II" (B. R. McDonald and R. Morris, eds.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No. 26, Dekker, New York, 1977, pp. 171-223.
- [Kat] G. Katona, A theorem for finite sets, in "Theory of Graphs" (P. Erdős and G. Katona, eds.), Academic Press, New York, 1968, pp. 187-207.
- [Kru] J. Kruskal, The number of simplices in a complex, in "Mathematical Optimization Techniques" (R. Bellman, ed.), Univ. of California Press, Berkeley/Los Angeles, 1963, pp. 251-278.
- [Mac] F. S. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular system, Proc. London Math. Soc. 26 (1927), 531-555.
- [Rei] G. Reisner, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Advances in Math. 21 (1976), 30-49.
- [Sch] P. Schenzel, On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius, Math. Z. 178 (1981), 125-142.
- [Sta₁] R. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Stud. Appl. Math. 54 (1975), 135-142.
- [Sta₂] _____, Cohen-Macaulay complexes, in "Higher Combinatorics (M. Aigner, ed.), NATO Advanced Study Institute Series, Reidel, Dordrecht/Boston, 1977, pp. 51-62.
- [Sta₃] _____, The number of faces of a simplicial convex polytope, Advances in Math. 35 (1980), 236-238.
- [Sta₄] _____, "Combinatorics and Commutative Algebra," Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart, 1983.
- [Sta₅] _____, The number of faces of simplicial polytopes and spheres, in "Discrete Geometry and Convexity," Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 440, 1986, pp. 212-223.