

Non-trivial ω -limit sets and oscillating solutions in a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass^{*1}

山田 哲也^{*2}

1 導入

本論説では、以下の初期値問題について考察する。

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u(\nabla N * u)), & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, t) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

ただし、 $N(x)$ は Newton ポテンシャルで、 $(\nabla N * u)(t, x)$ は

$$(\nabla N * u)(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} u(t, y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^2$$

とする。

方程式 (P) は細胞性粘菌の集中現象を記述する Keller-Segel 方程式に由来する方程式で、 $u(t, x)$ は時刻 $t > 0$ 、場所 $x \in \mathbb{R}^2$ での粘菌の個体密度を表している。

非負な初期値 u_0 に対して適当な条件を仮定すると、非負解 $u(t; u_0)$ は以下の等式を満たす：

$$(1.1) \quad \int_{\mathbb{R}^2} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx, \quad t > 0.$$

上記の性質 (1.1) は質量保存と呼ばれ、 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx$ の値が (P) の非負解の大域的存在・非存在に大きく関わる：

Case 1 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx > 8\pi$ の場合 ([1, 7, 12])

(P) の非負解は有限時間で爆発する。

Case 2 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx < 8\pi$ の場合 ([2, 6, 7, 8, 10, 17, 18])

(P) の非負解は時間大域的に存在する。また時刻が十分経つと、その解は球対称な (P) の自己相似解に近づきながら 0 に減衰する。

Case 3 $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx = 8\pi$ の場合

^{*1} 本研究は Julián López-Gómez 氏 (Univ. Complutense de Madrid) と永井敏隆氏 (広島大学) との間で行われた共同研究 [15] に基づく。

^{*2} 所属: 福井工業高等専門学校一般科目教室自然科学系 Email: yamada@fukui-nct.ac.jp

(P) の非負解は時間大域的に存在する ([19]).

ここで, Case 3 における解の時刻無限大での挙動はどうなっているのだろうか? これを説明するために, ω 極限集合の概念を導入する.

定義 1.1. $u(t, x; u_0)$ を, u_0 を初期値とする (P) の時間大域解とする. このとき,
 $w(u_0) = \{\varphi \mid t_n \rightarrow \infty \text{ を満たすある数列 } t_n \text{ に対して, } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u(t_n) - \varphi\|_{L^\infty} = 0\}$
 を ω 極限集合と呼ぶ.

上記の ω 極限集合 $\omega(u_0)$ を用いて, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx = 8\pi$ の場合の結果を整理すると, 以下ようになる:

(a) ([5]) $u_0 \log u_0, |x|^2 u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ の下で,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, \cdot) = 8\pi \delta_{x_0} \quad (\text{測度の意味で})$$

が成り立つ. ただし δ_{x_0} は点 x_0 におけるデルタ関数で, x_0 は u_0 の重心, すなわち $x_0 = \int_{\mathbb{R}^2} x u_0(x) dx / (8\pi)$ である. 従って,

$$\omega(u_0) = \emptyset$$

となる.

(b) ([2, 4, 14]) ある $b > 0$ に対して, 以下の汎関数の u_0 での値

$$(1.2) \quad \mathcal{H}_b[u_0] = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sqrt{u_0(x)} - \sqrt{\theta_{b,0}(x)} \right)^2 (\theta_{b,0}(x))^{-1/2} dx$$

が有限である (よって, $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $|x|^2 u_0 \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ である) ならば, (P) の非負解は時間大域的に存在して有界である. さらに,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - \theta_{b,x_0}\|_{L^p} = 0, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

従って,

$$\omega(u_0) = \{\theta_{b,x_0}\}$$

となる. ただし,

$$\theta_{b,X}(x) = \frac{8b}{(|x - X|^2 + b)^2}, \quad b > 0, X \in \mathbb{R}^2$$

は (P) の定常解で, $\|\theta_{b,X}\|_{L^1} = 8\pi$, $|x|\theta_{b,X} \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $|x|^2 \theta_{b,X} \notin L^1(\mathbb{R}^2)$ を満たす. また, x_0 は u_0 の重心, すなわち, $x_0 = \int_{\mathbb{R}^2} x u_0(x) dx / 8\pi$ である.

(c) ([20]) $0 < a < b$ とする. このとき,

$$\{\theta_c \mid a \leq c \leq b\} \subset \omega(u_0)$$

が成り立つような非負かつ球対称な初期値 u_0 が存在する.

以後, 初期値 u_0 を $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx = 8\pi$ を満たす非負な L^1 関数とする. 本論説では, ω 極限集合 $\omega(u_0)$ を調べることで, (P) の有界な時間大域解の挙動を考察する.

2 主結果

この節では, 本論説の主結果を紹介する.

定理 2.1. 初期値 u_0 に対して, 次を仮定する:

$$(2.1) \quad u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2), u_0 \geq 0, \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx = 8\pi, \log(1 + |x|)u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

また, (P) の非負解 $u(t)$ は時間大域的で, 以下を満たすものとする: ある $\tau > 0$ に対して

$$(2.2) \quad \sup_{t \geq \tau} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty.$$

このとき, 以下の (i)–(iv) が成り立つ:

- (i) 軌道 $\{u(t) \mid t \geq \tau\}$ は $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ において相対コンパクトである.
- (ii) ω 極限集合 $w(u_0)$ はコンパクトかつ連結な空でない $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ の部分集合である.
- (iii) $w(u_0) \subset \{\theta_{b,x_0} \mid b > 0, x_0 \in \mathbb{R}^2\}$.
- (iv) (2.1) に加えて, さらに u_0 がある点 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に関して球対称であるならば, $\omega(u_0) = \{\theta_{c,x_0} \mid a \leq c \leq b\}$ となる $0 < a \leq b$ が存在する.

よって, 既知結果 (b) と定理 2.1 の (iv) より非負かつ球対称である (P) の有界な時間大域解はどちらか一方を満たすことがわかる:

- (A) $t \rightarrow \infty$ とすると, ある定常解に収束する.
- (B) 2 つの定常解の間を振動する.

さて, 上記の (B) のような解は実際にあるのだろうか? この問いに関しては, [2] の中で予想されており, [20] で部分的な結果 (c) が得られていた.

本論説では, [2] で提出された予想を肯定的に解決することに成功した. 実際, 得られた結果は以下のとおりである.

定理 2.2. $0 < a < b$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ とする. このとき, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に関して球対称である非負な初期値 u_0 が存在して, 以下の条件を満たす:

- (i) $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_0(x) dx = 8\pi x_0$.
- (ii) 十分大きい $|x|$ に対して, $C_1|x|^{-4} \leq u_0(x) \leq C_2|x|^{-4}$.
- (iii) $\omega(u_0) = \{\theta_{c,x_0} \mid a \leq c \leq b\}$.

最後に, 以下の性質を満たす (P) の有界な時間大域解の存在がわかった.

定理 2.3. $0 < a < b$ とする. また, ε_n を $\varepsilon_n \downarrow 0$ ($n \uparrow \infty$) を満たす列とする. このとき, $t_n \uparrow \infty$ ($n \uparrow \infty$) を満たす時間列 t_n と以下の条件を満たす (必ずしも球対称ではない) 非負な初期値 u_0 が存在する:

- (i) $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_0(x) dx = 0$.
- (ii) 十分大きい $|x|$ に対して, $C_1|x|^{-4} \leq u_0(x) \leq C_2|x|^{-4}$.
- (iii) $1 \leq p \leq \infty$ に対して,

$$\begin{aligned} \|u(t_n; u_0) - \theta_{a,0}\|_{L^p} &< \varepsilon_n \quad n \text{ が偶数}, \\ \|u(t_n; u_0) - \theta_{b,0}\|_{L^p} &< \varepsilon_n \quad n \text{ が奇数}. \end{aligned}$$

従って, $(a, 0)$ と $(b, 0)$ を結ぶ $(0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ における連続曲線 $\{(c(s), x(s)) \mid 0 \leq s \leq 1\}$ が存在して,

$$\{\theta_{c(s), x(s)} \mid 0 \leq s \leq 1\} \subset \omega(u_0)$$

を満たすことがわかる.

この節を終える前に, 本論説における第3節以降の内容を紹介する. 第3節では, (P) の *mild solution* を定義し, その時間局所解の存在と性質を述べた後, 本論説で用いる結果を紹介する. 第4節では, 定理 2.1 の (i) から (iii) の証明の概要を述べる. 定理 2.2 と定理 2.3 については, 同様の考え方で証明することができるので, 定理 2.2 の証明の概要のみを第5節で述べる. 尚, 定理 2.1 の (iv) と定理 2.3 の詳しい証明は [15] を参照されたい.

3 (P) の時間局所解と本論説で用いる結果

最初に, (P) の時間局所解とその性質について述べる. まず (P) の *mild solution* と呼ばれる解を定義する.

定義 3.1. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $T \in (0, \infty)$ とする. $[0, T) \times \mathbb{R}^2$ 上の関数 u が以下を満たすとき, $u(t)$ を $[0, T)$ における (P) の *mild solution* という:

- (i) $u \in C([0, T); L^1(\mathbb{R}^2)) \cap C((0, T); L^{4/3}(\mathbb{R}^2))$, $\sup_{0 < t < T} t^{1/4} \|u(t)\|_{L^{4/3}} < \infty$,
- (ii) $u(t)$ は $u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-s)\Delta} (u(s)(\nabla N * u)(s)) ds$, $0 < t < T$ を満たす.
ただし $e^{t\Delta}$ は熱半群, すなわち,

$$(e^{t\Delta} f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t, x-y) f(y) dy, \quad G(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

- (iii) u を $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ 上の関数とする. 任意の $T \in (0, \infty)$ に対して, $u(t)$ が $[0, T)$ における (P) の *mild solution* であるとき, $u(t)$ を大域的 *mild solution* という.

上記の (P) の *mild solution* は, 時間局所的に存在して, 以下の性質を満たす (証明は [11] 参照).

命題 3.1. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ とする. このとき, $T \in (0, \infty)$ が存在して, $[0, T)$ における (P) の *mild solution* $u(t)$ がただ 1 つ存在する. また, $u(t)$ は以下の性質を満たす.

- (i) $\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t) - u_0\|_{L^1} = 0$.
- (ii) 任意の $1 \leq q \leq \infty$ に対して,

$$u \in C((0, T); L^q(\mathbb{R}^2)), \quad \sup_{0 < t < T} t^{1-1/q} \|u(t)\|_{L^q} < \infty.$$

- (iii) すべての $l \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^2$, $1 < q < \infty$ に対して, $\partial_t^l \partial_x^\alpha u \in C((0, T); L^q(\mathbb{R}^2))$. ただし $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_x^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}$ とする.
- (iv) u は以下の方程式の古典解である:

$$\partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u(\nabla N * u)), \quad 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^2.$$

- (v) すべての $t \in (0, T)$ に対して, $\int_{\mathbb{R}^2} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx$.
- (vi) $u_0 \geq 0$ かつ $u_0 \not\equiv 0$ ならば, すべての $(0, T) \times \mathbb{R}^2$ に対して $u(t, x) > 0$.
- (vii) $u_0 \log(1 + |x|) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ならば, $u(t) \log(1 + |x|) \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

次に, 本論説で用いるいくつかの結果を紹介する. まず非負で有界な (P) の時間大域解は以下を満たす.

命題 3.2 ([14]). $u_0 \geq 0$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ で, $u(t)$ を $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty$ を満たす非負で時間大域的な (P) の *mild solution* であるとする. このとき, 以下の評価が成

り立つ:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & \sup_{t \geq 2} \|u(t)\|_{W^{1,p}} < \infty, \quad 2 \leq p < \infty, \\ & \sup_{t \geq 1} \int_t^{t+1} (\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2}^2) ds < \infty. \end{aligned}$$

ただし $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ は $W^{1,p}$ のノルムである.

定理 2.1 を証明する上で鍵となるのは, 以下の 2 つの結果である.

命題 3.3 ([9]). $v \in C(\mathbb{R}^2)$ は以下の方程式を満たすものとする:

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\Delta v = e^v, & x \in \mathbb{R}^2, \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^v dx < \infty. \end{cases}$$

このとき, v は球対称である, すなわち, ある $\mu > 0$ と $y_0 \in \mathbb{R}^2$ が存在して,

$$v(x) = \log \frac{32\mu^2}{(\mu^2|x - y_0|^2 + 4)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

となる.

命題 3.4. [15, 補題 4.2, 命題 4.2] $u_0 \geq 0$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx = 8\pi$, $u_0 \log(1 + |x|) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ で, $u(t)$ を非負で時間大域的な (P) の *mild solution* であるとする. このとき, 以下の (i), (ii) が成り立つ:

(1) 任意の $t \geq 0$ に対して, (P) の自由エネルギー

$$\mathcal{F}[u(t)] = \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \log u(t) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u(t)(N * u)(t) dx$$

は有限である.

(2) 以下の不等式が成り立つ:

$$(3.3) \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |2\nabla \sqrt{u} - \sqrt{u}(\nabla N * u)|^2 dx dt \leq \mathcal{F}[u_0] + C_{HLS}(8\pi).$$

ただし $C_{HLS}(8\pi) = 8\pi(1 - 3\log 2)$ である.

Proof. (2) の証明のみ述べる. まず (P) の自由エネルギー $\mathcal{F}[u(t)]$ の第 2 項は

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u(t)(N * u)(t) dx = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} u(t, x) u(t, y) \log |x - y| dx dy$$

となる. よって, (P) の自由エネルギー $\mathcal{F}[u(t)]$ は以下のように書くことができる:

$$(3.4) \quad \mathcal{F}[u(t)] = \int_{\mathbb{R}^2} u(t) \log u(t) dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} u(t, x) u(t, y) \log |x - y| dx dy.$$

(3.4) の右辺を評価するために, 対数型 Hardy–Littlewood–Sobolev の不等式を適用する. これは以下のような不等式である:

f は非負で, $f, f \log f, f \log(1 + |x|^2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ であるとする. このとき,

$$(3.5) \quad \int_{\mathbb{R}^2} f \log f dx + \frac{2}{M} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) f(y) \log |x - y| dx dy \geq -C_{HLS}(M)$$

が成り立つ. ただし $C_{HLS}(M) = M(1 + \pi - \log M)$, $M = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx$ である.

ここで $f = u$ とし, $\int_{\mathbb{R}^2} u(t) dx = 8\pi$ ($t > 0$) に注意して, (3.5) を用いると, (3.4) の右辺は

$$(3.6) \quad \mathcal{F}[u(t)] \geq -C_{HLS}(8\pi) = -8\pi(1 - 3 \log 2)$$

と評価される.

最後に, [7] で得られた以下のような不等式

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |2\nabla \sqrt{u} - \sqrt{u}(\nabla N * u)|^2 dx ds \leq \mathcal{F}[u_0] - \mathcal{F}[u(t)], \quad t > 0.$$

と (3.6) を組み合わせれば, (3.3) を得る. □

定理 2.2 を証明するために, 以下のような集合を準備する.

定義 3.2. 任意の $a > 0$ と $R_0 > 0$ に対して, 以下の (i)–(iv) を満たす関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ の集合を, $X(a, R_0)$ と定義する.

- (i) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = 8\pi$,
- (ii) $\|f\|_{L^\infty} \leq \|\theta_{a,0}\|_{L^\infty} = 8/a$,
- (iii) $f(x) \geq f(y)$, $|x| < R_0$, $|y| = R_0$,
- (iv) $f(x) \geq \theta_{a,0}(x)$, $|x| \geq R_0$.

このとき, 集合 $X(a, R_0)$ について, 以下の定理が成り立つ.

命題 3.5. [15, 定理 6.1] すべての $a > 0$, $R_0 > 0$ に対して, v_0 が $X(a, R_0)$ の元であれば, v_0 を初期値とする (P) の *mild solution* $u(t; v_0)$ は時間大域的に存在する. また, $b \in (0, a)$ が存在して,

$$\sup_{v_0 \in X(a, R_0)} \sup_{t > 0} \|u(t; v_0)\|_{L^p} \leq \|\theta_{b,0}\|_{L^p} < \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

最後に、初期値に関する Lipschitz 連続性を紹介して、この節を終える。

命題 3.6. [15, 命題 3.1] $u_{0,i}$ ($i = 1, 2$) を $u_{0,i} \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ を満たす非負な関数とする。また、 u_i ($i = 1, 2$) は $u_{0,i}$ を初期値とする非負な (P) の時間大域的 *mild solution* で、

$$\sup_{t \geq 0} \|u_i(t)\|_{L^\infty} < \infty, \quad i = 1, 2.$$

を満たすものとする。このとき、すべての $t > 0$ に対して

$$(3.7) \quad \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{L^\infty} + C \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{L^{4/3}}^{1/3} t^{1/6} e^{Bt}$$

が成り立つ。

4 定理 2.1 の証明の概略

まず初期値 u_0 と (2.2) に関して

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_0 &\geq 0, \quad u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) dx = 8\pi, \\ u_0 \log(1 + |x|) &\in L^1(\mathbb{R}^2), \quad \sup_{t > 0} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty \end{aligned}$$

と仮定しても一般性を失わないことに注意する。

これから定理 2.1 を 6 つの Step にわけて証明する。

Step 1. (4.1) から任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$(4.2) \quad \sup_{t > 0} \|u(t)\|_{L^p} < \infty$$

が成り立つことに注意する。このとき、(3.1) より (P) の大域解 $u(t)$ は

$$(4.3) \quad \sup_{t \geq 2} \|u(t)\|_{W^{1,p}} < \infty, \quad 2 \leq p < \infty,$$

$$(4.4) \quad \sup_{t \geq 1} \int_t^{t+1} (\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2}^2) ds < \infty.$$

を満たす。

時間列 $\{t_n\}$ を $t_n \geq 2$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ を満たす単調増加列とする。また、任意の $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $u_n(t, x) := u(t + t_n, x)$ とおく。(4.3) より任意の $2 < p < \infty$ に対して、以下を得る：

$$(4.5) \quad \sup_{n \geq 1} \|u_n(0)\|_{W^{1,p}} < \infty.$$

$B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < R\}$ とする. (4.5) と, $2 < p < \infty$ と $R > 0$ に対して, 埋め込み $W^{1,p}(B_R) \hookrightarrow C(\overline{B_R})$ はコンパクトであることから, 部分列 $\{u_{n(j)}(0)\}$ と $\varphi \in C(\mathbb{R}^2)$ が存在して, 以下を満たす:

- 各 $R > 0$ に対して, $u_{n(j)}(0)$ は φ に $\overline{B_R}$ 上一様収束する.

また, $u(t_n) \geq 0$ より $\varphi \geq 0$ であり, (4.2) と Fatou の補題を用いると, φ は $L^p(\mathbb{R}^2)$ ($1 \leq p \leq \infty$) の元であることもわかる. さらに, (4.5) より $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ と

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n(j)}(0) = \varphi \text{ weakly in } W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$$

と仮定してもよい.

Step 2. ある $b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(4.6) \quad \varphi = \theta_{b,x_0}$$

が成り立つことを仮定する. このとき, $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \theta_{b,x_0}(x) dx = 8\pi$ を用いれば, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{n(j)}(0) - \varphi\|_{L^1} = 0$ となるので,

$$(4.7) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{n(j)}(0) - \varphi\|_{L^p} = 0, \quad 1 \leq p < \infty.$$

がいえる. ここで, $2 < q < \infty$ とする. (3.1) と $\varphi \in W^{1,q}$ に注意して, (4.7) と Sobolev の不等式 $\|f\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla f\|_{L^q}^{2/q} \|f\|_{L^q}^{1-2/q}$ ($f \in W^{1,q}(\mathbb{R}^2)$) を適用すると,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{n(j)}(0) - \varphi\|_{L^\infty} = 0$$

となる. 故に, 軌道 $\{u(t) \mid t \geq 0\}$ は $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ において相対コンパクトである. また, [13] から ω 極限集合 $\omega(u_0)$ はコンパクトかつ連結な空でない $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ の部分集合である. さらに, (4.6) より $\omega(u_0) \subset \{\theta_{b,x_0} \mid b > 0, x_0 \in \mathbb{R}^2\}$ も成り立つ.

これから定理 2.1 の証明を完成させるために, ある $b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して (4.6), すなわち, $\varphi = \theta_{b,x_0}$ が成り立つことを証明しよう.

Step 3. Step 1 で得られた極限関数 φ は, 以下の等式を満たす:

$$(4.8) \quad 2\nabla\sqrt{\varphi} - \sqrt{\varphi}(\nabla N * \varphi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

ひとまず (4.8) の証明を後回しにして, (4.6) の証明を先に進めよう.

以下で定義された

$$\eta(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (\log|x-y| - \log|y|) \varphi(y) dy$$

は $\nabla\eta = \nabla N * \varphi$ ($x \in \mathbb{R}^2$) を満たす. ここで, $\varphi \in W^{1,q}(\mathbb{R}^2)$ ($2 < q < \infty$) に注意すると, Morrey の不等式より φ は Hölder 連続である. よって, 楕円型方程式の正則性から, η は $C^2(\mathbb{R}^2)$ の元で, 方程式 $-\Delta\eta = \varphi$, $x \in \mathbb{R}^2$ の古典解となる. 従って, $2\nabla\sqrt{\varphi} - \sqrt{\varphi}\nabla\eta = 0$ ($x \in \mathbb{R}^2$) となり, $\nabla(\sqrt{\varphi}e^{-\eta/2}) = 0$ を得る. その結果, ある正の定数 λ に対して, $\varphi = \lambda e^\eta$ であることがわかるので, η は以下のような方程式を満たす:

$$\begin{cases} -\Delta\eta = \lambda e^\eta, & x \in \mathbb{R}^2, \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^\eta dx < \infty. \end{cases}$$

そこで, $v(x) = \eta(\lambda^{-1/2}x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$) とおく. すると, v は $C(\mathbb{R}^2)$ の元で, (3.2) を満たす. 故に, 命題 3.3 を利用すると, v は球対称で, ある $\mu > 0$ と $y_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$v(x) = \log \frac{32\mu^2}{(\mu^2|x - y_0|^2 + 4)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

となる.

$b = 4\lambda^{-1}\mu^{-2} > 0$, $x_0 = \lambda^{-1/2}y_0 \in \mathbb{R}^2$ とする. このとき, η は

$$\eta(x) = v(\lambda^{1/2}x) = \log \frac{8b\lambda^{-1}}{(|x - x_0|^2 + b)^2}$$

である. 以上から

$$\varphi(x) = \lambda e^{\eta(x)} = \frac{8b}{(|x - x_0|^2 + b)^2} = \theta_{b,x_0}(x)$$

となり, ある $b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して (4.7) が成り立つことがわかる.

Step 4. (4.8), すなわち,

$$2\nabla\sqrt{\varphi} - \sqrt{\varphi}(\nabla N * \varphi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

を示す. (3.1) より $u_n(t, x) = u(t + t_n, x)$ は

$$(4.9) \quad \sup_{n \geq 1} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|u_n(t)\|_{W^{1,p}} < \infty, \quad 2 \leq p < \infty,$$

$$(4.10) \quad \sup_{n \geq 1} \int_0^1 (\|\partial_t u_n(t)\|_{L^2}^2 + \|\Delta u_n(t)\|_{L^2}^2) ds < \infty$$

を満たす.

$R > 0$ を固定する. 埋め込み $H^1(B_R) \hookrightarrow L^2(B_R)$ はコンパクトであるから, 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $\{u_n(t)\}$ は $L^2(B_R)$ において相対コンパクトである. また, (4.10)

より $\{u_n(t)\}$ は $C([0, 1]; L^2(B_R))$ において同程度連続である。よって, Ascoli-Arzelà の定理と対角線論法を用いると, 任意の $R > 0$ に対して $C([0, 1]; L^2(B_R))$ の位相で $w \in C([0, 1]; L^2_{loc}(\mathbb{R}^2))$ に収束する部分列 $\{u_{n(j)}(t)\}$ が存在する。さらに, $2 < p < \infty$ に対して, Gagliardo-Nirenberg-Sobolev の不等式

$$\|f\|_{C(\overline{B_R})} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(B_R)}^{p/(2(p-1))} \|f\|_{L^2(B_R)}^{p-2/(2(p-1))}, \quad f \in W^{1,p}(B_R)$$

を適用すると, 次が成り立つ:

- (i) 任意の $R > 0$ に対して, $u_{n(j)}$ は $C([0, 1]; C(\overline{B_R}))$ の位相で $C([0, 1]; \mathbb{R}^2)$ の元 w に収束する。

ここで, 上記の極限関数 w の性質についてまとめる。 $u_n \geq 0$ なので, 任意の $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$ に対して $w(t, x) \geq 0$ である。また, $w(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n) = \varphi$ も成り立つ。さらに, (i) と (4.2) から, 任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|w(t)\|_{L^p} < \infty$$

であることがわかる。

Step 5. $Q = (0, 1) \times \mathbb{R}^2$ とする。これから以下のことを示そう:

$$(4.11) \quad \int_Q \{2\nabla\sqrt{w} - \sqrt{w}(\nabla N * w)\} g \, dxdt = 0, \quad g \in C_0(Q).$$

特に,

$$(4.12) \quad 2\nabla\sqrt{w} - \sqrt{w}(\nabla N * w) = 0, \quad (t, x) \in Q.$$

まず **Step 4** の (i) より任意の $g \in C_0(Q)$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \nabla N * (u_n - w) g \, dxdt = 0$ が成り立つ。また, 命題 3.4(ii) の (3.3) より

$$(4.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|2\nabla\sqrt{u_n} - \sqrt{u_n}(\nabla N * u_n)\|_{L^2(Q)} = 0$$

がいえる。さらに, **Step 4** の (i) と $\|\nabla\sqrt{u_n}\|_{L^2(Q)}$ の有界性から, $\nabla\sqrt{u_n}$ は $L^2(Q)$ で $\nabla\sqrt{w} \in L^2(Q)$ に弱収束する。よって, この事実と (4.13) から $\sqrt{u_n}(\nabla N * u_n)$ は $L^2(Q)$ で $2\nabla\sqrt{w}$ に弱収束することがわかる。ここで, **Step 5** のこれまでの議論から, 以下を示すことができる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \{\sqrt{u_n}(\nabla N * u_n) - \sqrt{w}(\nabla N * w)\} g \, dxdt = 0, \quad g \in C_0(Q).$$

以上から, (4.11) が得られる. また, (4.11) より (4.12) も成り立つ.

Step 6. 任意の $g \in C_0^1(Q)$ に対して,

$$(4.14) \quad \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t w g \, dx dt = 0$$

が成り立つことを示そう. もし (4.14) が成り立てば, w は t に依存しないことがわかる. よって, $w(0) = \varphi$ から $w(t) = \varphi$ ($t \in [0, 1]$) を得る. 以上より $w(t) = \varphi$ を (4.11) に代入すると, (4.8) を得ることができる.

あとは (4.14) の証明をすれば, 定理 2.1 の証明の概略が完成する. 任意の $n \geq 1$ に対して, $\partial_t u_n = \nabla \cdot \sqrt{u_n}(2\nabla \sqrt{u_n} - \sqrt{u_n}(\nabla N * u_n))$ となるので,

$$\int_Q \partial_t u_n g \, dx dt = - \int_Q \sqrt{u_n}(2\nabla \sqrt{u_n} - \sqrt{u_n}(\nabla N * u_n)) \cdot \nabla g \, dx dt$$

が成り立つ. 従って, $\partial_t u_{n(j)}$ は $L^2(Q)$ で $\partial_t w$ に弱収束することに注意して, 上記の等式において $n \rightarrow \infty$ とし, (4.12) を用いれば, (4.14) がいえる.

5 定理 2.2 の証明の概略

まず (P) の *mild solution* の一意性から, u_0 が $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に関して球対称ならば, $u(t, x; u_0)$ も $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に関して球対称である. よって, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ を原点にしても一般性を失わない. そこで, $u(t, x; u_0)$ を $u(t, x; u_0) = \varphi(t, s)$, $s = \pi|x|^2$ と定義する.

さて, 定理 2.2 を証明するために, 以下を満たす初期値 $u_0(x) = \varphi(0, \pi|x|^2) =: \varphi_0(\pi|x|^2)$ を構成する.

- (i) $\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) \, dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_0(x) \, dx = 0$.
- (ii) 十分大きな $|x|$ に対して, $c|x|^{-4} \leq u_0(x) \leq C|x|^{-4}$.
- (iii) $\theta_{a,0}, \theta_{b,0} \in \omega(u_0)$.
- (iv) $\int_0^s \theta_{b,0}^* \, d\sigma \leq \int_0^s \varphi_0 \, d\sigma \leq \int_0^s \theta_{a,0}^* \, d\sigma$, $s > 0$.

ただし, f^* は f の decreasing rearrangement を表す.

ひとまず (i)–(iv) を満たす初期値 u_0 の構成は後回しにして, 証明を先に進めよう. まず, 定理 2.1 の (iii) より $\omega(u_0) \subset \{\theta_c \mid c > 0\}$ となることに注意する. もし, $\omega(u_0) \subset \{\theta_{c,0} \mid a \leq c \leq b\}$ が成り立てば, 定理 2.1 の (ii) より ω 極限集合 $\omega(u_0)$ は閉かつ連結である空でない $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ の部分集合であり, また, 性質 (iii) を満たすから, $\omega(u_0) = \{\theta_{c,0} \mid a \leq$

$c \leq b\}$ である. 故に,

$$(5.1) \quad \omega(u_0) \subset \{\theta_{c,0} \mid a \leq c \leq b\}$$

を証明すればよい.

そこで $\theta_{c,0} \in \omega(u_0)$ とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(t_n) - \theta_{c,0}\|_{L^\infty} = 0$ を満たす時間列 $\{t_n\}$ が存在する. 性質 (iv) が成り立つことから, [14] の命題 3.3 を適用すると,

$$(5.2) \quad \int_0^s \theta_{b,0}^*(\sigma) d\sigma \leq \int_0^s \varphi(t, \sigma) d\sigma \leq \int_0^s \theta_{a,0}^*(\sigma) d\sigma, \quad t \geq 0, s \geq 0$$

を得る. 故に, (5.2) の変数 t に上記の時間列 $\{t_n\}$ を代入して, $n \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\int_0^s \theta_{b,0}^*(\sigma) d\sigma \leq \int_0^s \theta_{c,0}^*(\sigma) d\sigma \leq \int_0^s \theta_{a,0}^*(\sigma) d\sigma$$

となる. ここで, $c > 0$ に対して $\int_0^s \theta_{c,0}^*(\sigma) d\sigma = 8\pi s / (s + \pi c)$ となるので, $a \leq c \leq b$ がいえる. よって, (5.1) が成り立つ.

以降, 藤田型方程式の研究で適用された議論 [16] を基に, (i)–(iv) を満たす初期値 u_0 を構成する. 本論説では, (i), (ii) と (iii) の証明の概略のみ述べ, 残りの (iv) に関しては [15] を参照されたい.

5.1 (i), (ii) と (iii) の証明について

まず $\{\varepsilon_n\}$ を $\varepsilon_n \downarrow 0$ ($n \uparrow \infty$) を満たす列とする. また $r_0 > \max\{1, (ab)^{1/4}\}$ を満たすように r_0 をとる. これから 5 つの Step にわけて (i), (ii) と (iii) を証明する.

Step 1. $u_{0,0}(x)$ と $u_{0,1}(x)$ を以下のように定義する:

$$u_{0,0}(x) = \theta_{a,0}(x), \quad u_{0,1}(x) = \begin{cases} \theta_{a,0}(x), & |x| \leq r_0, \\ \theta_{b,0}(r_1 e_1), & r_0 < |x| \leq r_1, \\ \theta_{b,0}(x), & |x| > r_1. \end{cases}$$

ただし $e_1 = {}^t(1, 0)$ で, $r_1 (> r_0)$ は $\int_{\mathbb{R}^2} u_{0,1}(x) dx = 8\pi$ を満たすようにとる.

$u_{0,1}(x)$ は $u_{0,1} \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{H}_b[u_{0,1}] < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_{0,1}(x) dx = 0$ を満たしている. [14] の定理 1.1 と定理 1.2 を適用すると, $u_{0,1}$ を初期値とする非負な (P) の *mild solution* $u(t; u_{0,1})$ は時間大域的に存在して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t; u_{0,1}) - \theta_{b,0}\|_{L^\infty} = 0$$

となる. よって, 以下を満たす $t_0 \geq 1$ が存在する:

$$(5.3) \quad \sup_{t \geq t_0} \|u(t; u_{0,1}) - \theta_{b,0}\|_{L^\infty} < \varepsilon_1/2.$$

Step 2. $v_{0,1}(x)$ を以下のように定義する.

$$v_{0,1}(x) = \begin{cases} u_{0,1}(x), & |x| \leq r_2, \\ \varphi(x), & |x| > r_2. \end{cases}$$

ただし, r_2 は $r_2 > 2r_1$ を満たす定数で, 後で決める. また, φ は以下を満たす:

- (a) $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \geq 0$
- (b) $\|v_{0,1}\|_{L^\infty} = \|u_{0,0}\|_{L^\infty} = 8/a$,
- (c) $\int_{\mathbb{R}^2} v_{0,1} dx = 8\pi$,
- (d) $\theta_{c_0,0}(x) \leq \varphi(x) \leq 4\theta_{b,0}(x)$, $|x| \geq r_2$, $c_0 = (a^{-1/2} + 3a^{-1}b^{1/2})^{-2}$.

ここで, $u_{0,1} \in X(c, r_0)$ ($0 < c \leq c_0$) より $v_{0,1} \in X(c, r_0)$ となることに注意すると, 命題 3.5 から $u(t; v_{0,1})$ は時間大域的に存在して, 有界になることがわかる. よって, 命題 3.6 を適用すると, $t_1 \geq t_0$ に対して, $r_2 > 2r_1$ を満たす r_2 が存在して,

$$(5.4) \quad \|u(t_1; v_{0,1}) - u(t_1; u_{0,1})\|_{L^\infty} < \varepsilon_1/2.$$

以上より, (5.3) と (5.4) から以下の不等式を得る:

$$\|u(t_1; v_{0,1}) - \theta_{b,0}\|_{L^\infty} < \varepsilon_1.$$

Step 3. $u_{0,2}(x)$ を以下のように定義する:

$$u_{0,2}(x) = \begin{cases} u_{0,1}(x), & |x| \leq r_2, \\ \theta_{b,0}(r_2 e_1), & r_2 < |x| \leq r_3, \\ \theta_{a,0}(x), & |x| > r_3. \end{cases}$$

ただし $e_1 = {}^t(1, 0)$ で, $r_3(> r_2)$ は $\int_{\mathbb{R}^2} u_{0,2}(x) dx = 8\pi$ を満たすようにとる.

$u_{0,2}(x)$ は $u_{0,2} \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{H}_a[u_{0,2}] < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_{0,2}(x) dx = 0$ を満たしている. [14] の定理 1.1 と定理 1.2 を適用すると, $u_{0,2}$ を初期値とする非負な (P) の mild solution $u(t; u_{0,2})$ は時間大域的に存在して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t; u_{0,2}) - \theta_{a,0}\|_{L^\infty} = 0$$

となる. よって, 以下を満たす $t_0 \geq 1$ が存在する:

$$(5.5) \quad \sup_{t \geq t_0} \|u(t; u_{0,2}) - \theta_{a,0}\|_{L^\infty} < \varepsilon_2/2.$$

Step 4. $v_{0,2}(x)$ を以下のように定義する.

$$v_{0,2}(x) = \begin{cases} u_{0,2}(x), & |x| \leq r_4, \\ \phi(x), & |x| > r_4. \end{cases}$$

ただし, r_4 は $r_4 > 2r_3$ を満たす定数で, 後で決める. また, ϕ は以下を満たす:

- (A) $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\phi \geq 0$
- (B) $\|v_{0,2}\|_{L^\infty} = \|u_{0,0}\|_{L^\infty} = 8/a$,
- (C) $\int_{\mathbb{R}^2} v_{0,2} dx = 8\pi$,
- (D) $\theta_{c_0,0}(x) \leq \phi(x) \leq 4\theta_{b,0}(x)$, $|x| \geq r_4$, $c_0 = (a^{-1/2} + 3a^{-1}b^{1/2})^{-2}$.

ここで, **Step 2** と同様に命題 3.5 を適用すれば, $u(t; v_{0,2})$ は時間大域的に存在して, 有界であることがわかる. よって, 命題 3.6 から, $t_2 \geq t_1(\geq t_0)$ に対して, $r_4 > 2r_3$ を満たす r_4 が存在して,

$$(5.6) \quad \|u(t_2; v_{0,2}) - u(t_2; u_{0,2})\|_{L^\infty} < \varepsilon_2/2$$

以上より, (5.5) と (5.6) から以下の不等式を得る:

$$\|u(t_2; v_{0,2}) - \theta_{a,0}\|_{L^\infty} < \varepsilon_2.$$

Step 5. **Step 1** から **Step 4** を帰納的に繰り返すと, $\{u_{0,n}\}_{n \geq 0} \subset L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ と, $\min\{t_n, r_n\} \uparrow \infty (n \uparrow \infty)$ かつ $r_0 > \max\{(ab)^{1/4}, 1\}$ を満たす増加列 $\{t_n\}_{n \geq 1}$, $\{r_n\}_{n \geq 0}$ が存在して, 以下を満たす:

- (1) $\|u_{0,n}\|_{L^\infty} = \|u_{0,0}\|_{L^\infty} = 8/a$, $n \geq 0$.
- (2) $\int_{\mathbb{R}^2} u_{0,n}(x) dx = 8\pi$, $\int_{\mathbb{R}^2} x u_{0,n}(x) dx = 0$, $n \geq 0$.
- (3) $n \in \mathbb{N}$, $|x| \leq r_{2(n-1)}$ に対して, $u_{0,n}(x) = u_{0,n-1}(x)$.
- (4) $n \in \mathbb{N}$, $|x| \geq r_{2n-1}$ に対して,

$$u_{0,n}(x) = \begin{cases} \theta_{a,0}(x), & n \text{ が偶数}, \\ \theta_{b,0}(x), & n \text{ が奇数}. \end{cases}$$

(5) $|x| \geq r_1$ に対して,

$$\theta_{c_0}(x) \leq u_{n,0}(x) \leq 4\theta_{b,0}(x).$$

ただし $c_0 = (a^{-1/2} + 3a^{-1}b^{1/2})^{-2}$ とする.

(6) $0 < c \leq \min\{c_0, a\}$ に対して, $u_{n,0} \in X(c, r_1)$.

(7) すべての $1 \leq p \leq \infty$, $n \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} \|u(t_n; v_{0,n}) - \theta_{a,0}\|_p &< \varepsilon_n, & n \text{ が偶数}, \\ \|u(t_n; v_{0,n}) - \theta_{b,0}\|_p &< \varepsilon_n, & n \text{ が奇数}. \end{aligned}$$

ただし,

- $\|v_{0,n}\|_{L^\infty} = \|u_{0,0}\|_{L^\infty} = 8/a$.
- $\int_{\mathbb{R}^2} v_{0,n}(x) dx = 8\pi$.
- $|x| \geq r_{2n}$ に対して, $\theta_{c_0}(x) \leq \varphi(x) \leq 4\theta_{b,0}(x)$.

を満たす任意の非負関数 $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して, $v_{n,0}$ を

$$v_{n,0}(x) = \begin{cases} u_{n,0}(x), & |x| \leq r_{2n}, \\ \varphi(x), & |x| > r_{2n} \end{cases}$$

と定義する.

そこで, $u_0(x) = u_{0,n}(x)$ ($|x| < r_{2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$) と定義する. すると, u_0 は well-defined である. また, (2) と (5) から性質 (i) と (ii) は従い, $v_{0,n} = u_{0,n}$, $n \geq 1$ として (7) を用いれば, 性質 (iii) が得られる.

参考文献

- [1] P. Biler, D. Hilhorst, and T. Nadzieja, Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, II, Colloq. Math., **67** (1994), 297–308.
- [2] P. Biler, G. Karch, P. Laurençot, and T. Nadzieja, The 8π –problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane, Math. Meth. Appl. Sci., **29** (2006), 1563–1583.
- [3] P. Biler and T. Nadzieja, Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interactions of particles, I, Colloq. Math., **66** (1994), 319–334.

- [4] A. Blanchet, E. Carlen, and J. A. Carrillo, Functional inequalities, thick tails and asymptotics for the critical mass Patlak-Keller-Segel model, *J. Funct. Anal.*, **262** (2012), 2142–2230. .
- [5] A. Blanchet, J. A. Carrillo, and N. Masmoudi, Infinite time aggregation for the critical Patlak-Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$, *Comm. Pure Appl. Math.*, **61** (2008), 1449–1481.
- [6] A. Blanchet, J. Dolbeault, M. Escobedo, and J. Fernández, Asymptotic behavior for small mass in the two-dimensional parabolic-elliptic Keller-Segel model, *J. Math. Anal. Appl.*, **361** (2010), 533–542.
- [7] A. Blanchet, J. Dolbeault, and B. Perthame, Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions, *Electron. J. Differential Equations*, (2006), No.44, 1–33.
- [8] J. Campos and J. Dolbeault, Asymptotic estimates for the parabolic-elliptic Keller-Segel model in the plane, preprint.
- [9] W. Chen and C. Li, Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations, *Duke Math. J.*, **63** (1991) 615–622.
- [10] J. Dolbeault and B. Perthame, Optimal critical mass in the two-dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **339** (2004), 611–616.
- [11] T. Kato, The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in R^2 with a measure as the initial vorticity, *Differential Integral Equations*, **7** (1994), No 4, 949–966.
- [12] M. Kurokiba and T. Ogawa, Finite time blow-up of the solution for a nonlinear parabolic equation of drift-diffusion type, *Differential Integral Equations*, **16** (2003), 427–452.
- [13] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1981)
- [14] J. Lopez-Gomez, T. Nagai and T. Yamada, The basin of attraction of the steady-states for a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **207** (2013), 159–184.
- [15] J. Lopez-Gomez, T. Nagai and T. Yamada, Non-trivial ω -limit sets and oscillating solutions in a chemotaxis model in $\mathbb{R}^2$ with critical mass, submitted.
- [16] P. Poláčik, and E. Yanagida, On bounded and unbounded global solutions of a supercritical semilinear heat equation, *Math. Ann.* **327** (2003), 745–771.

- [17] T. Nagai, Global existence and decay estimates of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, *Differential Integral Equations*, **24** (2011), 29–68.
- [18] T. Nagai, Convergence to self-similar solutions for a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, *Adv. Differential Equations*, **16** (2011), 839–866.
- [19] T. Nagai and T. Ogawa, Global existence of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in $\mathbb{R}^2$, preprint.
- [20] Y. Naito and T. Senba, Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic-elliptic system in two dimensional solutions, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **12** (2013), 1861–1880.