

中空間の間の写像

東京学芸大学 細川 洋 (Hiroshi Hosokawa)

コンパクトで連結な距離空間を連続体という。ここでは X 及び Y は常に2点以上の点を持つ連続体とし、これらの距離関数を同じ文字 d で表す。

連続体 X の中空間 $C(X)$ とは、集合

$$C(X) = \{K : K \text{ は } X \text{ の空でない部分連続体}\}$$

に、次の式で定義される距離 (ハウスドルフの距離) H_d を入れたものである:

$$H_d(K, L) = \inf \{ \varepsilon : N_\varepsilon(K) \supset L \text{ かつ } N_\varepsilon(L) \supset K \}.$$

ここで、 $N_\varepsilon(K)$ は K の X における ε -近傍である。

$C(X)$ はこの距離で連続体になる。

今 X から Y の上への写像 (写像は常に連続であるとする) $f: X \rightarrow Y$ を考える。 $C(X)$ の元 K に対し、その f による像 $f(K)$ を対応させる $C(X)$ から $C(Y)$ への対応は、連続になる。この写像を $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ と書く。

定義 写像 $f: X \rightarrow Y$ は、 Y への写像で、かつ $C(Y)$ の任意の元 L 及び $f^{-1}(L)$ の任意の連結成分 K に対して常に $f(K)=L$ を満たすとき、コンフルエントであるという。

写像 $f: X \rightarrow Y$ がコンフルエントであることは、写像 $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ がコンフルエントであるための必要条件であるが、十分条件ではない。以下では $C(f)$ がコンフルエントになるための十分条件を考える。

閉区間 $[0, 1]$ と同位相な空間を、連続曲線と呼ぶことにする。

補題 1. 写像 $f: X \rightarrow Y$ がコンフルエントで、 L が $C(Y)$ の中の連続曲線ならば、 $C(f)^{-1}(L)$ の任意の連結成分 K に対し、 $C(f)(K)=L$ である。

この証明は長いので省略する。補題 1 から次のことが容易にわかる。

系 2. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ がコンフルエントとする。

このとき、 $C(Y)$ の任意の弧状連結な部分集合 L 及び、

$C(f)^{-1}(L)$ の任意の連結成分 K に対し、 $C(f)(K)=L$ である。

系 3. 写像 $f: X \rightarrow Y$ がコンフルエントで、 Y が局所連結ならば、 $C(f)$ はコンフルエントである。

証明 Y が局所連結であるから、 $C(Y)$ も局所連結である。

$\mathcal{L}$ を $C(Y)$ の部分連続体、 K を $C(f)^{-1}(\mathcal{L})$ の連結成分とする。 $C(Y)$ は局所連結であるから、次の条件を満たす $C(Y)$ の部分集合の列 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$ が存在する。

(1) 各 $\mathcal{L}_m$ は局所連結な閉集合である。

(2) $\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \mathcal{L}_3 \supset \dots$ 。

(3) $\bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}_m = \mathcal{L}$ 。

各 m に対し、 K を含む $C(f)^{-1}(\mathcal{L}_m)$ の連結成分を K_m とする。系 2 から、 $C(f)(K_m) = \mathcal{L}_m$ である。よって、 $C(f)$ の連続性と $C(f)$ の定義から $C(f)(K) = C(f)(\bigcap K_m) = \bigcap C(f)(K_m) = \bigcap \mathcal{L}_m = \mathcal{L}$ 。

系 3 の Y の条件を弱めるために、次の 3 つの補題を使う。

補題 4. (J. J. Charatonik & W. J. Charatonik)

すべての n について、 Y_n が連続体で $\psi_n: Y_{n+1} \rightarrow Y_n$ がコンフルエントならば、射影 $\varphi_n: \varprojlim \{Y_n, \psi_n\} \rightarrow Y_n$ は

コンフルエントである。

補題 5. (J. J. Charatomik & W. J. Charatomik)

$X = \varprojlim \{X_n, \varphi_n\}$, $Y = \varprojlim \{Y_n, \psi_n\}$, 各 X_n, Y_n は連続体とする。各 n について、写像 $h_n: X_n \rightarrow Y_n$ がコンフルエントで、 $\psi_n \circ h_{n+1} = h_n \circ \varphi_n$ を満たせば、 $\{h_n\}$ で決まる写像 $h_\infty: X \rightarrow Y$ はコンフルエントである。

補題 6. (J. Segal) $Y = \varprojlim \{Y_n, \psi_n\}$, (各 Y_n は連続体), $C_\infty(Y) = \varprojlim \{C(Y_n), C(\psi_n)\}$ とすると $C_\infty(Y)$ と $C(Y)$ は同位相である。

補題 6 の位相写像 $g: C_\infty(Y) \rightarrow C(Y)$ は具体的に
は、 $B = (B_1, B_2, \dots) \in C_\infty(Y)$ に対し、 $g(B) = \varprojlim \{B_n, \psi_n|_{B_{n+1}}\}$
なる写像である。

定理 7. 連続体 Y が

- (1) $Y = \varprojlim \{Y_n, \varphi_n\}$,
- (2) 各 Y_n は局所連結な連続体,
- (3) 各 φ_n はコンフルエント

なる形で表せるとき、任意のコンフルエント写像 $f: X \rightarrow Y$

に対して、 $C(f): C(X) \rightarrow C(Y)$ はコンフルエントである。

証明 補題 6 の位相写像を $g: C_\infty(Y) \rightarrow C(Y)$ とする。

また、各 n に対し、 $p_n: Y \rightarrow Y_n$ を射影とする。コンフルエント写像の合成はコンフルエントであるから、 $p_n \circ f$ はコンフルエントである。各 Y_n は局所連結であるから、系 3 より、 $C(p_n \circ f): C(X) \rightarrow C(Y_n)$ はコンフルエントである。

また、 $C(X)$ と $\varprojlim \{C(X), id\}$ は同一視できるから、

$C(\psi_n) \circ C(p_n \circ f) = C(\psi_n \circ p_n \circ f) = C(p_{n-1} \circ f)$ より補題 5 が適用できて、 $\{C(p_n \circ f)\}$ できる写像 $[C(p_n \circ f)]_\infty: C(X) \rightarrow C_\infty(Y)$ はコンフルエントである。この写像と g の形から、

$C(f) = g \circ [C(p_n \circ f)]_\infty$ であることがわかる。よって $C(f)$ はコンフルエントになる。

中空間 $C(X)$ 内の連続曲線 $\mathcal{A}$ が、 $\mathcal{A}$ 内の任意の元 A_1, A_2 に対し、常に $A_1 \subset A_2$ または $A_2 \subset A_1$ であるとき、 $\mathcal{A}$ を順序弧という。 $T(X) = \{\mathcal{A}: \mathcal{A} \text{ は } C(X) \text{ 内の順序弧}\} \cup \{K: K \in C(X)\}$ とする。 $T(X)$ は $C(C(X))$ の部分連続体である。

写像 $f: X \rightarrow Y$ が、任意の元 $K \in C(X)$ に対し、 $f|K: K \rightarrow f(K)$ はコンフルエント であるとき、遺伝的

にコンフルエントであるという。

定理 8. 上の写像 $f: X \rightarrow Y$ が

(1) コンフルエントであるための必要十分条件は、任意の $\beta \in \mathcal{T}(Y)$, 任意の $L \in \beta$ 及び $f^{-1}(L)$ の任意の連結成分 K に対し、 $K \in \alpha$, $C(f)(\alpha) = \beta$ となる $\mathcal{T}(X)$ の元 α が存在することである。

(2) 遺伝的にコンフルエントであるための必要十分条件は、任意の $\beta \in \mathcal{T}(Y)$, 任意の $L_1, L_2 \in \beta$, 任意の $K_i \in C(f)^{-1}(L_i)$ ($i=1, 2$) に対し、 $K_1 \subset K_2$ ならば $K_1, K_2 \in \alpha$, $C(f)(\alpha) = \beta$ なる $\mathcal{T}(X)$ の元 α が存在することである。