

Sharp の予想の低次元の場合について

高知大理 小駒哲司 (Tetsushi Ogoma)

Gorenstein 環の準同型像となる環は, dualizing complex をもつことはよく知られている。一方, Reiten は canonical module をもつ Cohen Macaulay 環は, Gorenstein 環の準同型像として表わされることを示した。[4] canonical module は, dualizing complex の最低次の non-zero homology module として得られるから, これは Cohen Macaulay ring の場合, 最初の命題の逆が成立することを示している。そこで Sharp は次を予想した。[5, (4.4) conjecture]

予想 (Sharp) 環 A が fundamental dualizing complex をもてば, A は Gorenstein 環の準同型像として表わされるであろう。

ここでは, 低次元の場合にこの予想が正しいという証明の概略を述べる。詳しいことは, [3] に書くので参照して下さい。

環 A が fundamental dualizing complex I をもつとする。

すると codimension function といわれる $d: \text{Spec } A \rightarrow \mathbb{Z}$ が ($d(\mathfrak{g}) = r \iff A_{\mathfrak{g}}$ の injective hull $E(A_{\mathfrak{g}})$ が I^r の direct summand) によって定義される。今この d によって A の弱 Krull 次元を

$$n = \sup \{ d(\mathfrak{g}) \mid \mathfrak{g} \in \text{Spec } A \} - \inf \{ d(\mathfrak{g}) \mid \mathfrak{g} \in \text{Spec } A \}$$

と定義しよう。もし、 d について混乱のない場合には、単に $w.K. \dim A = n$ と書くことにする。

注意 もし A が local ring 又はただ一つの minimal prime をもつ場合には、弱 Krull 次元は、Krull 次元と一致するが、一般には異なる。[3, Example 3.1]

次の命題は、Sharp の予想を一般に unmixed な場合に帰着できることを示している。

定理 1 環 A が fundamental dualizing complex I をもつとする。このとき、 A は次の性質をもつ環 C の準同型像として表わせる。

- (1) C は fundamental dualizing complex J をもつ。
- (2) $w.K. \dim A = w.K. \dim C$
- (3) $\mathfrak{g} \in \text{Spec } C$ が $\text{Ass}_C C$ に属する条件は $d_C(\mathfrak{g}) = 0$

但し d_C は J で定義される codimension function

この定理の証明の key lemma となるのは次である。

補題 2. 環の全射準同型 $\varphi_1: A_1 \rightarrow A_0$ と $\varphi_2: A_2 \rightarrow A_0$ が与えられたとする。今変数 X 及び φ_2 と $\varphi_3(X)=0$ で定義される準同型 $\varphi_3: A_2[X] \rightarrow A_0$ によって、 φ_1 と φ_3 の fibre product $B = A_1 \times_{A_0} A_2[X]$ を考える。このとき、

$$\text{Ass}_B B = \{P_1^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \text{Ass}_{A_1} \ker \varphi_1\} \cup \{P_2^{-1}(\mathfrak{z} A_2[X]) \mid \mathfrak{z} \in \text{Ass}_{A_2} A_2\}$$
 となる。但し、 $P_1: B \rightarrow A_1$ と $P_2: B \rightarrow A_2[X]$ は射影。

定理 1 の証明の方針は、 A の 0 ideal を $0 = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ (ここで、 $\text{Ass}_A A = \text{Ass}_A A/\mathfrak{a}_1 \cup \text{Ass}_A A/\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{z} \in \text{Ass}_A A/\mathfrak{a}_1 \Leftrightarrow d_A(\mathfrak{z})=0$) と表わす。すると $A = A_1 \times_{A_0} A_2$ ($A_i = A/\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$) となるが、この A の分解について補題 2 の B を考えれば、 A は B の準同型像となるが、 B の associated prime の mixed の状態は A よりよくなっていることがわかり、帰納法で C を得るわけである。この詳しい証明及び補題 2 の証明には fibre product の考察が必要なので、[2] 及び [3] をみて下さい。

定理 3 環 A が fundamental dualizing complex を持ち、かつ $\text{w.K.dim } A \leq 2$ であれば、 A は

Gorenstein ring の準同型像となる。

証明) 定理 1 より、 $\mathfrak{z} \in \text{Spec } A$ が $\text{Ass}_A A$ に属するのは $d_A(\mathfrak{z})=0$ となるもののみとしてよい。この時 $\dim A \leq 1$

であれば、 A は Cohen Macaulay ring となるから、Reiten の結果から A は Gorenstein ring の準同型像となる。

$\dim A = 2$ の場合、canonical module $K = H^0(I')$ の endomorphism ring $A' = \text{Hom}_A(K, K)$ を考えれば、 A' は、finite A -algebra で (S_2) であり [1], conductor ideal $\mathfrak{f} = A' : A$ は non-zero divisor を含むことがわかる。よって、regular element c を $\mathfrak{f}$ から取り、 $\mathfrak{f}_2 = A'c$ とおけば $\mathfrak{f}_2$ は A の ideal であって、 A -module として (S_2) である。

さて、 $\mathfrak{f}_2$ は (S_2) で A は (S_1) であるから、 $D = A/\mathfrak{f}_2$ は Krull 次元 1 で (S_1) であることがわかる。 $(D \neq 0 \text{ として})$ そこで、 $D[X]$ -module の完全列

$$0 \rightarrow XD[X] \rightarrow D[X] \rightarrow D \rightarrow 0 \quad (**)$$

の右側の準同型でもって、fibre product $B = A \times_D D[X]$ を考えよう。すると B は fundamental dualizing complex を持ち、 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } B$ について $(\mathfrak{p} \in \text{Ass}_B B \Leftrightarrow d_B(\mathfrak{p}) = 0)$ とでき、そのとき $\dim D[X]_{\mathfrak{p}} = d_B(\mathfrak{p})$ (もし $D[X]_{\mathfrak{p}} \neq 0$ なら) となることから fibre product の考察からわかる。

他方次の完全列を得る。

$$0 \rightarrow \mathfrak{f}_2 \otimes XD[X] \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow 0$$

さて、 B の極大 ideal $\mathfrak{m}$ を取る。もし $\text{ht } \mathfrak{m} \leq 1$ であれ

ば、 B は embedded prime をもたぬから、 B_m は Cohen Macaulay である。

故に $m=2$ の場合、先の完全列から次の上段の完全列を得。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H'_m(B_m) & \longrightarrow & H'_m(D_m) & \xrightarrow{\varphi} & H^2_m(\mathcal{O}_m \oplus \chi D[X]_m) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H'_m(D[X]_m) & \longrightarrow & H'_m(D_m) & \longrightarrow & H^2_m(\chi D[X]_m) \end{array}$$

完全列(**)から下段の完全列を得る。もし、 $D[X]_m \neq 0$ であれば、 $\dim D[X]_m = d_B(m) = 2$ であり、また D は Cohen Macaulay であるから $H'_m(D[X]_m) = 0$ を得る。よって、 φ は単射でなければならず、すなわち $H'_m(B_m) = 0$ を得る。

故に B は Cohen Macaulay ring であり、canonical module をもつから、Reiten の結果により Gorenstein ring の準同型像である。射影 $B \rightarrow A$ は全射だから定理を得る。

REFERENCES

- [1] Y. Aoyama, Some basic results on canonical modules, J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983) 85-94.
- [2] T. Ogoma, Fibre products of Noetherian Rings and their applications, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.
- [3] T. Ogoma, Associated primes of fibre product rings and a conjecture of Sharp in lower dimensional cases, to appear in Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math.)
- [4] I. Reiten, The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules, Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972) 417-420
- [5] R. Y. Sharp, Necessary condition for the existence of dualizing complex in commutative algebra, Seminaire d'Algebra Paul Dubreil, Lect. Notes Math. 740 Springer-Verlag 1979.