

特異空間と両変理論

東北大学理学部 佐藤 肇

(Hajime SATO)

30. 序

Fulton-Macpherson [FM] は、ホモロジーとコホモロジーとへう変と反変の2つの函手の統一的な拡張として、乗法的な一般コホモロジー理論 h^* と (連続的 π) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、両変理論

$$h^*(X \xrightarrow{f} Y)$$

を定義した。これは、 $f(X)$ の Y での近傍の位相による量で、 f のホモトピーでは不変ではない。この量は、特異空間 (特異点を持つ多様体、解析空間等) のトポロジー及び、Riemann-Roch 型定理の定式化、発展に役立つ。

この定式化による自然な例として、[FM] では、Euler 空間に対する Stiefel-Whitney ホモロジー類に対する Riemann-Roch 型定理 (Halperin 予想) の証明の、成立 (そうある) を述べているが、松井明德氏 (一関高専) と私

の研究 $[MS_1]$ は, Halperin 予想の反例を与えた(ほとん
どすべての場合に, 予想は成立しない)。但し 2人の研究
 $[MS_2]$ では, 部分空間が, フラック束を持つという特別な
場合には Halperin 予想を証明している。

この講義録では, Fulton-Macpherson の 両変理論 と
Riemann-Roch 型定理の早わかり を目的とし, 我々の結果の
説明は簡単にするか, 組み合わせトポロジーの美しさを表わ
れた(我々の期待以上の結果が不思議に出て来た)結果だと思
っている。

§1. 両変理論の定義

h を一般コホモロジー理論とする。即ち, Eilenberg-
Steenrod の 7つの公理のうち, 次元公理以外の公理を満たす
可換群への写しとする。普通のコホモロジー群 $H^*(; G)$
の他に, K 群, コホモロジー群等が知られており, スペク
トラムによる統一的な理論が作られている。

特に h を乗法的な一般コホモロジー理論 ($[FM, p32]$
cf. $[Dy, p31]$) とする。すなわち, h^* は (X, A)
 $A: \text{open} \subset X$ という対に対して, $h^*(X, A)$ という
階数付き可換群の元を対応して

$$h^i(X, A) \times h^i(Y, B) \xrightarrow{\times} h^{i+j}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

という種か, 自然な条件を満たして存在して居る. 更に

$\mathcal{F}$ という $h^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}-I)$ の元が存在して,

$$h^i(X, A) \xrightarrow{\times \mathcal{F}^n} h^{i+n}(X \times \mathbb{R}^n, X \times (\mathbb{R}^n - I) \cup A \times \mathbb{R}^n)$$

が任意の (X, A) , i, n に対して同型になるものとする。

例として, H^* , K^* , KO^* が考えられる (K^* の場合は $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{Q}^n$ に変える...).

さて, 上のコホモロジー理論から, 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $h^i(X \xrightarrow{f} Y)$ を定義しよう。

$\phi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ という写像で,

$(f, \phi): X \rightarrow Y \times \mathbb{R}^n$ が閉埋め込み

になっているものを一つ取る。(例え

ば, ϕ 自身も閉埋め込みに取れれば良い。) $X_\phi \equiv (f, \phi)(X)$

$\subset Y \times \mathbb{R}^n$ において, 次の式で, 左辺を定義する。

$$h^i(X \rightarrow Y) \equiv h^{i+n}(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n - X_\phi)$$

この時, 次の性質が成立する。

(*) 上の定義は ϕ によらない

$$h^i(X \xrightarrow{id} X) = h^i(X)$$

コホモロジー

$$h^i(X \rightarrow pt.) = h_{-i}(X)$$

ホモロジー

次の3つの写像が引き起こされる。

(1) ひき戻し

$$f^*: h^i(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow h^i(X' \xrightarrow{f'} Y)$$

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

(2) 積

$$h^i(X \xrightarrow{f} Y) \otimes h^j(Y \xrightarrow{g} Z) \longrightarrow h^{i+j}(X \xrightarrow{gf} Z)$$

(3) 送り出し

$$f_*: h^i(X \xrightarrow{gf} Z) \longrightarrow h^i(Y \xrightarrow{g} Z)$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \text{ proper} \\ & \searrow f_* & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

一般的には, $X \xrightarrow{f} Y$ に対し, 上の3つの写像を定義されている函手を両変理論と定義出来, 必ずしも, 一般2次元の理論より作られるものではなくてよい。実際, Grothendieck による ([SGA 6])

X, Y : algebraic variety. $f: X \rightarrow Y$.

$Kalg(X \xrightarrow{f} Y) =$ Grothendieck group of f -perfect $\mathcal{O}_X$ -modules

を定義の源である。

X, Y が, 向きづけられた特異点の無い多様体ならば

$$\boxed{H^*(X \xrightarrow{f} Y) \cong H^*(X) \cong H_*(X)}$$

となり, f 及び Y によらない。よって, この理論は, 特異点の存在の事実を反映するもの と言えよう。同様に, X 及び Y の
 中, h^* -向きづけ可能な 3-ベクトル束を持つ (特に
 X 及び Y の中, stably fiber homotopically trivial な
 3-束を持つ)

$$h^*(X \rightarrow Y) = h^*(X)$$

とさせていただきます。

3.2. Riemann-Roch formula

定義 f に対して, $\theta(f) \in T(X \xrightarrow{f} Y)$ を

$$\theta(gf) = \theta(f) \cdot \theta(g), \quad \theta(\text{id.}) = 1 \in T^\circ(X \xrightarrow{\text{id.}} X)$$

と定めるように定められるとき, $\theta(f) \in$ canonical orientation と言う。

今, $\theta \in T(X \xrightarrow{f} Y)$ に対し,

$$\theta^*: T_*(Y) \rightarrow T_*(X), \quad \theta_*: T^*(X) \rightarrow T^*(Y)$$

を, 引き戻し, 送り出しを用いた次の図式で定義する。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\theta]{} & Y \\ \swarrow \theta^* a \equiv \theta \cdot a & & \searrow a \\ & p_! & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow a & \searrow \theta \cdot a & \downarrow \text{id.} \\ X & \xrightarrow[\theta]{} & Y \\ & \uparrow a & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{①} \quad \text{②} \quad \text{③} \end{array}$$

③ $f_*(a \cdot \theta) \equiv \theta_* a$

記号 Canonical orientation が与えられている時,

$$\mathcal{O}(f)^* = f^! \quad \mathcal{O}(f)_* = f_!$$

と書く。

これは, orientation による, 通常と逆向きの写像なので,
! (と書いた)。

定理 2つの両変理海 T, U の間の写換

$$t: T \longrightarrow U$$

が Grothendieck 変換であるとは, 3つの写像, (4), (2), (3) を保つ変換と定義する。

以上の状況で, 次の Riemann-Roch 型定理は, 全く形式的な議論の結果にすぎない。

定理 2つの両変理海 T, U と Grothendieck 変換

$t: T \longrightarrow U$ が与えられているとする。 T, U 理海それぞれに, Canonical orientation

$$\mathcal{O}_T(f) \in T(X \xrightarrow{f} Y), \quad \mathcal{O}_U(f) \in U(X \xrightarrow{f} Y)$$

が与えられている。

$$t(\mathcal{O}_T(f)) = U_f \cdot \mathcal{O}_U(f)$$

とする $U_f \in U^*(X)$ が存在するとする (この U_f は inverse Todd class という)。この時, 次の2つの交換図式を,

Riemann-Roch の定理について。

$$\begin{array}{ccc} T^*(X) & \xrightarrow{t^*} & U^*(X) \\ f_! \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f_!(\cdot U_f) \\ T^*(Y) & \xrightarrow{t^*} & U^*(Y) \end{array}$$

(SGA 6 formula)

$$\begin{array}{ccc} T_*(Y) & \xrightarrow{t_*} & U_*(Y) \\ f'_! \downarrow & \curvearrowright & \downarrow U_f \cdot f'_! \\ T_*(X) & \xrightarrow{t_*} & U_*(X) \end{array}$$

(Verdier formula) $\square$

§3. Halperin 予想

多面体 X が (mod 2) Euler 空間 であるとは,

$$\text{等式} \quad \chi(X, X-pt; \mathbb{Z}_2) \equiv \chi(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n-pt; \mathbb{Z}_2) \in \mathbb{Z}_2$$

が任意の pt に対して成立することである。但し χ は

Euler 数 であらわす。 $X = |K|$ が Euler 空間の時

$$K' \text{ の } i\text{-単形 } \sigma \text{ すべてを取り} \quad \delta_i(X) = \sum 1 \otimes \sigma, \quad 1 \in \mathbb{Z}_2$$

を考えよ。 $\delta_i(X)$ は $\mathbb{Z}_2$ -cycle である。 X が定める

ホモロジー類 $[\delta_i(X)] \in H_i(X; \mathbb{Z}_2)$ は Euler 空間

X の i -次元 Stiefel-Whitney ホモロジー類と呼び、 $s_i(X)$

と書く。 X が n -次元多面体ならば、 $s_i(X)$ は X の

$n-i$ -次元 Stiefel-Whitney のホモロジー類 $w^{n-i}(X)$

の dual 双対となる。

Verdier 型の Riemann-Roch 定理は、次の様に考えられる。

以後 $X, Y, \dots$ は Euler 空間とする。

任意の $f: X \rightarrow Y$ に対し、

$$F(X \rightarrow Y) = \{ \varphi: \varphi(X) = 1, \varphi(X - X') = 0, X \subset X' \\ f|_{X'}: X' \rightarrow Y \text{ Euler map } \}$$

は 両変理論 とする。

又 $H(X \rightarrow Y)$ で、 $H^*(; \mathbb{Z}_2)$ に對する 両変理論 を
あうわす。 F, H の canonical orientation を次の
様に定める。

$f: X \rightarrow Y$: Euler ならば、 $O_F(f) \in F(X \xrightarrow{f} Y)$
は canonical に定まる。

$f: X \rightarrow Y$ normally non-singular (法束が
存在する) の時は、束の $(\mathbb{Z}_2)$ -orientation で、 $O_H(f) \in H(X \xrightarrow{f} Y)$
が定まる。従って

$f: X \rightarrow Y$ Euler map, n. non-sing. $\Leftrightarrow$ smooth (bundle
の projection の 核 $\neq 0$) ならば、

$O_F(f), O_H(f)$ は 共に 定まる。

一般の $f: X \rightarrow Y$ に対して、Grothendieck transformation

$$\omega: F(X \rightarrow Y) \rightarrow H(X \rightarrow Y)$$

が自然に定まり、

$f: X \rightarrow Y$ smooth ならば $w(\theta_F(f)) = w(Tf) \cap \theta_M(f)$ とする。但し $w(Tf)$ は f の法束の $\odot$ Stiefel-Whitney のオイラー-数。

上の定義より $f: X \rightarrow pt.$ Euler map ($\Leftrightarrow X: \text{Euler}$) ならば $w(\theta_F(X \rightarrow pt.)) = S_*(X)$ とする。

以上の状況で, Verdier 型 R.P. 14.

$X, Y: \text{Euler}, f: X \rightarrow Y$ smooth

$$\begin{array}{ccc} F_*(Y) & \xrightarrow{w} & H_*(Y) \\ f' \downarrow & \cap & \downarrow w(Tf) \cap f' \\ F_*(X) & \xrightarrow{w} & H_*(X) \end{array}$$

$$w(Tf) \cap f'(\omega^* \theta_F(Y \rightarrow pt.)) = \omega f'(\theta_F(Y \rightarrow pt.))$$

と表わされる。

$$\omega \theta_F(Y \rightarrow pt.) = S_*(Y), \quad \omega f' \theta_F(Y \rightarrow pt.) = \omega \theta_F(X \rightarrow pt.) = S_*(X)$$

ゆえ, 結局

$$*) \quad w(Tf) \cap S_*(Y) = S_*(X)$$

とす。

一般に $X, Y: \text{Euler}$ $f: X \rightarrow Y$ homologically normally nonsingular だと $*)$ が成立する ことが知られる。

Halperin 予想である。但し, homologically nor. non-sing.

と、 $\exists \theta \in H^q(X \rightarrow Y)$ ($\exists d$) を、

$$\forall W \text{ に対して } H^i(W \xrightarrow{g} X) \xrightarrow{\cdot \theta} H^{i+d}(W \xrightarrow{fg} Y)$$

が同型となる d で定義される。

Halperin 予想 (*) を形式的に smooth (Euler $\cap$ normally non-singular) の場合には示した。単に normally non-singular の場合にはも証明でき、それより強い、homology の normal 方向の non-singularity も言明出来るであろうというのが、Halperin の予想である。

§4. 松井-佐藤 [MS₁] の結果

[MS₁] の定理 1 は次のように述べられている。

定理 X を n 次元の Euler 空間とし、勝手には $a_i \in H_i(X; \mathbb{Z}_2)$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) を与える。又 Y を Euler 空間 Y で X とホモトピー同値で、 $S_i(Y) = a_i$ とするものが存在する。

多様体の Stiefel-Whitney ホモロジークラスは (ホモトピー型のみならず) Stiefel-Whitney コホモロジークラスのポインカルレ双対である為、 X のホモトピー不変であるが、Euler 空間の Stiefel-Whitney ホモロジークラスは、ホモトピー型の中で、佐藤に知らせてというわけである。上の定理は、mod 2 Euler

空間に於けるものにあるが, integral Euler 空間でも,
同様の定理が成立し, その証明は, 楽しい部分が多い。

上の定理の方法で,

$$S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^2$$

という埋め込みに対して, $\exists Y. \quad Y \triangleq S^1 \times S^2$

$$0 \neq S_2(Y) \in H_2(Y; \mathbb{Z}_2) \cong H_2(S^1 \times S^2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$$

の Euler 空間に $S^1 \hookrightarrow Y$ とするものが作れる。

この時, 定理 1) は成立せぬ。Halperin 予想の反例
となる。

[MS₂] のフックリ法を用いた Halperin 予想の証明には,
コホモロジーの理論を用いる。両者の理論の枠組みに入らな
うかは, わからない。

REFERENCES

- [Dy] E. Dyer, *Cohomology Theories*, W. A. Benjamin, New York (1969).
- [FM] W. Fulton and R. MacPherson, *Categorical framework for the study of singular spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., 243 (1981).
- [MS₁] A. Matsumi and H. Sato, *Stiefel-Whitney homology classes and homotopy type of Euler spaces*, J. Math. Soc. Japan 37 (1985), 437~453.
- [MS₂] A. Matsumi and H. Sato, *Stiefel-Whitney homology classes and Riemann-Roch formula*, to appear in Adv. Studies in Pure Math.
- [SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie et al., *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Sémin. de Géo. Alg. du Bois-Marie 1966/67, Springer Lec. Notes in Math. 225 (1971).