

Mordell-Weil lattice と

意味のある代数方程式の新しい系列

立教大理学部 塩田徹治

1. 序

代数方程式 $f(x)$ に対して, n 次の 3 つの概念の関係を思いあてたい. k_0 を 1 つの体とする.

(1) 代数方程式

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$(a_1, \dots, a_n \in k_0)$$

(2) 有限次 Galois 拡大

$$K/k_0$$

(3) $k = \overline{k_0}$ (代数的閉包) と (2). 有限 Galois set

M と Galois equivariant map $s: M \rightarrow k$

これらの関係は, 周知のように次の如くである:

まず (1) から出発すると, (f は分離的として)

$$K = f(x) \text{ の分解体}$$

$$M = \{\text{根 } \alpha_1, \dots, \alpha_n\} \quad s: M \hookrightarrow k$$

と (2), (3) の data が自然に n -重に定まる.

1) 低次の方程式 (1, 2, 3, 4次 概). これは代数的独立の元 $a_1, \dots, a_n$ の影響は殆ど知らない.

2) 一般 n 次方程式

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ の基礎の体, a_i とは $\mathbb{Q}$ 上代数的独立元とす. $f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Q}[X]$,
 $k_0 = \mathbb{Q}(a_1, \dots, a_n)$, α_i は $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする

$$K = k_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$a_i = \alpha_1 \cdots \alpha_n \text{ の } i\text{-次基本対称式}$$

(K は $\mathbb{Q}$ の根の体)

$$\text{Gal}(K/k_0) = \mathfrak{S}_n \quad n\text{-元対称群}$$

$k_0 \subset K$. $K^{\mathfrak{S}_n} = k_0$ である. $\mathbb{Q} \subset k_0 \subset K$

$$\mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Q}[a_1, \dots, a_n]$$

(対称式の基本定理: $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ による)

これは, 25少の変更に加えて, α_1 のみ $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ と置き換える:

$$a_1 = 0 \text{ とし, } a_2, \dots, a_n \text{ は代数的独立元とす}$$

$$\text{よって, } \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0. \quad \alpha_1 \neq 0$$

$$K = k_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{Q}(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(a_2, \dots, a_n)) = \mathfrak{S}_n = W(A_{n-1})$$

$$\mathbb{Q}[\alpha_2, \dots, \alpha_n]^{W(A_{n-1})} = \mathbb{Q}[a_2, \dots, a_n]$$

よって, $W(A_{n-1})$ は A_{n-1} 型の Weyl 群 (cf. Bourbaki, Alg. de Lie ch 4-6). 一般に n 式は, reflection group in $\mathbb{Q}^n$ である Chevalley

の定理の、特別な場合とみなすことができる。

上の 1), 2) とは、趣を異にするが、整数の二次代数方程式の例として。

3) 円分方程式 $x^n = 1$.

2 値方程式 $x^n = a$.

前者は、円分体の理論へ、後者は、巡回拡大の Kummer 拡大の理論へと、入る事。一つの見方では、

これは、乗法群 $\mathbb{G}_m$ の n 等分点 の方程式、あるいは、

n 乗分体の核として、一般化 a の逆像を記述する方程式

と他ならない。この見方から次の 4), 5) は自然な

拡張である。

拡張である。

4) 楕円曲線 (楕円函数) の等分方程式、および isogeny (変換の理論)。

これは、現在にも重要な研究対象である modular 函数, modular curves, およびそれに関連する種々の数論的研究の発祥の地である。(志村吾山: “近代の整数論”, はじめの ^{初版の} 歴史を参照せよ。)

この場合、楕円曲線 E/k_0 の n 等分点の集合 ~~set~~ $E[n] = \{P \in E(k_0) \mid nP = O\}$ は、 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($\cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ if $\text{char}(k_0) \nmid n$) と同型である。単に Galois set ではなく、Galois module であり、Galois 表現

$$\rho: \text{Gal}(k/k_0) \rightarrow \text{Aut}(E(n)) = \text{GL}_2(\mathbb{Z}/n)$$

かより自然から重要な研究対象とあることは、周知の通りである。

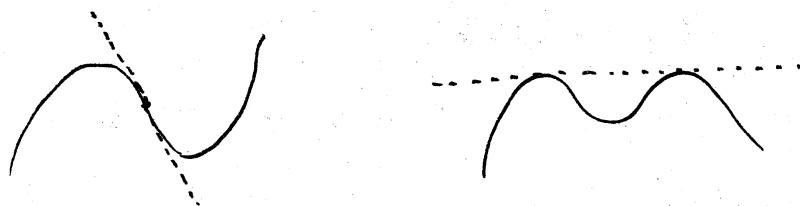
5). 4) の高次之 p -バール多項式への拡張。

これらについて、これ以上ふたつあるから、等分、可分、有限位数の集合を主役で、無限位数のものは、それといふことと注意してあてたい。

以上の 3), 4), 5) とは、少し流石と黒にいて、より幾何学的な観点から、よく研究した古典的の例として。

1) 平面 3 次曲線の 9 の変曲点。

2) 平面 4 次曲線の 28 本の double tangents



1) 3 次曲面 ($\mathbb{CP}^3$) 上の 27 本の lines, がある。

これら有限集合は、曲線の曲面上の点集合 k とする。 $\text{Gal}(k/k_0)$ -set である。群論の初歩から。

(たとえば、Jordan の "算術群論" ~~第 2 巻~~) 群論と Combinatorics の代表的な例として。(算術例以上の点として) 扱われる。

いる。(cf. Weber: Lehrbuch der Algebra; v.d. Waerden: Alg. Geom.)

土 2. 1) は、楯田曲線の 3 分点に他ならず。前記 4) の
 特別な例ともみられる。また 2) は、4 次曲線 (種数 3)
 の ヤコビ群 J の 2 等分点と関係し、従って、内題の
 群は $SL_2(\mathbb{Z}/3)$ または $Sp(6, \mathbb{Z}/2)$ (あるいは、その部分群) 也
 なる。3) は、直線、 P - Q 群の等分点とは使えない。
 これは、より一般に、del Pezzo surface と呼ばれる有理
 曲面上の、第 1 種例外曲線の理論に、~~何らかの~~ 関係がある。
 (cf. Manin: Cubic Forms.) 4) の群は、 $W(E_6)$ 2: 種数
 2 の 非可換単純群 (位数 $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$) を含む。 (the "generic"
 となる。)

従い来れるように、2), 3) は、ある楯田曲線の 無限近
点 の点と関係づけることからでき、その観点から、この古典
 の理論に新しい光をあたえることができる。 (本文末尾、*)

より一般に、我々は、関数体上の楯田曲線の
 Mordell-Weil lattice から、~~自然な~~ finite Galois sets
 および 代数的方程式 を定義するところからでき、その応用
 として、たとえば、① $\mathbb{Q}(t)$ 上 (比較的) 高い rank をもつ
 楯田曲線の構成 (+ explicit basis) や ② "大まかな"
 有限部分表現の構成、③ (特別な場合として) 内分点の
 興味ある拡大、などを得ることができる。

2. Mordell-Weil Lattices.

この理論の詳細は、準備中にある。概略は、

Proc. Japan Acad. 65A (1989) の "Mordell-Weil lattices and Galois representation", I, II, III, 及び、同題の代数幾何学シンポジウム報告集 (1989 夏, 札幌) p442 の note を参照したい。ここでは、その一部を述べる。まず

記号
 k : 任意環の代数体。

$K = k(C)$: k 上の曲线 C の函数体, i.e. 1 変数代数体。

E/K : K 上定義された楕円曲线。ただし、

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$$

$$(a_1, \dots, a_6 \in K)$$

かつ Weierstrass form に表れることにより。

$E(K)$: E の K -有理点の群。

$$= \{ (x, y) \mid \text{上式を満たす } x \in K, y \in K \} \cup \{ O \}.$$

$f: S \rightarrow C$, E/K の Kodaira-Néron model.

(即ち、 S は、 $(k$ 上の) 楕円曲面、 f は、 $\forall$ elliptic fibration π と π の morphism f の generic fibre $= E/K$)

(仮定) f は ≤ 2 個の singular fibre を持つ。即ち

f は non-smooth. (ただし、 E の j -invariant が

$\notin k$ ならば、この仮定が満たされる。これは、必要十分条件)

この仮定の下に. $E(K)$ は. 有限生成の $\mathbb{A}$ -ベクトル空間と見做す (Mordell-Weil の定理) ので. $E(K)$ は M.W. 群とよばれる. $E(K) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus r} + (\text{有限 } \mathbb{A}\text{-ベクトル空間})$ とする $r \geq 0$ を E/K の (Mordell-Weil) rank とする.

$E(K)$ の元. 即ち E の K -有理点. $f: S \rightarrow C$ の section $s: C \rightarrow S$, $f \circ s = \text{id}_C$, と $1:1$ に対応する. $E(K) \ni P$ に対応する section を同じ記号 P で表す. 故に section の像として. S の曲線 (因子) と考えられる. (P) とおく.

代数曲面 S 上の交点理論を用いて. $E(K)$ 上の自然な pairing $E(K) \times E(K) \rightarrow \mathbb{Q}$ を. 次のように定義する: $P, Q \in E(K)$ に対し

$$\langle P, Q \rangle = \chi + (PO) + (QO) - (PQ) - \sum_{v \in R} \text{Contr}_v(P, Q)$$

$$\langle P, P \rangle = 2\chi + 2(PO) - \sum_{v \in R} \text{Contr}_v(P).$$

ここで. χ は. S の arithmetic genus (仮定の下に $\chi > 0$). (PO) は. S 上の因子 (P) と (O) の交点数. (O は. O -section), $(QO), (PQ)$ は. 同様の意味, $\text{Contr}_v(P, Q)$ は. 各 $v \in R$ (すなわち. R は. f の reducible fibres の集合) に対し. $(P), (Q)$ が $f^{-1}(v)$ の $\mathbb{A}$ -既約成分を通る $\mathbb{A}$ -直線による局所的な Contribution ($\in \mathbb{Q}$, ≥ 0), $\text{Contr}_v(P) = \text{Contr}_v(P, P)$.

Th 1. (i) $E(K)/(tor)$ 上の pairing は, $E(K)/(tor)$ 上 =.

正定値な pairing E $v \neq 0$ である.

(ii). $E(K)^0 \subset E(K)$ 上, $\{P \in E(K) \mid (P) \neq 0, \forall v \in R \text{ について, } f^{-1}(v) \text{ の } (0) \text{ と交わる既約成分 } \oplus v_0 \in \text{通る}\}$ により定義すると, $(E(K)^0, \langle, \rangle)$ は, 正定値, even, integral lattice になる. ($[E(K):E(K)^0] < +\infty$).

Def. $E(K)/(tor)$ 上, E/K の Mordell-Weil lattice, $E(K)^0$ 上, narrow Mordell-Weil lattice とよぶ.

一般に, M.W. lattice は, narrow M.W. lattice の dual lattice に含まれるが, 一般には P^2 になる.

以下, S は有理曲面 (すなわち, 1変数代数体 $k(S)$ が k 上の2次元純粋超越拡大) のときと置く. このとき, $f: S \rightarrow C$ に属する (写像) は, 自然に n 次元と見做す. 故に $K = k(t)$.

Th 2 E/K について, S は有理曲面とする. このとき,

$$(i) \quad \gamma = 8 - \sum_{v \in R} (m_v - 1) \leq 8, \quad \left(m_v = \# \text{imed. comp. of } f^{-1}(v), v \in R \right)$$

$$(ii) \quad L = E(K)^0 \text{ である.}$$

$$\begin{array}{ccc} E(K)/(tor) & \cong & L^* = L \text{ の dual lattice} \\ \uparrow & & \cup \quad] \text{ index } v \\ E(K)^0 & \cong & L \end{array}$$

$$\nu = \det L = \det T / n^2, (T \text{ は "trivial lattice".})$$

$$(iii) n^2 = |E(K)_{\text{tot}}|^2 \mid \det T = \prod_{v \in R} m_v^{(1)}, \quad (m_v^{(1)} = \# \text{ simple irred. comp. of } f^{-1}(v))$$

(Tの定義は省略する. 可及な singular fibres $f^{-1}(v)$

($v \in R$) のタイプは完全なまま残るものである.)

Th 3. (構造定理). 上の仮定の下には.

$$(i) \gamma = 8 \iff R = \emptyset, \text{ なるとき}$$

$$E(K) = E(K)^{\circ} \simeq E_8.$$

右辺は. E_8 型の root lattice, かつ 8 の正定値, even integral かつ $\det = 1$ なる (unique) lattice である.

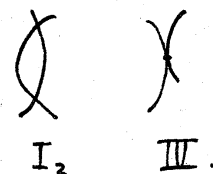
$$(ii) \gamma = 7 \iff R = \{v\} (1), m_v = 2. \text{ (type } I_2 \text{ 又は III, 即ち. 2本の } \mathbb{P}^1 \text{ が, 2点で交わり, 1点で接する)}$$

なるとき.

$$E(K) \simeq E_7^*$$

$$\cup \quad \cup \quad \text{index 2}$$

$$E(K)^{\circ} \simeq E_7$$



$$(iii) \gamma = 6 \iff \begin{cases} a) R = \{v\} (1), m_v = 3. \\ b) R = \{v, v'\} (2), m_v = m_{v'} = 2. \end{cases}$$

$R = \{v\}$ なるときは. type I_3 又は. IV である. 3本の $\mathbb{P}^1$ が, 互いに2点 singular fibre $f^{-1}(v)$ なる点で交わる.

なるとき

$$E(K) \simeq E_6^*$$

$$\cup \quad \cup \quad \text{index 3}$$

$$E(K)^{\circ} \simeq E_6$$

$$D_6^*$$

$$\cup \quad \text{index 4.}$$

$$D_6$$

etc.

」

こゝに 列挙した root lattices $E_8, E_7, E_6, \dots$ などには
 非零の Δ 値を分ける lattice 2: $\Delta < 1$ は 下表のよう
 な data を与えている。 (cf. Bourbaki (前出), 212
 Conway - Sloane: "Sphere packings, lattices, & Groups".)

	E_8	E_7	E_7^*	E_6	E_6^*
det	1	2	$1/2$	3	$1/3$
min. norm	2	2	$3/2$	2	$4/3$
# min. vectors	240	126	56	72	54
Aut	$W(E_8)$	$W(E_7)$		$W(E_6)\{\pm 1\}$	

± には、こゝの lattice の各々は、minimal vectors
 の中から、生成元をとることができる。この事実を、

上の Th. 3 により、Mordell-Weil lattices に適用すると、
 $E(K)$ の生成元についての重要な情報を与える。

E/K への Weierstrass form を与えているときは、

± には、具体的結果を得る。簡単なため、 $\text{char}(k) \neq 2, 3$ とし、

$$E : y^2 = x^3 + p(t)x + q(t),$$

$$p(t) \in k[t], \quad q(t) \in k[t], \quad \deg p \leq 4, \deg q \leq 6$$

とする。Th. 2 (ii), (iii) の v と $t = \infty$ と Δ_3, Δ_2 などとは

する (即ち $f^{-1}(\infty)$ は reducible fiber とする)。このとき、

Th. 4. (Min. vectors & generators)

(i). $r = 8$ のとき. $\langle P, P \rangle = 2$ なる $P \in E(K)$ は 240 個存在し. $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{F}_3$ による $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ による. $P = (x, y)$

$$x = gt^2 + at + b, \quad y = ht^3 + ct^2 + dt + e$$

$$(g, h, a, b, c, d, e \in k)$$

(ii) $r = 7$ のとき. $\langle P, P \rangle = \frac{3}{2}$ なる P は 56 個存在し. $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{F}_2$ による: $P = (x, y)$,

$$x = at + b, \quad y = ct^2 + dt + e$$

(iii) $r = 6$, E_6^* のとき $\langle P, P \rangle = \frac{4}{3}$ なる P は 54 個存在し. (ii) と (i) の $\mathbb{F}_3$ による $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ による.

よって上の場合も. Mordell-Weil 群 $E(K)$ は. 上の形の r 個の基底により生成される.

3. Mordell-Weil lattice から生ずる代数方程式

今度は k_0 を任意の体とし. $k = \overline{k_0}$ を代数的閉包とする. C は k_0 上定義された曲線, $k_0(C)$ はその函数体. $K = k(C)$, E は $k_0(C)$ 上定義された楕円曲線とし. Mordell-Weil lattice $E(K)/(\text{tors})$ を $E(K)^\circ$ と表す.

が $\text{Gal}(k/k_0)$ は. 自然に $E(K)$ に作用し, しかも pairing $\langle, \rangle$ は $\text{Gal}(k/k_0)$ -不変であることから. 表現

$$\rho: \text{Gal}(k/k_0) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(E(K)^\circ) (= \text{有限群})$$

を得る. 故に $\mathbb{Q}/k_0$ は $\text{Ker}(p)$ に対応するものとする.
 言い換えれば. $\mathbb{Q}$ は $E(k(C)) = E(\mathbb{Q}(C))$ とする最小
 の拡大は $\text{Gal}(\mathbb{Q}/k_0) \subseteq \text{Aut}_{k_0}(E(k)^0)$ とする.

ガロア表現 ρ の像 $\text{Im}(\rho)$ については. ① $\text{Im}(\rho)$ は大
 部分. 全体 G のとき, ② $\text{Im}(\rho)$ は小. 部分 $\text{Im}(\rho) = \{1\}$ のとき,
 よび ③ $\mathbb{Q}$ の外 $\mathbb{Q}$ のとき. 元々の面白さがある.

これはとわかく. 代数方程式を定義するに. §1
 の記号で. 有限 Galois set $M \subset E(k)$ を定義したとき.
 この場合. 多様体 M の性質がわかる. 本質は

$$M_n = \{P \in E(k) \mid \langle P, P \rangle = n\}. \quad (n > 0)$$

と n . $n_0 = \min. \text{norm}$ に対する M_{n_0} は重要である.

$\mathbb{Q}_n = k_0(P \mid P \in M_n)$ とよ. c. c. $\mathbb{Q}_n \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_n/k_0$ が
 拡大であり. M_n が $\mathbb{Q}$ の有理点 P である. $\mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}$.

これは. Galois equivariant map $S: M \rightarrow k$ として.
 Specialization homomorphism sp_v の M への写像と
 してとらえる. sp_v

$$sp_v: E(k) \rightarrow G_a(k) \text{ 又は } G_m(k)$$

は. 各 v ($f^{-1}(v)$ は sing. fibre) に対して. 定義した homo.

$$sp_v: E(k) \rightarrow f^{-1}(v)^\# = \text{smooth part of } f^{-1}(v)$$

$$P \mapsto (P) \cap f^{-1}(v)$$

と. $f^{-1}(v)^\#$ の単位元成分 G_a 又は G_m への "射影" との合成である.

上のよりに. $E/k_0(C)$, $M \subset E(K)$, v を定めると.

$$\Phi(X) = \prod_{P \in M} (X - sp'_v(P)) \in k_0[X]$$

この次数 $= \#M$ の k_0 係数多項式が得られる. したがって, 我々の提唱する 代数方程式 である.

具体的な例をとって. その“意義”を考えてみる. 今.

$$(E_8) \quad y^2 = x^3 + x(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3) + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + t^5)$$

$$(E_7) \quad y^2 = x^3 + x(p_0 + p_1 t + t^3) + (q_0 + q_1 t + \dots + q_4 t^4)$$

$$(E_6) \quad y^2 = x^3 + x(p_0 + p_1 t + p_2 t^2) + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + t^4).$$

$\in k_0(t) = \mathbb{Q}(p_i, q_j)(t)$ 上の楕円曲線と考える. これは rational double points とよばれる特異点の universal deformation として知られる family である. p_i, q_j は $\mathbb{Q}$ 上代数的独立とする. $k = \overline{k_0}$ とすると.

Mordell-Weil lattice $E(K)$ は. 時々 E_8, E_7^*, E_6^* と同型になる. (Th. 3 参照). その理由は. 対応する楕円曲面 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ が. (E_8) の場合. 可約 fibre をもたず ($R = \emptyset$), $(E_7), (E_6)$ のときは. 時々. 唯一つの可約 fibre $f^{-1}(\infty)$ をもち. そのタイプは. III あるいは IV である (= とか容易に分る) からである. $M \subset E(K)$ として. min. norm をもつ P の集合をとる. Th 4 の記号を用いて, $sp'_\infty(P)$ は. 次のように

としよう。

$$\text{Lemma. } sp_{\infty}'(P) = \begin{cases} \frac{g}{h} & r=8 \text{ かつ } z \neq \\ -c & r=7 \\ \pm a & r=6 \end{cases}$$

このようにして、 $sp_{\infty}'(P)$ は (E_r) 型の "基本方程式"

$$\Phi_{E_r}(X) = \prod_{P \in M} (X - sp_{\infty}'(P)) \in k_0[X]$$

$$\deg \Phi_{E_8} = 240, \quad \deg \Phi_{E_7} = 56, \quad \deg \Phi_{E_6} = 54$$

を得る。ここで、 Φ_{E_8}, Φ_{E_7} は、定数係数、 X^2 の多項式と

なり、 Φ_{E_6} は $\Phi(X) \cdot \Phi(-X)$, $\deg \Phi = 27$, と分解する。

Th. $\Phi_{E_8}, \Phi_{E_7}, \Phi_{E_6}$ は、 $\mathbb{Q}[p_i, q_j][X]$ (あるいは
より強く、 $\mathbb{Z}[p_i, q_j][X]$) に属する既約多項式で、

その Galois 群は、 $W(E_8), W(E_7), W(E_6)$ 全体に

等しい。(§1. の (34.2) と比較せよ。)

さらに上の lemma と、 sp_{∞}' は group homo. である
(定数は、今の場合は sp_{∞}' は group isom. になる!) により

これは "基本方程式" を explicit に求めることができる。

これは、 (E_8) , etc. の定義式に現れる係数 p_i, q_j は、

Weyl 群 $W(E_8)$, etc. の基本不変式として、具体的に

書き表わされることを意味している。

$$(+) \quad p_i, q_j = I_w(u_1, \dots, u_r) \quad (u_i = sp_{\infty}'(P_i), 1 \leq i \leq r).$$

4. 本問として, $\mathbb{Q}(t)$ 上 比較的高い rank をもつ 楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(t)$ を, Mordell-Weil 群 $E(\mathbb{Q}(t))$ の 生成元 とともに, 構成する方法 を述べる. (実は, $\mathbb{Q}$ の代りに,

より大きな体 F としてもよい. (標数 $\neq 2, 3$, 他有限 $\cap p \nmid \text{rank}$)

仮に, $u_1, \dots, u_8$ が E_8 -lattice の 基本 root とするとき, 240 の 全 2 の roots $u_i \in \mathbb{Z}$, $u_1, \dots, u_8$ の $\mathbb{Z}$ -125 集合と表す. 之に, $\delta(u) = \prod_{i < j} (u_i - u_j)$ と $u_1, \dots, u_8$ の 対称式と与える. 2-2 とき

$\text{Th}(E_8)$. 任意の $(u_1, \dots, u_8) \in \mathbb{Q}^8$ に対し $\delta(u) \neq 0$ ならば $a \in \mathbb{Q}$ として $p_i, q_j \in \mathbb{Q}$ と, 基本方程式 $\Phi_{E_8}(x)$ の (4): "根と係数の関係" を定める. このとき, 式 (E_8) で定義した楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(t)$ は, $\text{rank } r = 8$ であり, その Mordell-Weil 群の生成元として, $P_i (1 \leq i \leq 8)$

$$P_i: \begin{cases} x = u_i^{-2} t^2 + a_i t + b_i \\ y = u_i^{-3} t^3 + c_i t^2 + d_i t + e_i \end{cases}$$

から与える. 2-2 とき $u_i (1 \leq i \leq 8)$ は, 1-2 とき, 任意に与えられた値であり, 他の $a_i, \dots, e_i$ は, $u_1, \dots, u_8$ から有理的に定まるものである.

同様の Th は $(E_7), (E_6)$ においても, 幾つかの他のルートの型についても成立する. しかも, 2-2 とき, 定例を構成するにも, 十分な algorithm を与えられる.

以上の詳細は、目下準備中^{*}にある。

また“大まか” Galois 表現 (或いは 拡大) の本構成,
 とその他応用について (他日) に譲りたい。

(以上)

*) “Construction of elliptic curves with
 high rank via the invariants of the Weyl groups.”

*) §1. 例 (a), (b) との度連について。 $E/K = k(t)$ を
 Th. 3 のように、 $E(K) \cong E_8, E_7^*$ また E_6^* となる場合には、
 対応する楕円曲面 S がある。 $d = 9 - r$ ($= 1, 2$ また 3) の
 (第1種) 例外曲面 Σ を、つぎの如くに blow down すると r により、
 degree d の del Pezzo 曲面 V になる。 $r = 6, d = 3$ の
 ときは、 V は、 $\mathbb{P}^3$ の 3 次曲面になる。 $r = 7, d = 2$ のときは、
 canonical map $|K_V| : V \rightarrow \mathbb{P}^2$ は、2 次の写像 v である。
 これは、 $\mathbb{P}^2$ の 4 次曲線に沿ってある。 以下の場合にも、
 $\langle K_V \rangle^\perp (\subset NS(V))$ は、narrow M.W. lattice $E(K)^\circ$ と同型
 になる。(pairing の符号を反対にする)。 V 上の第1種例外曲線
 は、 $E(K)$ の minimal vectors として ($r = 6$ のときは、その半分
 と (2) 完全に対応付けられる。 よって、例 (a), (b) は、Mordell-
 Weil lattices の理論の枠^{より}でよく理解され、 $r \leq n$ 、 $sp : M \rightarrow k$
 なる写像は、古典的理論では、必ずしも明らかでない。

と、いっているのは少々言ひ違ひであって、昔の数学者の知識は素晴らしい。del Pezzo surface の理論では、cuspidal cubic と、その上の座標 (つまり $\mathbb{C}_a$ の相当物) と (同) になっている。(cf. Demazure, SLN.777. に現代の解説がある.) L. 1. elliptic surface にあたる specialization map Sp_v は、はるかに分かり易くなっている、といふようにある。

例々々のことは、上のような del Pezzo surfaces と、その上の d 次元の外曲面 ($d=1, 2, 3$ に限って、それぞれ 240, 58, 27 個存在) と具体的に構成することから来る、と云々。その上への W 群の作用をみることから来る。さらに、 $(\mathbb{C}_a)$ の d 次元の外曲面が $\mathbb{Q}$ 上定義されるように、del Pezzo surfaces の実例を与えることもできる。

(以上)