

コンパクト底空間をもったデファイナブル G ファイバー束

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、ファイバー束のホモトピー性質を実数体の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \dots)$ に拡張することを目的とする。また、 $\mathcal{M}$ 上において、同変 G ベクトル束のホモトピー性質も考察する。デファイナブル集合は、パラメータつきでデファイナブルとなる集合を意味するとする。

このような構造 $\mathcal{M}$ は、[9] により、非可算無限個存在することが知られている。もっと一般的に実閉体上でも議論することができるが、ここでは、 $\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] などに性質がまとめられている。

2. ファイバー束

Hausdorff 空間 G が位相群とは、 G が群であって、その演算 $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$ が連続となることである。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 57R22, 57S10, 03C64.

Keywords and Phrases. 順序極小構造, ベクトル束, ファイバー束, デファイナブル群, デファイナブルファイバー束, デファイナブル G ベクトル束.

G を位相群、 F を位相空間とする。 F が G 空間とは、 F が G の連続群作用 $\phi: G \times F \rightarrow F$ をもつことである。ここでは、 $\phi(g, x)$ を gx と書く。 G の F への作用が効果的とは、任意に $g, g' \in G$ をとるとき、任意の $f \in F$ に対して、 $gf = g'f$ ならば、 $g = g'$ となることである。

定義 2.1. 位相空間 E, X , 位相群 K , K の効果的作用をもった位相空間 F と全射連続写像 $p: E \rightarrow X$ の五つの組 $\eta = (E, p, X, F, K)$ がファイバー束とは、次の二つの条件を満たすことである。

(1) X の開被覆 $\{U_i\}$ と同相写像 $\phi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ が存在して、 $p = p_{U_i} \circ \phi_i$ となる。ただし、 $p_{U_i}: U_i \times F \rightarrow U_i$ を射影とする。

(2) $p_i: U_i \times F \rightarrow F$ を射影とし、 $x \in U_i$ に対して、 $\phi_{i,x}: p^{-1}(x) \rightarrow F$ を $\phi_{i,x}(z) = p_i \circ \phi_i(z)$ と定義する。 $x \in U_i \cap U_j$ に対して、 $\theta_{ji} := \phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}$ とするとき、 $\theta_{ji} \in K$ かつ $\theta_{ji}: U_i \cap U_j \rightarrow K$ が連続である。

このとき、 E を全空間、 X を底空間、 p を射影、 F をファイバー、 K を構造群といい、 $\{\phi_i, U_i\}$ を局所自明化という。

定義 2.2. $\eta = (E, p, X, F, K), \eta' = (E', p', X', F, K)$ をファイバー束とする。

(1) 連続写像 $\bar{f}: E \rightarrow E'$ がファイバー束写像とは、以下の二つの条件を満たすことである。

(a) 連続写像 $f: X \rightarrow X'$ が存在して、 $f \circ p = p' \circ \bar{f}$ となる。

(b) $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}, \{\phi'_\mu, V'_\mu\}$ をそれぞれ η, η' の局所自明化とする。 $U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \neq \emptyset$ となる任意の α, μ に対して、 $f_{\mu\alpha}(x) = \phi'_{\mu, f(x)} \circ \bar{f} \circ \phi_{\alpha, x}^{-1}$ とするとき、 $f_{\mu\alpha} \in K$ かつ $f_{\mu\alpha}: U_\alpha \cap f^{-1}(V'_\mu) \rightarrow K$ が連続である。

(2) ファイバー束写像 $\bar{f}: E \rightarrow E'$ がファイバー束同値写像とは、 $\bar{f}$ と f が同相写像であって、 $(\bar{f})^{-1}$ もファイバー束写像であることである。

(3) ファイバー束同値写像 $\bar{f}: E \rightarrow E'$ がファイバー束同型写像とは、 $X = X', f = id_X$ であることである。

連続写像 $f, h: X \rightarrow Y$ がホモトピックとは、連続写像 $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、 $H(x, 0) = f(x)$ かつ $H(x, 1) = h(x)$ となることである。

定理 2.3 ([8]). $\eta = (E, p, X, F, K)$ をパラコンパクト空間上のファイバー束とし、 $f, h: Y \rightarrow X$ をパラコンパクト空間の間のホモトピックな連続写像とする。このとき、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はファイバー束同型である。

3. デファイナブルファイバー束

定義 3.1. (1) デファイナブル集合 G がデファイナブル群とは、 G が群であって、その演算 $G \times G \rightarrow G, G \rightarrow G$ が連続デファイナブル写像となることである。

(2) $O(n)$ を n 次直交群とする。群準同型写像 $G \rightarrow O(n)$ が連続デファイナブル写像となるとき、これを表現写像という。この群準同型写像から導かれた G 作用をもった $\mathbb{R}^n$ を G の表現という。

(3) G の表現の G 不変デファイナブル部分集合をデファイナブル G 集合という。

(4) Y をデファイナブル集合とする。 Y がデファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合とは、連続群作用 $G \times Y \rightarrow Y$ が存在して、デファイナブルとなることである。

セミアルジェブリック空間 ([1]) の拡張として、デファイナブル空間 ([2]) を考えることができる。

デファイナブルファイバー束 ([7]) は、 E をデファイナブル空間、 X をデファイナブル集合、開被覆を有限デファイナブル開被覆、同相写像をデファイナブル同相写像と定義すればよい。デファイナブル束写像、デファイナブル束同値写像、デファイナブル束同型写像、引き戻し束を定義することができる。ここでは、デファイナブル写像は連続とする。

定理 3.2 ([7]). $\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブルファイバー束とし、 $f, h: Y \rightarrow X$ をホモトピックな連続デファイナブル写像とする。 Y がコンパクトならば、引き戻し束 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル束同型である。

定理 3.1 において、 Y がコンパクトであるという条件は、除けるかもしれない。また、[5] より、 f と h はデファイナブルホモトピックとなる。つまり、連続デファイナブル写像 $H: Y \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在して、任意の $x \in Y$ に対して、 $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = h(x)$ となる。

問題 3.3. (1) 定理 3.2 において、 Y のコンパクトの条件を除けないか？

(2) X と Y をデファイナブル空間に拡張できないか？

(3) 実数体の順序極小構造から、一般の実閉体の順序極小構造についての結果に拡張できないか？

4. デファイナブル G ファイバー束

定義 4.1. G をデファイナブル群とし、 $\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブルファイバー束とする。

(1) η がデファイナブル G ファイバー束とは、 E がデファイナブル G 空間、 X がデファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合、 p がデファイナブル G 写像であり、 G は E にデファイナブルファイバー束同値写像で作用することである。

(2) デファイナブル G ファイバー束写像、デファイナブル G ファイバー束同値写像、デファイナブル G ファイバー束同型写像も同様に定義することができる。

定義 4.2. (1) G を位相群、 X, Y を G 空間とする。連続 G 写像 $f, h : X \rightarrow Y$ が G ホモトピックとは、連続 G 写像 $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、 $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = h(x)$ となることである。ただし、 $[0, 1]$ 上の G 作用は自明とする。

(2) G をデファイナブル群、 X, Y をデファイナブル G 作用をもったデファイナブル集合とする。連続デファイナブル G 写像 $f, h : X \rightarrow Y$ がデファイナブル G ホモトピックとは、連続デファイナブル G 写像 $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して、 $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = h(x)$ となることである。ただし、 $[0, 1]$ 上の G 作用は自明とする。

定理 4.3. G と K をコンパクトデファイナブル群とする。 $\eta = (E, p, X, F, K)$ をデファイナブル G 集合上のデファイナブル G ファイバー束とする。 $f, h : X \rightarrow Y$ をデファイナブル G 集合間の連続デファイナブル G 写像で、 G ホモトピックとする。 X がコンパクトならば、 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル G ファイバー束同型である。

定理 4.3 の条件のもとで、[5] により、 f と h はデファイナブル G ホモトピックになることが知られている。また G 作用を考えない場合の問題 3.3 の同変版も同様に考えることができる。

デファイナブル G ファイバー束の特別な場合として、デファイナブル G ベクトル束を考えることができる。 X がコンパクトの条件は、デファイナブル G ベクトル束の場合は、除くことができる。

定理 4.4 ([4]). G をコンパクトデファイナブル群とする。 $\eta = (E, p, X)$ をデファイナブル G 集合上のデファイナブル G ベクトル束とする。 $f, h : X \rightarrow Y$ をデファイナブル G 集合間の連続デファイナブル G 写像で、 G ホモトピックとする。このとき、 $f^*(\eta)$ と $h^*(\eta)$ はデファイナブル G ファイバー束同型である。

定理 4.4 の特別な場合が、デファイナブル C^∞ カテゴリーにおいて知られている ([6])。

REFERENCES

- [1] H. Delfs and M. Knebusch, *Semialgebraic topology over a real closed field II: Basic theory of semi-algebraic spaces*, Math. Z. **178** (1981), 175–213.
- [2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
- [3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497–540.
- [4] T. Kawakami, *Definable C^r fiber bundles and definable C^rG vector bundles*, preprint.
- [5] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **55**, (2004), 1–15.
- [6] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323–349.
- [7] T. Kawakami, *Homotopy property for definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53** (2003), 1–6.
- [8] R. K. Lashof, *Equivariant Bundles*, Illinois J. Math. **26**(2) (1982), 257–271.
- [9] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.