多面体表示を定義する不等式と、結晶基底の単項式表示

金久保 有輝 (筑波大学 数理物質系)
Yuki Kanakubo (Faculty of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

1 イントロダクション

結晶基底は、対称化可能なカッツ・ムーディリー環 $\mathfrak{g}$ に対する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現の構造を組み合わせ論的に調べることを可能にするものである。結晶基底は、ヤングタブローや、LS パスと呼ばれるパス、ローラン単項式など、多くの表示方法を持ち、それらを利用することで、表現のウエイト空間の次元やテンソル積表現の分解則など、多くの情報を知ることができるようになる [4, 6, 8, 10]。本稿ではそういった表示方法の中でも、$U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底 $B(\infty)$ を $\mathbb{Z}^\infty$ の部分集合で表す多面体表示と、可積分既約最高ウェイト加群 $V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ をローラン単項式の集合で表す単項式表示を主に扱う。

[13] では、結晶としての埋め込み $\Psi_\iota : B(\infty) \hookrightarrow \mathbb{Z}^\infty$ が定義され、その像 $\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ は多面体表示と呼ばれる。$\mathbb{Z}^\infty$ の部分集合として、$\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ がどのように特徴づけられるかを考えるのは自然な問題である。[13] では、$\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ を、'いくつかの線形不等式を満たす $\mathbb{Z}^\infty$ の点の集合' として特徴づける方法を (条件付きで) 与えており、その線形不等式を計算するアルゴリズムを与えている。[1, 13] などでは、$\mathfrak{g}$ が有限次元単純リー環で、ι が特別な無限列の場合に、$\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ を定義する不等式を明示的に求めている。また、$\mathfrak{g}$ が有限次元半単純リー環で、無限列 $\iota = (\cdots, i_N, \cdots, i_1)$ の最初の N 個のワード $i_1, \cdots, i_N$ が、ワイル群の最長元の最短表示のワードになっているとき、$\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ は [9] における string cone の整数点の集合と同一視される。

一方、単項式表示は、結晶基底 $B(\lambda)$ を、$\mathbb{Z} \times I$ の元でパラメトライズされる変数たちのローラン単項式で表示する方法であり、[4, 10] で導入された (I は $\mathfrak{g}$ の添え字集合)。本稿では、

- $\mathfrak{g}$ が古典型の有限次元単純リー環で、無限列 ι が 'adapted' という条件を満たす場合に、多面体表示 $\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ を定義する不等式を、長方形タブローを用いて組み合わせ論的に表す方法、
- $\mathfrak{g}$ が対称化可能なカッツ・ムーディリー環で、ι が adapted な場合、$\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ を定義する不等式が、結晶基底 $B(\Lambda_i)$ の単項式表示から得られるのではないか、という予想

以上二点について紹介する。

2 多面体表示と単項式表示

この節では、結晶基底の多面体表示、及び、単項式表示について紹介する。

2.1 記号

本稿では、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ を、一般化カルタン行列 $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ に付随する $\mathbb{C}$ 上の対称化可能なカッツ・ムーディリー環とする。ここに、$I = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする。$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数、$\{h_i\}_{i \in I}$ を単純コルート、$\{\alpha_i\}_{i \in I}$ を単純ルートの集合とし、$\langle , \rangle$ を、$\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^*$ のペアリングとする。P を、$\{\alpha_i\}_{i \in I}$ を含むウエイト格子とし、$P_+ := \{\lambda \in P |$ 任意の i に対し、$\langle h_i, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, $P^* = \{h \in \mathfrak{h} | \langle h, P \rangle \subset \mathbb{Z}\}$ とする。$i \in I$ に対し、Λ_i を基本ウエイトとする ($\Lambda_i(h_j) = \delta_{i,j}$)。

$U_q(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随する量子群とし、e_i, f_i $(i \in I)$, q^h $(h \in P^*)$ をその生成元とする。各 $\lambda \in P_+$ に対し、$(L(\lambda), B(\lambda))$ を、最高ウエイト λ を持つ可積分既約最高ウェイト加群 $V(\lambda)$ の結晶基底とする。f_i $(i \in I)$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数 $U_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底を、$(L(\infty), B(\infty))$ とする。二つの整数 m, l $(m \leq l)$ に対し、$[m, l] := \{m, m+1, \cdots, l-1, l\}$ とする。なお、ディンキン図形の頂点の番号付けについては、カッツの本 [2] に従うものとする。

2.2 結晶

結晶基底 $B(\infty)$, $B(\lambda)$ が持つ構造を一般化した**結晶**という概念について紹介する [5]。多面体表示や単項式表示とは、$\mathbb{Z}^\infty$ の部分集合や、ローラン単項式の集合に、比較的 'わかりやすい' 結晶構造を定義し、それらと結晶基底を、結晶の同型射によって同一視するものである。

まず、結晶とは以下のような定義である。

定義 2.1. [5] 集合 $\mathcal{B}$ と、写像 $\mathrm{wt} : \mathcal{B} \to P$, $\varepsilon_i, \varphi_i : \mathcal{B} \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$, $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ $(i \in I)$ が次の条件を満たすとき、組 $(\mathcal{B}, \{\tilde{f}_i\}_{i \in I}, \{\tilde{e}_i\}_{i \in I}, \mathrm{wt}, \{\varphi_i\}_{i \in I}, \{\varepsilon_i\}_{i \in I})$ を $\mathfrak{g}$-結晶と呼ぶ: $b, b' \in \mathcal{B}$, $i \in I$ に対し、

(1) $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \mathrm{wt}(b) \rangle$,

(2) $\mathrm{wt}(\tilde{e}_i b) = \mathrm{wt}(b) + \alpha_i$ if $\tilde{e}_i(b) \in \mathcal{B}$, $\quad \mathrm{wt}(\tilde{f}_i b) = \mathrm{wt}(b) - \alpha_i$ if $\tilde{f}_i(b) \in \mathcal{B}$,

(3) $\varepsilon_i(\tilde{e}_i(b)) = \varepsilon_i(b) - 1$, $\ \varphi_i(\tilde{e}_i(b)) = \varphi_i(b) + 1$ if $\tilde{e}_i(b) \in \mathcal{B}$,

(4) $\varepsilon_i(\tilde{f}_i(b)) = \varepsilon_i(b) + 1$, $\ \varphi_i(\tilde{f}_i(b)) = \varphi_i(b) - 1$ if $\tilde{f}_i(b) \in \mathcal{B}$,

(5) 条件 $\tilde{f}_i(b) = b'$ と、条件 $b = \tilde{e}_i(b')$ は同値である,

(6) もし、$\varphi_i(b) = -\infty$ ならば、$\tilde{e}_i(b) = \tilde{f}_i(b) = 0$,

ここに、0 は $\mathcal{B}$ に属さない元、$-\infty$ も $\mathbb{Z}$ に属さない元である。$\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$ は柏原作用素と呼ばれる。

結晶基底の柏原作用素や写像 wt, φ_i, ε_i を調べることで、リー環や量子群の表現のウエイト空間の次元や、既約性、テンソル積の構造など、基本的な情報を理解することができる。結晶基底の柏原作用素や写像については、結晶 $\mathbb{Z}^\infty$ に埋め込んだり、ローラン単項式の集合と同一視することで、組み合わせ論的に調べることができるようになる。結晶 $\mathbb{Z}^\infty$ や、ローラン単項式の集合との同一視については後の節で述べることにして、ここでは、結晶の埋め込みや、同型射について、定義を確認しておく。

定義 2.2. [5] $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ を結晶とする。写像 $\Phi : \mathcal{B}_1 \sqcup \{0\} \to \mathcal{B}_2 \sqcup \{0\}$ が次の条件を満たすとき、Φ は結晶の射であるという：

(1) $\Phi(0) = 0$,

(2) $b \in \mathcal{B}_1$, $\Phi(b) \in \mathcal{B}_2$ なら、任意の $i \in I$ に対し、

$$\mathrm{wt}(\Phi(b)) = \mathrm{wt}(b),\ \varphi_i(\Phi(b)) = \varphi_i(b),\ \varepsilon_i(\Phi(b)) = \varepsilon_i(b)$$

となる。

(3) $b, b' \in \mathcal{B}_1$, $\Phi(b), \Phi(b') \in \mathcal{B}_2$ であるとする。$\tilde{f}_i b = b'$ ならば、$\tilde{f}_i \Phi(b) = \Phi(b')$ かつ、$\tilde{e}_i \Phi(b') = \Phi(b)$ となる。

更に、結晶の射 Φ が全単射であるとき、Φ は同型射であるという。

定義 2.3. [5] $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ を結晶とし、$\Phi : \mathcal{B}_1 \sqcup \{0\} \to \mathcal{B}_2 \sqcup \{0\}$ は結晶の射であるとする。任意の $i \in I$, $b \in \mathcal{B}_1 \sqcup \{0\}$ に対し、

$$\Phi(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i(\Phi(b)), \quad \Phi(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i(\Phi(b))$$

が成り立つとき、Φ は strict であるという。ただし、$\tilde{f}_i 0 = 0$, $\tilde{e}_i 0 = 0$ と約束する。更に Φ が単射であるとき、Φ を strict な埋め込みと呼ぶ。

2.3 結晶基底 $B(\infty)$ の多面体表示

多面体表示は、結晶基底の各元を、

$$\mathbb{Z}^\infty = \{(\cdots, a_3, a_2, a_1) | a_l \in \mathbb{Z},\ a_k = 0\ (k \gg 0)\}$$

の元で表す表示方法である。本節では [13] に従って、結晶基底 $B(\infty)$ の多面体表示を紹介する。多面体表示を構成するには、I の添え字の無限列 $\iota = (\cdots, i_3, i_2, i_1)$ で、

- $i_k \neq i_{k+1}$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$,
- $\#\{k \in \mathbb{Z}_{>0} | i_k = j\} = \infty$ $(\forall j \in I)$

を満たすものを固定する必要がある。例えば、$\mathfrak{g}$ のランクが 3 なら、

$$\iota = (\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$$

と、3,2,1 というワードを無限に繰り返すような無限列や、

$$\iota = (\cdots, 3, 1, 2, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 2, 1)$$

と、$3, 1, 2, 3, 2, 1$ というワードを無限に繰り返すような無限列など、無数に考えることができる。$\mathbb{Z}^\infty$ に、ι に依存した結晶構造を以下のように定義することができる：まず、$\mathbf{a} = (\cdots, a_3, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}^\infty$ に対し、

$$\sigma_k(\mathbf{a}) := a_k + \sum_{j>k} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j} \rangle a_j \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}).$$

と定める。j が 0 より十分大きければ $a_j = 0$ となるので、$\sigma_k(\mathbf{a})$ はある整数である。

$$\mathrm{wt}(\mathbf{a}) := -\sum_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} a_j \alpha_{i_j}$$

と定義し、各 $i \in I$ に対し、

$$\varepsilon_i(\mathbf{a}) := \max\{\sigma_k(\mathbf{a}) | k \in \mathbb{Z}_{\geq 1},\ i_k = i\}, \quad \varphi_i(\mathbf{a}) := \langle h_i, \mathrm{wt}(\mathbf{a}) \rangle + \varepsilon_i(\mathbf{a})$$

と定める。続いて、集合 $M^{(i)}$ を

$$M^{(i)} = M^{(i)}(\mathbf{a}) := \{k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} | i_k = i,\ \sigma_k(\mathbf{a}) = \varepsilon_i(\mathbf{a})\}$$

と置き、柏原作用素 $\tilde{f}_i : \mathbb{Z}^\infty \to \mathbb{Z}^\infty$ と $\tilde{e}_i : \mathbb{Z}^\infty \to \mathbb{Z}^\infty \sqcup \{0\}$ を

$$(\tilde{f}_i(\mathbf{a}))_k := a_k + \delta_{k, \min M^{(i)}},$$

$$(\tilde{e}_i(\mathbf{a}))_k := a_k - \delta_{k, \max M^{(i)}} \ \text{ if } \varepsilon_i(\mathbf{a}) > 0, \quad \tilde{e}_i(\mathbf{a}) := 0 \ \text{ if } \varepsilon_i(\mathbf{a}) = 0.$$

として定義する。つまり、$\tilde{f}_i$ は、無限列 $\mathbf{a}$ のどこかの成分を 1 増加させるような作用で、$\tilde{e}_i$ は、1 減少させるような作用である。

定理 2.4. [13] 組 $(\mathbb{Z}^\infty, \{\tilde{f}_i\}_{i \in I}, \{\tilde{e}_i\}_{i \in I}, \mathrm{wt}, \{\varphi_i\}_{i \in I}, \{\varepsilon_i\}_{i \in I})$ は結晶である。この結晶構造を、$\mathbb{Z}^\infty_\iota$ で記す。

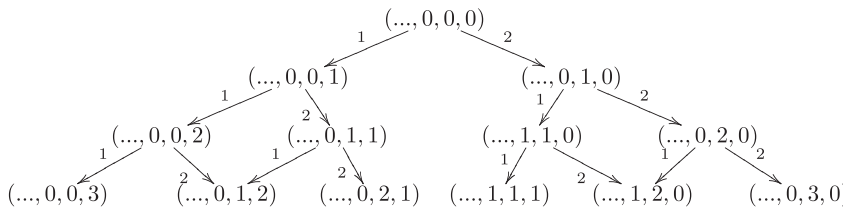
命題 2.5. [5, 13] $B(\infty)$ から $\mathbb{Z}^\infty_\iota$ への結晶としての strict な埋め込み

$$\Psi_\iota : B(\infty) \hookrightarrow \mathbb{Z}^\infty_\iota \tag{2.1}$$

で、$B(\infty)$ の最高ウエイトベクトル u_∞ を $(\cdots, 0, \cdots, 0, 0) \in \mathbb{Z}^\infty_\iota$ に対応させるものが、唯一つ存在する。

定義 2.6. 命題 2.5 の埋め込み Ψ_ι の像 $\mathrm{Im}(\Psi_\iota) \subset \mathbb{Z}_\iota^\infty$ を、$B(\infty)$ の多面体表示という。

例 2.7. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ を A_2 型の有限次元単純リー環とする。$I = \{1, 2\}$ の添え字の無限列 ι を、$\iota = (\cdots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ で定義する。このとき、$B(\infty)$ の多面体表示 $\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ を考えると、その結晶グラフの一部は、以下のようになる：



$\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ は、$(\cdots, a_4, a_3, a_2, a_1) \in \mathbb{Z}^\infty$ で、

$$a_1 \geq 0,\ a_2 \geq a_3 \geq 0,\ a_k = 0\ (k > 3) \tag{2.2}$$

となるもの全体の集合と一致する。実際、上のグラフに現れているベクトルは、全てこの不等式を満たしていることがわかる。

本稿の目的は、(2.2) のような**多面体表示を特徴づける不等式**に、長方形タブローを用いた組み合わせ論的な意味づけ、及び、単項式表示を用いた表現論的な意味づけを与えることである。ただし、一般の無限列 ι に対してではなく、次節で紹介する 'adapted' という条件を満たす無限列に対して、上記のような意味づけを与える。

2.4 Adapted な無限列

定義 2.8. $A = (a_{i,j})$ を対称化可能な一般カルタン行列とする。添え字の無限列 ι が次の条件を満たすとき、ι は A に adapted であるという：$i, j \in I$ で、$a_{i,j} < 0$ となっているものに対し、ι の i, j の部分のみを抜き出した部分列が

$$(\cdots, j, i, j, i, j, i), \text{または } (\cdots, i, j, i, j, i, j)$$

となっている。

例) $\mathfrak{g}$ を A_3 型の有限次元単純リー環、ι を、$3, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 1$ というワードを無限に繰り返す無限列とする:

$$\iota = (\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 1).$$

$a_{1,2} = -1$, $a_{2,3} = -1$ に注意すると、

- 1, 2 のみを抜き出した ι の部分列：$(\cdots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$
- 2, 3 のみを抜き出した ι の部分列：$(\cdots, 3, 2, 3, 2, 3, 2)$

なので、ι は A に adapted である。

例) $\mathfrak{g}$ を A_3 型の有限次元単純リー環、ι を、ワード $2, 1, 2, 3, 2, 1$ から始まる無限列とする：

$$\iota = (\cdots, 2, 1, 2, 3, 2, 1)$$

$a_{1,2} = -1$ であるが、1, 2 のみを抜き出した ι の部分列は $(\cdots, 2, 1, 2, 2, 1)$ なので、ι は A に adapted ではない。

2.5 結晶基底 $B(\lambda)$ の単項式表示

結晶基底 $B(\lambda)$ の**単項式表示**とは、$B(\lambda)$ の各元を、$\mathbb{Z}\times I$ で添え字づけられた変数 $\{X_{s,i}|s\in\mathbb{Z}, i\in I\}$ のローラン単項式で表示する方法である。対称化可能なカッツ・ムーディリー環 $\mathfrak{g}$ の一般カルタン行列 $A=(a_{i,j})$ に adapted な無限列 ι を一つ固定する。$i,j\in I$ で、$a_{i,j}<0$ となっているものに対し、ι の i, j の部分のみを抜き出した部分列が $(\cdots,j,i,j,i,j,i)$ だったとき、$p_{i,j}=1$, $(\cdots,i,j,i,j,i,j)$ だったとき、$p_{i,j}=0$ と定義する。

$$\mathcal{Y}:=\left\{X=\prod_{s\in\mathbb{Z},\ i\in I}X_{s,i}^{\zeta_{s,i}}\,\middle|\,\zeta_{s,i}\in\mathbb{Z},\ \#\{(s,i)\in\mathbb{Z}\times I|\zeta_{s,i}\neq 0\}<\infty\right\}$$

と、ローラン単項式の集合を定める。集合 $\mathcal{Y}$ に、以下のように結晶の構造を定義する。まず、$X=\prod_{s\in\mathbb{Z},\ i\in I}X_{s,i}^{\zeta_{s,i}}\in\mathcal{Y}$ に対し、

$$\mathrm{wt}(X):=\sum_{s\in\mathbb{Z},\ i\in I}\zeta_{s,i}\Lambda_i$$

とし、さらに各 $i\in I$ について、

$$\varphi_i(X):=\max\left\{\sum_{k\le s}\zeta_{k,i}\,|\,s\in\mathbb{Z}\right\},\quad \varepsilon_i(X):=\varphi_i(X)-\langle h_i,\mathrm{wt}(X)\rangle$$

とする。添え字 $(s,k)\in\mathbb{Z}\times I$ に対し、

$$A_{s,k}:=X_{s,k}X_{s+1,k}\prod_{j\neq k,\ a_{j,k}<0}X_{s+p_{j,k},j}^{a_{j,k}}$$

と置き、

$$\tilde{f}_iX=\begin{cases}A_{n_{f_i},i}^{-1}X & \text{if}\quad \varphi_i(X)>0,\\ 0 & \text{if}\quad \varphi_i(X)=0,\end{cases}\qquad \tilde{e}_iX=\begin{cases}A_{n_{e_i},i}X & \text{if}\quad \varepsilon_i(X)>0,\\ 0 & \text{if}\quad \varepsilon_i(X)=0,\end{cases}$$

として、柏原作用素を定義する。ここに、n_{f_i}, n_{e_i} は、

$$n_{f_i}:=\min\left\{N\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\varphi_i(Y)=\sum_{k\le N}\zeta_{k,i}\right\},\qquad n_{e_i}:=\max\left\{N\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\varphi_i(Y)=\sum_{k\le N}\zeta_{k,i}\right\}$$

で定まる整数である。

定理 2.9. [4, 10]

(*i*) 組 $(\mathcal{Y},\{\tilde{f}_i\}_{i\in I},\{\tilde{e}_i\}_{i\in I},\mathrm{wt},\ \{\varphi_i\}_{i\in I},\{\varepsilon_i\}_{i\in I})$ は結晶である。

(*ii*) ローラン単項式 $X\in\mathcal{Y}$ が任意の $i\in I$ に対して $\varepsilon_i(X)=0$ を満たすとき、

$$B(\mathrm{wt}(X))\cong\{\tilde{f}_{j_s}\cdots\tilde{f}_{j_1}X|s\in\mathbb{Z}_{\ge 0},\ j_1,\cdots,j_s\in I\}\setminus\{0\}$$

という結晶の同型が成り立つ。

注意 2.10. 無限列を用いた上記の定義の仕方は、[4] の方法の特別な場合である。

例 2.11. 例 2.7 と同じ設定を考える。つまり、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ を A_2 型の有限次元単純リー環, $I = \{1, 2\}$ の添え字の無限列 ι を $\iota = (\cdots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ で定義する。

任意の整数 $s \in \mathbb{Z}$ に対し、$X_{s,1} \in \mathcal{Y}$ は、$i = 1, 2$ に対して $\varepsilon_i(X_{s,1}) = 0$ を満たす。柏原作用素 $\tilde{f}_i$ の定義に従うと、次の結晶グラフを得る:

$$X_{s,1} \xrightarrow{1} \frac{X_{s,2}}{X_{s+1,1}} \xrightarrow{2} \frac{1}{X_{s+1,2}}.$$

$\mathrm{wt}(X_{s,1}) = \Lambda_1$ なので、$B(\Lambda_1) \cong \{X_{s,1},\ \frac{X_{s,2}}{X_{s+1,1}},\ \frac{1}{X_{s+1,2}}\}$ となる。また、$X_{s,2} \in \mathcal{Y}$ は、$i = 1, 2$ に対して $\varepsilon_i(X_{s,2}) = 0$ を満たす。次の結晶グラフを得る:

$$X_{s,2} \xrightarrow{2} \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+1,2}} \xrightarrow{1} \frac{1}{X_{s+2,1}}.$$

$\mathrm{wt}(X_{s,2}) = \Lambda_2$ なので、$B(\Lambda_2) \cong \{X_{s,2},\ \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+1,2}},\ \frac{1}{X_{s+2,1}}\}$ となる。

例 2.12. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$ を C_2 型の有限次元単純リー環, 無限列 ι を $\iota = (\cdots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ で定義する。例 2.11 と同様、任意の整数 $s \in \mathbb{Z}$ に対し、$X_{s,1} \in \mathcal{Y}$ は、$i = 1, 2$ に対して $\varepsilon_i(X_{s,1}) = 0$ を満たし、柏原作用素 $\tilde{f}_i$ の定義に従うと、次の結晶グラフを得る:

$$X_{s,1} \xrightarrow{1} \frac{X_{s,2}}{X_{s+1,1}} \xrightarrow{2} \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+1,2}} \xrightarrow{1} \frac{1}{X_{s+2,1}}.$$

任意の整数 $s \in \mathbb{Z}$ に対し、$X_{s,2} \in \mathcal{Y}$ は、$i = 1, 2$ に対して $\varepsilon_i(X_{s,2}) = 0$ を満たし、次の結晶グラフを得る：

$$X_{s,2} \xrightarrow{2} \frac{X_{s+1,1}^2}{X_{s+1,2}} \xrightarrow{1} \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+2,1}} \xrightarrow{1} \frac{X_{s+1,2}}{X_{s+2,1}^2} \xrightarrow{2} \frac{1}{X_{s+2,2}}.$$

よって、

$$B(\Lambda_1) \cong \left\{X_{s,1},\ \frac{X_{s,2}}{X_{s+1,1}},\ \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+1,2}},\ \frac{1}{X_{s+2,1}}\right\}, \quad B(\Lambda_2) \cong \left\{X_{s,2},\ \frac{X_{s+1,1}^2}{X_{s+1,2}},\ \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+2,1}},\ \frac{X_{s+1,2}}{X_{s+2,1}^2},\ \frac{1}{X_{s+2,2}}\right\}$$

となる。

3 $B(\infty)$ の多面体表示を定義する不等式の明示公式

この節では、$\mathfrak{g}$ を、A_n, B_n, C_n, または D_n 型の有限次元単純リー環とする。本節では、多面体表示を定義する不等式を長方形タブローを用いて表示する方法を紹介する。なお、これと似た q-指標の表示が [10, 11] で導入されている。

$\mathfrak{g}$ のカルタン行列に adated な無限列 $\iota = (\cdots, i_3, i_2, i_1)$ を固定する。2.5 節と同様、$i, j \in I$ で、$a_{i,j} < 0$ となっているものに対し、ι の i, j の部分のみを抜き出した部分列が $(\cdots, j, i, j, i, j, i)$ だったとき、$p_{i,j} = 1$, $(\cdots, i, j, i, j, i, j)$ だったとき、$p_{i,j} = 0$ と定義する。$k \in \mathbb{Z}$ $(2 \le k \le n)$ に対し、

$$P(k) := \begin{cases} p_{2,1} + p_{3,2} + \cdots + p_{n-2,n-3} + p_{n,n-2} & k = n,\ \mathfrak{g} : \mathrm{D}_n\text{型の場合}, \\ p_{2,1} + p_{3,2} + p_{4,3} + \cdots + p_{k,k-1} & \text{それ以外の場合}, \end{cases}$$

で定める ($P(0) = P(1) = P(n+1) = 0$ と約束する)。各 $j \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ と $\mathbf{a} = (\cdots, a_3, a_2, a_1) \in \mathbb{Q}^\infty$ に対し、

$$x_j(\mathbf{a}) = a_j$$

として、$x_j \in (\mathbb{Q}^\infty)^*$ を定める。$i_j = k$ で、$i_1, i_2, \cdots, i_j$ の中に k が s 回現れるとき、$x_j = x_{s,k}$ と、$\mathbb{Z}_{\geq 1} \times I$ で添え字を付けなおす。

例) $\mathfrak{g}$ を A_3 型の有限次元単純リー環、ι を、$3,2,1,3,2,3,1,2,3,1,2,1$ というワードを無限に繰り返す無限列とする:

$$\iota = (\cdots, 3,2,1,3,2,3,1,2,3,1,2,1).$$

このとき、$\cdots, x_{12}, x_{11}, x_{10}, x_9, x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$ は、

$$\cdots, x_{4,3}, x_{4,2}, x_{4,1}, x_{3,3}, x_{3,2}, x_{2,3}, x_{3,1}, x_{2,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{1,2}, x_{1,1}$$

と、$\mathbb{Z}_{\geq 1} \times I$ で添え字が付けなおされる。

定義 3.1. X=A, B, C, D に対し、半順序集合 J_{X} を次のように定める：

$$J_{\mathrm{A}} = \{1, 2, \cdots, n, n+1\}, \quad 1 < 2 < \cdots < n < n+1.$$

$$J_{\mathrm{B}} = J_{\mathrm{C}} = \{1, 2, \cdots, n, \overline{n}, \cdots, \overline{2}, \overline{1}\}, \quad 1 < 2 < \cdots < n < \overline{n} < \overline{n-1} < \cdots < \overline{1}.$$

$$J_{\mathrm{D}} = \{1, 2, \cdots, n, \overline{n}, \cdots, \overline{2}, \overline{1}\}, \quad 1 < 2 < \cdots < n-1 <^{n}_{\overline{n}} < \overline{n-1} < \cdots < \overline{1}.$$

J_{D} において、$n, \overline{n}$ の間に順序の関係はない。また、$j = 1, 2, \cdots, n$ に対し、$|j| = |\overline{j}| = j$ とする。

続いて、$(\mathbb{Q}^\infty)^*$ の元を次のように定める：$s \in \mathbb{Z}$ と $j \in J_{\mathrm{A}}$ に対し、

$$\boxed{j}^{\mathrm{A}}_s := x_{s+P(j),j} - x_{s+P(j-1)+1,j-1},$$

$s \in \mathbb{Z}$ と $j = 1, 2, \cdots, n$ に対し、

$$\boxed{j}^{\mathrm{B}}_s = x_{s+P(j),j} - x_{s+P(j-1)+1,j-1}, \quad \boxed{\overline{j}}^{\mathrm{B}}_s := x_{s+P(j-1)+n-j+1,j-1} - x_{s+P(j)+n-j+1,j}.$$

$s \in \mathbb{Z}$ と $j = 1, 2, \cdots, n-1$ に対し、

$$\boxed{j}^{\mathrm{C}}_s := x_{s+P(j),j} - x_{s+P(j-1)+1,j-1}, \quad \boxed{n}^{\mathrm{C}}_s := 2x_{s+P(n),n} - x_{s+P(n-1)+1,n-1},$$

$$\boxed{\overline{n}}^{\mathrm{C}}_s := x_{s+P(n-1)+1,n-1} - 2x_{s+P(n)+1,n}, \quad \boxed{\overline{j}}^{\mathrm{C}}_s := x_{s+P(j-1)+n-j+1,j-1} - x_{s+P(j)+n-j+1,j},$$

$$\boxed{\overline{n+1}}^{\mathrm{C}}_s := x_{s+P(n),n}.$$

$s \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$\boxed{j}^{\mathrm{D}}_s := x_{s+P(j),j} - x_{s+P(j-1)+1,j-1}, \quad (1 \leq j \leq n-2,\ j = n),$$

$$\boxed{n-1}^{\mathrm{D}}_s := x_{s+P(n-1),n-1} + x_{s+P(n),n} - x_{s+P(n-2)+1,n-2}, \quad \boxed{\overline{n}}^{\mathrm{D}}_s := x_{s+P(n-1),n-1} - x_{s+P(n)+1,n},$$

$$\boxed{\overline{n-1}}^{\mathrm{D}}_s := x_{s+P(n-2)+1,n-2} - x_{s+P(n-1)+1,n-1} - x_{s+P(n)+1,n},$$

$$\boxed{\overline{j}}^{\mathrm{D}}_s := x_{s+P(j-1)+n-j,j-1} - x_{s+P(j)+n-j,j}, \quad (1 \leq j \leq n-2),$$

$$\boxed{\overline{n+1}}^{\mathrm{D}}_s := x_{s+P(n),n}.$$

これらの定義の中で、$(t,k) \notin \mathbb{Z}_{\geq 1} \times I$ のとき、$x_{t,k} = 0$ とする。

定義 3.2. X = A, B, C または D のとき、長方形タブローを、

$$\begin{array}{|c|}\hline j_1 \\ \hline j_2 \\ \hline \vdots \\ \hline j_{k-1} \\ \hline j_k \\ \hline \end{array}{}^{\mathrm{X}}_{s} := \boxed{j_k}^{\mathrm{X}}_{s} + \boxed{j_{k-1}}^{\mathrm{X}}_{s+1} + \cdots + \boxed{j_2}^{\mathrm{X}}_{s+k-2} + \boxed{j_1}^{\mathrm{X}}_{s+k-1}$$

と、$(\mathbb{Q}^{\infty})^*$ の元として定める。

スペースを節約するために、長方形タブロー

$$\begin{array}{|c|}\hline j_1 \\ \hline j_2 \\ \hline \vdots \\ \hline j_k \\ \hline \end{array}{}^{\mathrm{X}}_{s}$$

を、$[j_1, j_2, \cdots, j_k]^{\mathrm{X}}_s$ と書くこともある。

定義 3.3. X = A, B, C, D に対し、長方形タブローの集合 $\mathrm{Tab}_{\mathrm{X},\iota}$ を次のように定める：

$$\mathrm{Tab}_{\mathrm{A},\iota} := \left\{ [j_1, j_2, \cdots, j_k]^{\mathrm{A}}_s \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in I,\ j_i \in J_{\mathrm{A}},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 1-P(k)}, \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n+1 \end{array} \right\},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tab}_{\mathrm{B},\iota} \quad := \quad & \left\{ [j_1, j_2, \cdots, j_k]^{\mathrm{B}}_s \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in [1, n-1],\ j_i \in J_{\mathrm{B}},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 1-P(k)}, \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq \overline{1} \end{array} \right\} \\ & \cup \left\{ [j_1, j_2, \cdots, j_n]^{\mathrm{B}}_s \;\middle|\; \begin{array}{l} j_i \in J_{\mathrm{B}},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 1-P(n)}, \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq \overline{1}, \\ l \neq m \text{ ならば } |j_l| \neq |j_m| \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tab}_{\mathrm{C},\iota} \quad := \quad & \left\{ [j_1, j_2, \cdots, j_k]^{\mathrm{C}}_s \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in [1, n-1],\ j_i \in J_{\mathrm{C}},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 1-P(k)}, \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq \overline{1} \end{array} \right\} \\ & \cup \left\{ [\overline{n+1}, j_1, j_2, \cdots, j_t]^{\mathrm{C}}_s \;\middle|\; \begin{array}{l} t \in [0, n], j_i \in J_{\mathrm{C}},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 1-P(n)}, \\ \overline{n} \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq \overline{1} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tab}_{\mathrm{D},\iota} \quad := \quad & \left\{ [j_1, j_2, \cdots, j_k]^{\mathrm{D}}_s \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in [1, n-2],\ j_i \in J_{\mathrm{D}},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 1-P(k)}, \\ j_1 \not\geq j_2 \not\geq \cdots \not\geq j_k \end{array} \right\} \\ & \cup \left\{ [\overline{n+1}, j_1, j_2, \cdots, j_t]^{\mathrm{D}}_s \;\middle|\; \begin{array}{l} t \in [0, n],\ t : \text{奇数},\ j_i \in J_{\mathrm{D}},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 1-P(n-1)}, \\ \overline{n} \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq \overline{1} \end{array} \right\} \\ & \cup \left\{ [\overline{n+1}, j_1, j_2, \cdots, j_t]^{\mathrm{D}}_s \;\middle|\; \begin{array}{l} t \in [0, n],\ t : \text{偶数},\ j_i \in J_{\mathrm{D}},\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 1-P(n)}, \\ \overline{n} \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leq \overline{1} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

次の定理は一つ目の主定理であり、多面体表示 $\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ の不等式を長方形タブローの言葉で言い表すものである：

定理 3.4. [3] $\mathfrak{g}$ を、X = A, B, C, または D 型の有限次元単純リー環とし、無限列 ι は、$\mathfrak{g}$ のカルタン行列に adapted なものとする。このとき、

$$\mathrm{Im}(\Psi_\iota) = \left\{ \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^\infty \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の}\varphi \in \mathrm{Tab}^n_{\mathrm{X},\iota}\text{に対し、}\varphi(\boldsymbol{a}) \geq 0, \\ \text{任意の } m \in \mathbb{Z}_{>n}, i \in I \text{ に対し、} a_{m,i} = 0 \end{array} \right\}$$

が成り立つ。ここに、

$$\mathrm{Tab}^n_{\mathrm{X},\iota} := \{[j_1, j_2, \cdots, j_k]^{\mathrm{X}}_s \in \mathrm{Tab}_{\mathrm{X},\iota} | s \leq n\}$$

であり、これは有限集合となる。また、$\cdots, x_4, x_3, x_2, x_1$ と同様のルールで、$\boldsymbol{a} = (\cdots, a_4, a_3, a_2, a_1)$ も、$\mathbb{Z}_{\geq 1} \times I$ で添え字を付けなおしている。

例 3.5. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ を A_2 型の有限次元単純リー環, 無限列 ι を $\iota = (\cdots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ で定義する。これは、例 2.7, 2.11 と同じ設定である。$\cdots, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$ は、$\cdots, x_{3,2}, x_{3,1}, x_{2,2}, x_{2,1}, x_{1,2}, x_{1,1}$ と添え字が付けなおされる。

$$\begin{aligned} \mathrm{Tab}^2_{\mathrm{A},\iota} &= \{\boxed{i}^{\mathrm{A}}_s | 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq s \leq 2\} \cup \{\begin{array}{c} \boxed{i} \\ \boxed{j} \end{array}{}^{\mathrm{A}}_s | 1 \leq i < j \leq 3,\ 1 \leq s \leq 2\} \\ &= \{x_{s,1},\ x_{s,2} - x_{s+1,1},\ -x_{s+1,2} | 1 \leq s \leq 2\} \cup \{x_{s,2},\ x_{s+1,1} - x_{s+1,2},\ -x_{s+2,1} | 1 \leq s \leq 2\} \quad (3.1) \end{aligned}$$

であり、定理 3.4 より、

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\Psi_\iota) &= \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty | \text{ 任意の}\varphi \in \mathrm{Tab}^2_{\mathrm{A},\iota}\text{に対し、}\varphi(\mathbf{a}) \geq 0,\ \text{任意の } m \in \mathbb{Z}_{>2}\text{に対し、}a_{m,1} = a_{m,2} = 0\} \\ &= \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{1,1} \geq 0,\ a_{1,2} - a_{2,1} \geq 0,\ -a_{2,2} \geq 0,\ a_{2,1} \geq 0,\ a_{2,2} \geq 0,\ a_{1,2} \geq 0, \\ a_{2,1} - a_{2,2} \geq 0,\ \text{任意の } m \in \mathbb{Z}_{>2}\text{に対し、}a_{m,1} = a_{m,2} = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

となる。ここに、$\cdots, x_4, x_3, x_2, x_1$ と同様のルールで、$\mathbf{a} = (\cdots, a_4, a_3, a_2, a_1)$ も、$\mathbf{a} = (\cdots, a_{2,2}, a_{2,1}, a_{1,2}, a_{1,1})$ と添え字を付けなおしている。不等式を更に簡単にすることで、

$$\mathrm{Im}(\Psi_\iota) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty | a_{1,1} \geq 0,\ a_{1,2} \geq a_{2,1} \geq 0,\ \text{任意の } m \in \mathbb{Z}_{>2}\text{に対し、}a_{m,1} = a_{m-1,2} = 0\}$$

となる。添え字の付け方を元に戻すと、

$$\mathrm{Im}(\Psi_\iota) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty | a_1 \geq 0,\ a_2 \geq a_3 \geq 0,\ \text{任意の } m \in \mathbb{Z}_{>3}\text{に対し、}a_m = 0\}$$

となり、例 2.7 の (2.2) と同じ不等式が得られる。

例 3.6. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$ を B_2 型の有限次元単純リー環, 無限列 ι を $\iota = (\cdots, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ で定義する。$\cdots, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1$ は、$\cdots, x_{3,2}, x_{3,1}, x_{2,2}, x_{2,1}, x_{1,2}, x_{1,1}$ と添え字が付けなおされる。

$$\begin{aligned} \mathrm{Tab}^2_{\mathrm{B},\iota} &= \{\boxed{i}^{\mathrm{B}}_s | 1 \leq i \leq \overline{1},\ 1 \leq s \leq 2\} \cup \{\begin{array}{c} \boxed{i} \\ \boxed{j} \end{array}{}^{\mathrm{B}}_s | 1 \leq i < j \leq \overline{1},\ |i| \neq |j|,\ 1 \leq s \leq 2\} \\ &= \{\boxed{1}^{\mathrm{B}}_s, \boxed{2}^{\mathrm{B}}_s, \boxed{\overline{2}}^{\mathrm{B}}_s, \boxed{\overline{1}}^{\mathrm{B}}_s | 1 \leq s \leq 2\} \cup \{[1,2]^{\mathrm{B}}_s,\ [1,\overline{2}]^{\mathrm{B}}_s,\ [2,\overline{1}]^{\mathrm{B}}_s,\ [\overline{2},\overline{1}]^{\mathrm{B}}_s |\ 1 \leq s \leq 2\} \\ &= \{x_{s,1},\ x_{s,2} - x_{s+1,1},\ x_{s+1,1} - x_{s+1,2},\ -x_{s+2,1} | 1 \leq s \leq 2\} \quad (3.2) \\ &\quad \cup \{x_{s,2},\ 2x_{s+1,1} - x_{s+1,2},\ x_{s+1,2} - 2x_{s+2,1},\ -x_{s+2,2} | 1 \leq s \leq 2\} \end{aligned}$$

である。定理 3.4 より、

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\Psi_\iota) &= \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty | \text{ 任意の}\varphi \in \mathrm{Tab}^2_{\mathrm{B},\iota}\text{に対し、}\varphi(\mathbf{a}) \geq 0,\ \text{任意の } m \in \mathbb{Z}_{>2}\text{に対し、}a_{m,1} = a_{m,2} = 0\} \\ &= \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{1,1} \geq 0,\ a_{1,2} - a_{2,1} \geq 0,\ a_{2,1} - a_{2,2} \geq 0,\ a_{2,1} \geq 0,\ a_{2,2} \geq 0, \\ a_{1,2} \geq 0,\ 2a_{2,1} - a_{2,2} \geq 0, \\ \text{任意の } m \in \mathbb{Z}_{>2}\text{に対し、}a_{m,1} = a_{m,2} = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^\infty \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{1,1} \geq 0,\ a_{1,2} \geq a_{2,1} \geq 0,\ a_{2,1} \geq a_{2,2} \geq 0, \\ \text{任意の } m \in \mathbb{Z}_{>2}\text{に対し、}a_{m,1} = a_{m,2} = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

4　多面体表示を定義する不等式と、単項式表示

前節では、$B(\infty)$ の多面体表示を定義する不等式を、長方形タブローで組み合わせ論的に表示する方法を与えた。本節では、不等式に、結晶基底 $B(\Lambda_i)$ の単項式表示を用いて、表現論的な意味づけを与えることを考える。まず、写像 $\mathrm{Trop}:\mathcal{Y}\to(\mathbb{Q}^\infty)^*$ を、

$$\mathrm{Trop}\left(\prod_{s\in\mathbb{Z},\ i\in I} X_{s,i}^{\zeta_{s,i}}\right)=\sum_{s\in\mathbb{Z},\ i\in I}\zeta_{s,i}x_{s,i}$$

で定める。

例 4.1. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ を A_2 型の有限次元単純リー環, $I=\{1,2\}$ の添え字の無限列 ι を $\iota=(\cdots,2,1,2,1,2,1)$ で定義する。例 2.11 で見たように、$B(\Lambda_1)$, $B(\Lambda_2)$ の単項式表示は、

$$B(\Lambda_1)\cong\left\{X_{s,1},\ \frac{X_{s,2}}{X_{s+1,1}},\ \frac{1}{X_{s+1,2}}\right\},\quad B(\Lambda_2)\cong\left\{X_{s,2},\ \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+1,2}},\ \frac{1}{X_{s+2,1}}\right\}$$

で与えられた。上式右辺を、それぞれ $\mu^\iota_{s,1}(B(\Lambda_1))$, $\mu^\iota_{s,2}(B(\Lambda_2))$ と書いて、

$$\left\{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\infty\,\middle|\,\text{任意の }\varphi\in\mathrm{Trop}\left(\coprod_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\mu^\iota_{s,1}\left(B(\Lambda_1)\right)\cup\mu^\iota_{s,2}\left(B(\Lambda_2)\right)\right)\text{に対して},\varphi(\mathbf{a})\geq 0\right\}$$

という $\mathbb{Z}^\infty$ の部分集合を考えてみる。

$$\mathrm{Trop}\left(\coprod_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\mu^\iota_{s,1}\left(B(\Lambda_1)\right)\cup\mu^\iota_{s,2}\left(B(\Lambda_2)\right)\right)=\left\{\begin{array}{l}x_{s,1},\ x_{s,2}-x_{s+1,1},\ -x_{s+1,2},\ x_{s,2},\\ x_{s+1,1}-x_{s+1,2},\ -x_{s+2,1}\end{array}\,\middle|\,s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\right\}$$

となる。$x_{s,1}(\mathbf{a})\geq 0$, $-x_{s+2,1}(\mathbf{a})\geq 0$, $x_{s,2}(\mathbf{a})\geq 0$, $-x_{s+1,2}(\mathbf{a})\geq 0$ という条件から、$m\in\mathbb{Z}_{>2}$ に対し、$a_{m,1}=a_{m,2}=0$ がわかる。例 3.5 (3.1) と上式右辺を比較することで、

$$\mathrm{Im}\ (\Psi_\iota)=\left\{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\infty\,\middle|\,\text{任意の }\varphi\in\mathrm{Trop}\left(\coprod_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\mu^\iota_{s,1}\left(B(\Lambda_1)\right)\cup\mu^\iota_{s,2}\left(B(\Lambda_2)\right)\right)\text{に対して},\varphi(\mathbf{a})\geq 0\right\}$$

がわかる。

この例は、A_2 型の結晶 $B(\infty)$ の多面体表示 $\mathrm{Im}\ (\Psi_\iota)$ を定義する不等式が、A_2 型の結晶 $B(\Lambda_1)$, $B(\Lambda_2)$ の単項式表示から得られることを示している。もう一つ例を見てみよう。

例 4.2. $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$ を B_2 型の有限次元単純リー環, 無限列 ι を $\iota=(\cdots,2,1,2,1,2,1)$ で定義する。$\cdots,x_6,x_5,x_4,x_3,x_2,x_1$ は、$\cdots,x_{3,2},x_{3,1},x_{2,2},x_{2,1},x_{1,2},x_{1,1}$ と添え字が付けなおされる。多面体表示 $\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ を定義する不等式については、例 3.6 で求めた。これと、例 2.12 で求めた C_2 型の結晶基底 $B(\Lambda_1)$, $B(\Lambda_2)$ の単項式表示を見比べてみる。例 2.12 では、

$$B(\Lambda_1)\cong\left\{X_{s,1},\ \frac{X_{s,2}}{X_{s+1,1}},\ \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+1,2}},\ \frac{1}{X_{s+2,1}}\right\},\quad B(\Lambda_2)\cong\left\{X_{s,2},\ \frac{X_{s+1,1}^2}{X_{s+1,2}},\ \frac{X_{s+1,1}}{X_{s+2,1}},\ \frac{X_{s+1,2}}{X_{s+2,1}^2},\ \frac{1}{X_{s+2,2}}\right\}$$

と求めた。これらの右辺を、それぞれ $\mu^\iota_{s,1}(B(\Lambda_1))$, $\mu^\iota_{s,2}(B(\Lambda_2))$ と書いて、例 4.1 と同様に

$$\left\{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\infty\,\middle|\,\text{任意の }\varphi\in\mathrm{Trop}\left(\coprod_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\mu^\iota_{s,1}\left(B(\Lambda_1)\right)\cup\mu^\iota_{s,2}\left(B(\Lambda_2)\right)\right)\text{に対して},\varphi(\mathbf{a})\geq 0\right\}$$

という $\mathbb{Z}^\infty$ の部分集合を考えてみる。

$$\mathrm{Trop}\left(\coprod_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \mu^\iota_{s,1}\left(B(\Lambda_1)\right)\cup\mu^\iota_{s,2}\left(B(\Lambda_2)\right)\right)=\left\{\begin{array}{l} x_{s,1},\ x_{s,2}-x_{s+1,1},\ x_{s+1,1}-x_{s+1,2},\ -x_{s+2,1} \\ x_{s,2},\ 2x_{s+1,1}-x_{s+1,2},\ x_{s+1,1}-x_{s+2,1}, \\ x_{s+1,2}-2x_{s+2,1},\ -x_{s+2,2} \end{array}\middle|\ s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}\right\}$$

となるので、$x_{s,1}(\mathbf{a})\geq 0,\ x_{s,2}(\mathbf{a})\geq 0,\ -x_{s+2,1}(\mathbf{a})\geq 0,\ -x_{s+2,2}(\mathbf{a})\geq 0$, より、$m\in\mathbb{Z}_{>2}$ に対して、$a_{m,1}=a_{m,2}=0$ がわかる。また、$(x_{s+1,1}-x_{s+2,1})(\mathbf{a})=a_{s+1,1}-a_{s+2,1}\geq 0$ という不等式は、$(2x_{s+1,1}-x_{s+1,2})(\mathbf{a})\geq 0$, $(x_{s+1,2}-2x_{s+2,1})(\mathbf{a})\geq 0$ という二つの不等式から自動的に従うことがわかる。よって、例 3.6 (3.2) と上式右辺を比較することで、

$$\mathrm{Im}\ (\Psi_\iota)=\left\{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\infty\middle|\text{任意の }\varphi\in\mathrm{Trop}\left(\coprod_{s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\mu^\iota_{s,1}\left(B(\Lambda_1)\right)\cup\mu^\iota_{s,2}\left(B(\Lambda_2)\right)\right)\text{に対して},\varphi(\mathbf{a})\geq 0\right\}$$

となる。

この例は、B_2 型の結晶 $B(\infty)$ の多面体表示 $\mathrm{Im}\ (\Psi_\iota)$ を定義する不等式が、C_2 型の結晶 $B(\Lambda_1)$, $B(\Lambda_2)$ の単項式表示から得られることを示している。より一般に、次のことが成り立つと予想している：

予想 4.3. $\mathfrak{g}$ を対称化可能なカッツ・ムーディリー環、ι を、$\mathfrak{g}$ の一般カルタン行列 $A=(a_{i,j})$ に adapted な無限列とし、${}^{\mathrm{L}}\mathfrak{g}$ を、A の転置行列を一般カルタン行列として持つカッツ・ムーディリー環とする。このとき、

$$\mathrm{Im}(\Psi_\iota)=\left\{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^\infty\middle|\text{任意の }\varphi\in\mathrm{Trop}\left(\coprod_{k\in I,\ s\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\mu^\iota_{s,k}\left(B(\Lambda_k)\right)\right)\text{に対して},\varphi(\mathbf{a})\geq 0\right\}$$

が成り立つ。ここに、$\mathrm{Im}(\Psi_\iota)$ は $\mathfrak{g}$-結晶 $B(\infty)$ の多面体表示、$B(\Lambda_k)$ は ${}^{\mathrm{L}}\mathfrak{g}$-結晶、$\mu^\iota_{s,k}$ は、$B(\Lambda_k)$ の最高ウエイトベクトルを $X_{s,k}$ に対応させる単項式表示で、ι から 2.5 節の方法で定義されるものである。

定理 4.4. $\mathfrak{g}$ が A_n, B_n, G_2 または $\mathrm{A}_1^{(1)}$ 型の場合、予想 4.3 は正しい。

関連する話題として、[12] では、特別な列 ι に対して、A_n 型の多面体表示を定義する不等式が、結晶基底 $B(\Lambda_i)$ の単項式表示から得られることを幾何結晶理論を利用して示している。[7] では、$B(\infty)$ の単項式表示を導入しており、それを応用して、$\mathfrak{g}$ が A_n, B_n, C_n, D_n, または G_2 型の有限次元単純リー環の場合、特別な列 ι に対して、多面体表示を定義する不等式の明示公式を与えている。

References

[1] A.Hoshino, Polyhedral realizations of crystal bases for quantum algebras of finite types, J. Math. Phys. 46, no. 11, 113514, 31 pp, (2005).

[2] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, third edition. Cambridge University Press, Cambridge, xxii+400 pp, (1990).

[3] Y.Kanakubo, T.Nakashima, Adapted sequence for polyhedral realization of crystal bases, Comm. Algebra 48, no. 11, (2020), 4732–4766.

[4] M. Kashiwara, Realizations of crystals, Combinatorial and geometric representation theory, Contemporary Mathematics 325, AMS, 133–139 (2003).

[5] M.Kashiwara, The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula, Duke Math. J., 71, no 3, 839–858 (1993).

[6] M.Kashiwara, T.Nakashima, Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras, J. Algebra 165, no. 2, 295–345 (1994).

[7] Kim, J.-A., Shin, D.-U., Monomial realization of crystal bases $B(\infty)$ for the quantum finite algebras, Algebr. Represent. Theory 11, no. 1, 93–105 (2008).

[8] P.Littelmann, A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras, Invent. Math. 116 (1994), no. 1-3, 329–346 (1994).

[9] P.Littelmann, Cones, crystals, and patterns, Transform. Groups 3, no. 2, 145–179 (1998).

[10] H. Nakajima, t-analogs of q-characters of quantum affine algebras of type A_n, D_n, Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001), Contemp. Math, 325, AMS, Providence, RI, 141–160 (2003).

[11] W.Nakai, T.Nakanishi, Paths, tableaux and q-characters of quantum affine algebras: The C_n case, J. Phys. A: Math. Gen. 39, no. 9, 2083-2115, (2006).

[12] T.Nakashima, Decorated geometric crystals, polyhedral and monomial realizations of crystal bases, Contemp. Math., 602, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 143–163, (2013).

[13] T.Nakashima, A.Zelevinsky, Polyhedral realizations of crystal bases for quantized Kac-Moody algebras, Adv. Math. **131**, no. 1, 253–278, (1997).