

p-進 L 函数について

京大 理 太田雅己

久保田 - Leopoldt [9] が p-進 L 函数を構成して以後、これについて研究、および一般化が多くの人によってなされてきた。以下はその紹介である。

§1 久保田 - Leopoldt の p-進 L 函数 (Q の場合)。

$\zeta(s)$ を Riemann の zeta 函数とし、Bernoulli 数 B_n ($n=0, 1, \dots$) を $\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$ で定義する。すると $\forall n \in \mathbb{N}$ について

$$(1) \quad \zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n} \in \mathbb{Q}$$

となることは古く知られていた。同様のことは Dirichlet の L 函数についても成り立つ； χ を導き f の原始的 Dirichlet 指標、 $L(s, \chi)$ を対応する Dirichlet の L 函数とする。「- 級 Bernoulli 数」 $B_{n, \chi}$ ($n=0, 1, \dots$) を $\sum_{a=1}^f \frac{\chi(a)t e^{at}}{e^{ft}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n, \chi}}{n!} t^n$ で

定義すると $\forall n \in \mathbb{N}$ について

$$(2) \quad L(1-n, \chi) = -\frac{B_{n, \chi}}{n} \in \mathbb{Q}(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\chi(1), \dots, \chi(f-1)).$$

このことを用いて 久保田 - Leopoldt は $\zeta(s)$ 、 $L(s, \chi)$ の p-

adic な類似物、即ち p -進 ζ 函数を構成した。結果を述べるために言葉を準備する: p を (固定された) 素数、 $\mathbb{Q}_p$ を p -進数体、 $\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の完備化、 $1 \cdot 1$ を $\mathbb{C}_p$ の付値とする。以下 $\mathbb{Q}$ の代数的閉包の $\mathbb{C}_p$ への埋め込みを一つきめて、それで代数的数を $\mathbb{C}_p$ の元と見做す。 $q = p$ (resp.

4) $\text{if } p \geq 3$ (resp. $p = 2$) とおき、($\mathbb{C}_p$ に値をとる) $\text{mod } q$

の Dirichlet 指標 ω を $p \geq 3$ のとき $\omega(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p^n}$ 、 $p = 2$

のとき $\omega(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{if } a \equiv -1 \pmod{4} \\ 0 & \text{if } a \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$ で定める。

定理 1 ([9]) $\mathbb{Q}_p(x) = \mathbb{Q}_p(x(1), \dots, x(p-1))$ - 係数の中組数

$$(3) \quad L_p(s, x) = \frac{a_{-1}}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$$

で次をみたすものが唯一つ存在する。

(i) (3) の右辺の和は $\forall s \in \mathbb{C}_p \text{ s.t. } |s-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}} |q|^{-1}$ で収束する。

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ について

$$(4) \quad L_p(1-n, x) = (1 - (x\omega^{-n})(p) \cdot p^{n-1}) \times \frac{-B_n x \omega^{-n}}{n}$$

(但し、 $x\omega^{-n}$ は $a \mapsto x(a)\omega(a)^{-n}$ 、 $(a, pf) = 1$ に対応する原始指標とした)。

$$(iii) \quad a_{-1} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{p} & \text{if } x = x^0 \stackrel{\text{def}}{=} \text{単位指標} \\ 0 & \text{if } x \neq x^0 \end{cases}$$

注意 1) $L(s, x)$ の函数等式は、 $x(-1) = -1$ ならば

$L_p(s, x) \equiv 0$ (恒等的に 0) となる。— $x(-1) = 1$ ならば

$L_p(\chi, x) \neq 0$.

2) (4) で $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ (resp. $\pmod{2}$) if $p \geq 3$

(resp. $p=2$) なら $L_p(1-n, x) = (1 - \chi(p) \cdot p^{n-1}) L(1-n, x)$

即ち古典的な L 函数の値から p 番目の Euler 因子を除いたものとなっている。この性質と (1) で $L_p(\chi, x)$ は characterize される。

3) (iii) は $\zeta(\chi)$ (resp. $L(\chi, x)$, $x \neq x^0$) が $\chi=1$ で

1 位の極をもつことを除数 $\chi=1$ (resp. $\chi=1$ で正則)、にあたる性質が p -進 L 函数についても成り立ち、ついていることを示している。

4) 定理 1 の証明は $B_{n,\chi}$ の次の p -adically な性質に基づいている ([9] 又は 岩沢 [8]) :

$$B_{n,\chi} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{Rf}} \sum_{a=1}^{p^{Rf}} \chi(a) a^n.$$

§ 2 Leopoldt の p -adic 類数公式

F を $\mathbb{Q}$ の Abel 拡大とする。このとき F の Dedekind zeta 函数 $\zeta_F(\chi)$ は $F/\mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標の L 函数の種となる: $\zeta_F(\chi) = \prod_{\chi} L(\chi, x)$ 。そこで F の p -進 zeta 函数を

$$\zeta_{F,p}(\chi) = \prod_{\chi} L_p(\chi, x)$$

で定義する。ここで勿論積は $\chi \neq 1$ を走る。注意 1) 必ず F が総実の時に限り $\zeta_{F,p}(\chi) \neq 0$ である。

一、 F が (一般の) 総交代体 かつ 古典的互類数公式は

$$\lim_{\Delta \rightarrow 1} (\Delta - 1) \zeta_F(\Delta) = 2^{[F:\mathbb{Q}]-1} h R_\infty / \sqrt{\Delta}$$

となる。ここで Δ , h , R_∞ は各々 F の判別式, 類数, 導数規準とした。Leopoldt [10], [11] は $\zeta_{F,p}(\Delta)$ について類似の公式の成り立つことを示した (或は, これをいうのがむしろのモーターで, ちようである, cf [9] の後の注意 2))。

定理 2 ([10], [11]) F が総交代 $\mathbb{Q}$ 上 Abel の時

$$(5) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 1} (\Delta - 1) \zeta_{F,p}(\Delta) = \prod_x \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \cdot 2^{[F:\mathbb{Q}]-1} h R_p / \sqrt{\Delta}$$

ここで R_p は F の「 p -進導数規準」(cf [10] または [8])。

この定理は $L(1, \chi)$ ($\chi \neq \chi_0$) の表示式の類似である次の結果を用いて証明される。

定理 3 ([11]) $\chi(-1) = 1$, $\chi \neq \chi_0$ のとき

$$L_p(1, \chi) = - \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \log_p(1 - \theta^{-a})$$

ここで θ は (固定された) 1 の原始 f 乗根, $\tau(\chi)$ は Gauss の和: $\tau(\chi) = \sum_{a=1}^f \chi(a) \theta^a$, $\log_p$ は p -adic $\log$ とした。

注意 1) p -進導数規準が一般に 0 でない不変量は解, ではない (Leopoldt 予想)。しかし $F/\mathbb{Q}$ が Abel の時には Brumer により $R_p \neq 0$ が証明されている。従って (5) は trivial な等式: $0=0$ ではない。

2) 非正整数 n なる $\mathbb{Z}_p$ で稠密なことを示す。 $L_p(1, \chi)$ は非正整数 n の値, 即ち一般 Bernoulli 数を用いて p -adic に

近似することとができる。具体的な形については [9], [11] (および §4 の命題) 参照。

§3 一般の総定代数体の p -進 L 函数

[9] 以後色々な研究 (岩沢 [7], Serre [12], Coates - Sinnott [4] 等々) があり、最近 Deligne - Ribet [5], Cassou - Nogues [1] によつて得られた一般の結果を記す。

以下 F を一般の総定代数体、 $\mathfrak{f}$ を F の整 ideal、 χ を導き $\mathfrak{f}$ の F の原始的類指標とする。このとき Hecke の L 函数：

$$L(s, \chi) = \sum \chi(\alpha) N\alpha^{-s} \quad (\text{和は } \mathfrak{f} \text{ と素な } F \text{ の整 ideal } \alpha \text{ を取る, } N \text{ は ideal の絶対 norm.})$$
は全平面に有理型に解析接続され、 $s=1$ 以外が正則である。(1), (2) の一般化として次の結果がある。

定理 4 (Siegel - Klingen [15]) $\forall n \in \mathbb{N}$ について

$$L(1-n, \chi) \in \mathbb{Q}(\chi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\chi(\alpha) \mid \alpha: \mathfrak{f} \text{ と素}).$$

さて、 θ を $\alpha \mapsto \omega(N\alpha)$, $(\alpha, p)=1$ で定まる原始的類指標とする。

定理 5 ([1], [5]) $\mathbb{Z}_p - \{1\}$ 上の $\mathbb{Q}_p$ に値をとる連続函数 $L_p(s, \chi)$ が次をみたすものが唯一存在する；

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ について

$$(6) \quad L_p(1-n, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \mid p} (1 - (\chi\theta^{-n})(\mathfrak{p}) N\mathfrak{p}^{n-1}) L(1-n, \chi\theta^{-n})$$

但し $\chi\theta^{-n}$ の意味は定理 1 (ii) と同様とする。

(ii) 或る条件 $((\Gamma, p\Gamma)=1 \text{ etc. ; 詳しくは [1] を参照})$

をみたす無限に多くの F の整 ideal Γ に對して

$$\Delta \mapsto \left(\chi(\Gamma) \left(\frac{N\Gamma}{\theta(\Gamma)} \right)^{1-\Delta} - 1 \right) L_p(\Delta, \chi)$$

は $\mathbb{Q}_p(\chi)$ 上の「岩沢函数」となる。(岩沢函数については次節で説明する。)

注意 1) (ii) 本定理 1 の (i) および (iii) の後半に与えられた系が得られる。

系 $L_p(\Delta, \chi) = \frac{a_{-1}}{\Delta-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\Delta-1)^n$, $\forall a_n \in \mathbb{Q}_p(\chi)$
と展開され、右辺の和は $\forall \Delta \in \mathbb{Q}_p$ st. $|\Delta-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}} |\Delta|^{-1}$ で収束する。又、 χ が単位指標 χ^0 でなければ $a_{-1} = 0$ 。

2) $\chi = \chi^0$ のとき $L_p(\Delta, \chi^0) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_{F,p}(\Delta)$ は F の p -進 zeta 函数である。これについて (5) と同じく

$$(7) \lim_{\Delta \rightarrow 1} (\Delta-1) \zeta_{F,p}(\Delta) = \frac{\pi}{8|p|} \left(1 - \frac{1}{N_F}\right) 2^{[F:\mathbb{Q}]-1} h R_p / \sqrt{\Delta}$$

となることを予想されている。(cf Coates [2], Serre [13].)

3) [5] は未発表で、筆者は定めているが、Serre [12] の手法 (elliptic modular form を使う) を Hilbert modular form を使って一般化したものらしい。[1] の証明は新谷 [14] による部分 zeta 函数、およびその特殊値の「初等的」表示に基づいている。

§4 岩沢 - Coates 予想

まず前節で言った残した岩沢函数について述べる。 $k \in \mathbb{Q}_p$ の有限次拡大、 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ の整数環とする。不定元 x に属する $\mathcal{O}$ 係数の一変数形式的中級数環 $\mathcal{O}[[x]]$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ 又は単に $\mathcal{L}$ と書く。

定義 $\mathbb{Z}_p$ 上の k に値をとる連続函数 F が (k 上の) 岩沢函数であるとは、次の同値な条件が F について成り立つことをいう。

$$(i) \quad \exists f(x) \in \mathcal{L}_{\mathcal{O}}, \quad \exists u = 1 + \pi \in 1 + \mathfrak{q}\mathbb{Z}_p \text{ s.t. } |\pi| = |\mathfrak{q}|$$

本あり、 $\gamma, F(\gamma) = f(u^{\gamma} - 1)$ となる。

$$(ii) \quad \gamma \mapsto \sum_{i=1}^n a_i u_i^{\gamma} \quad (a_i \in \mathcal{O}, u_i \in 1 + \mathfrak{q}\mathbb{Z}_p, n < \infty)$$

の形の函数が F に一致収束する。

岩沢函数のひとつの特徴づけとして次の結果がある。

命題 (Serre [12]) $F: \mathbb{Z}_p \rightarrow k$ を連続函数とする。

$\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{Z}_p, \lambda_1 \neq 0$ を任意にとり

$$\delta_n = \delta_n(\lambda_0, \lambda_1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(\lambda_0 + (n-i)\lambda_1)$$

と置く ($n \geq 0$)。又、 $c_{i,n} \in \mathbb{Z} \quad (1 \leq i \leq n, n \geq 1)$ を

$$\sum_{i=1}^n c_{i,n} x^i = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

で定める。すると、 F が岩沢函数なら次の (i) (ii) が成り立つ。

$$(i) \quad |\delta_n / q^{n \alpha_{d_F}(\lambda_1)}| \leq 1 \quad (\forall n \geq 0)$$

$$(ii) \left| \sum_{i=1}^n C_{i,n} \delta_i q^{-i} p^{-i \operatorname{ord}_p(\Delta_1)} / n! \right| \leq 1 \quad (\forall n \geq 1)$$

ここで $\operatorname{ord}_p(\cdot)$ は $\operatorname{ord}_p(p) = 1$ とする $\mathbb{Q}_p$ の加法的付値とした。

逆に $\Delta_0 = 0$, $\Delta_1 = 1$ として (i), (ii) が成り立てば F は岩沢函数。

注意 $F = \mathbb{Q}$ のとき、定理 5 と同様の命題を Kummer の合同式と呼ばれる Bernoulli 数の合同式が導かれる。

さて、定理 5 より $L_p(\chi, X)$ は X に関する巾級数の係数に $X = u^A - 1$ を代入して得られるが、ここに関係する巾級数は円分体の整数論と深い関わりをもつ。これに関して、最も著しい予想を最後に述べておく。簡単なため $X = \theta^2$ の場合を考える。

以下 p は奇素数とし、 $F_0 = F(\mu_p)$ ($\mu_n = 1$ の n 乗根のなす群)、 $F_\infty = F(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_{p^n})$ とおく。 $G = \operatorname{Gal}(F_\infty/F)$ とおくと自然な表現：

$$\kappa: G \hookrightarrow \operatorname{Aut}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_{p^n}\right) \cong \mathbb{Z}_p^\times$$

を得られ、 $\mathbb{Z}_p^\times = \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$ に対応して $G = \Delta \times \Gamma$ と分解される。ここで $\Delta \cong \operatorname{Gal}(F_0/F)$ 、 $\Gamma = \operatorname{Gal}(F_\infty/F_0)$ 。 Γ は $1 + p\mathbb{Z}_p$ の指数有限の部分群と同型な $\mathbb{Z}_p$ の加法群と同型である。特に $\exists \sigma \in \Gamma$ があり、 Γ は σ で topological に生成される。以下このような σ を一つきめておく。

$F_n \in \mathbb{Q}^{P^n}$ に対応する F_∞/F_0 の中間体とし、 $A_n \in F_n$ の ideal 類群の p -primary component とする ($n=0, 1, \dots$)。

A_n は自然に $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F_n/F)]$ -module となり、従って

$$\mathcal{X} \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim A_n \quad (\text{norm に關する proj. lim.})$$

は $\varprojlim \mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F_n/F)]$ (制限に關する proj. lim.)-module

となる。これらについて次の事実 ① ~ ③ が知られている。

$$\text{① } \text{訂正 } \star \longleftrightarrow 1+X \quad \text{により} \quad \varprojlim \mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F_n/F)] \\ \cong \mathbb{Z}_p[[\Delta]][[X]]$$

$$\text{② } \mathcal{X} \text{ は有限生成の torsion } \mathbb{Z}_p[[\Delta]][[X]]\text{-module.}$$

次に $i \in \mathbb{Z}$ s.t. $1 \leq i \leq |\Delta|$ に対応して

$$\mathcal{X}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{X} \mid \delta x = \kappa(\delta)^i x \text{ for } \forall \delta \in \Delta\}$$

と置く。① から $\mathcal{X}^{(i)}$ は $\mathbb{Z}_p[[X]] = \bigwedge \mathbb{Z}_p = \bigwedge$ -module となる。

③ $\bigwedge$ -module の完全系列:

$$0 \rightarrow F_1 \rightarrow \mathcal{X}^{(i)} \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{n(i)} \bigwedge / (f_{ij}) \rightarrow F_2 \rightarrow 0$$

が成り、 F_1, F_2 は有限。 $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n(i)} f_{ij}(x)$ と置く。

これは $\bigwedge^x$ -multiple を除いて $\mathcal{X}^{(i)}$ の γ_i を定めた。

予想 ([2] の "Main Conjecture"). $u = \kappa(\theta)$ とし、

$f_i(x)$ を適当にとると

$$(i) \quad f_i(u^p - 1) = L_p(\rho, \theta^{1-i}) \quad \text{for } i = \text{odd}, \neq 1$$

$$(ii) \quad f_1(u^p - 1) = (u^p - u) L_p(\rho, \theta^0)$$

但し θ^0 は単位指標。

これは有限体上の一変数代数函数体の zeta 函数 (の主要部) 本. Tate module の上記の Frobenius の特性多項式として得られることの類似とも見做せる。この予想については次のことが証明されている。

定理 6 (Coates - Lichtenbaum [3]) $F/\mathbb{Q}$ 本 Abel で、

更に次の三条件が成り立つば予想も成り立つ。

(i) $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i: \text{odd}}}^{|\Delta|} A_0^{(i)}$ 本 $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F_0/\mathbb{Q})]$ - module として cyclic (i.e. μ と ω の元で生成される)。

(ii) F_0 の最大実部分体の素点で p をわすものは F_0 で分解しない。

(iii) p は $[F:\mathbb{Q}]$ をわすない。

注意 $F=\mathbb{Q}$ のときこれは岩沢 [6], [7] による結果で、[3] の証明はそれを少し一般化したもの。 $F=\mathbb{Q}$ のときは上の条件 (i) は常に成り立つものと予想されている (岩沢 - Leopoldt 予想)。

尚、以上では専ら総実体の場合を考へた。そうでない場合は類指標に關する L 函数の値の整数での値が全 2π になるからである。 Serre [12] は虚二次体、或は一般の CM 体の場合には (A_0) 型量指標の L 函数の p -adic な類似物を考へることを提案している。實際今の後この方面の研究も色々なされ

2113 のために、ここでは省略する。

文献

- [1] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p -adiques, Inv. Math. 51 (1979) 29-60
- [2] J. Coates, p -adic L -functions and Iwasawa's theory, Durham conference on alg. num. theory and class field theory, (1976) 269-353
- [3] J. Coates, S. Lichtenbaum, On ℓ -adic zeta functions, Ann. of Math. 98 (1973) 498-550
- [4] J. Coates, W. Sinnott, On p -adic L -functions over real quadratic fields, Inv. Math. 25 (1974) 253-279
- [5] P. Deligne, K. Ribet, Values of abelian L -functions at negative integers (in preparation).
- [6] K. Iwasawa, On some modules in the theory of cyclotomic fields, J. Math. Soc. Japan 16, No.1 (1964) 42-82
- [7] K. Iwasawa, On p -adic L -functions, Ann. of Math. 89 (1969) 198-205
- [8] K. Iwasawa, Lectures on p -adic L -functions,

Ann. Math. Studies, 74, Princeton (1972)

- [9] T. Kubota, H. Leopoldt, Eine p -adische Theorie der Zetawerte, J. reine angew. Math. 214/215 (1964) 328-339
- [10] H. Leopoldt, Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, J. reine angew. Math. 209 (1962) 54-71
- [11] H. Leopoldt, Eine p -adische Theorie der Zetawerte II, J. reine angew. Math. 274/275 (1975) 224-239
- [12] J.-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques, in Springer Lecture Notes 350 (1973) 191-268
- [13] J.-P. Serre, Sur le résidu de la fonction zêta p -adique d'un corps de nombres, Comptes Rendus Acad. Sci. 287 Sér. A 183-188
- [14] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 23, No. 2 (1976) 393-417
- [15] C. L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Gött. Nach. 3, 1970, 15-56