

Julia 集合に付随する Green 関数を用いた 多項式半群の構造と力学系の解析

角大輝 (阪大・理) 住川豪 (阪大・理, 発表者)

〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1

大阪大学大学院理学研究科数学専攻

sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp (角)

t.g.galois@gmail.com (住川)

本論文の結果は [6] に発表されている. 本論文は, 次数 2 以上の一変数複素係数多項式のなす半群の Riemann 球面上の力学系に関する研究を行ったものである. ファイバー Julia 集合に対応する Green 関数からなる空間を構成することで反復関数系の理論の適用を可能にし, 次数 2 以上の一変数複素係数多項式の Julia 集合に関する考察を行い, 多項式半群の構造に関する結果を得た.

多項式 f に対し, f の反復合成の族が正規族となる近傍を持たない点の集合として f の Julia 集合が定義される. この Julia 集合は f の影響を強く受けており, 実際, 2 つの多項式 f, g について f と g が可換であれば f, g の Julia 集合は一致するし, さらに, 円または区間ではない同一の Julia 集合を持つ多項式たちは共通の多項式 p をもって $\sigma \circ p^n$ の形に書けることが知られている. ただし, σ は Julia 集合を Julia 集合にうつす $az + b$ ($|a| = 1$) の形の変換である. 一方, Julia 集合には対応する Green 関数が存在し, この関数は Julia 集合との関係が深く, Green 関数の解析は Julia 集合の解析に繋がることが期待される. そこで以下のような設定を考える.

設定 $m \geq 2$ とする.

1. $f_1, \dots, f_m$ を一変数複素係数多項式とし, 各 j について f_j の次数 d_j は 2 以上とする.
2. S を $f_1, \dots, f_m$ で生成される写像の合成を積とする半群とし, S の Riemann 球面上の力学系を考える.
3. Σ を $\{1, \dots, m\}$ の可算無限直積空間とする.
4. 各 $\omega := (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma$ に対して写像族 $\{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} | n \in \mathbb{N}\}$ を考え, それが正規族となる近傍を持たない点の集まりを J_ω と書いて ω の Julia 集合という.
5. ω の Julia 集合 J_ω の Riemann 球面上の補集合の ∞ を含む連結成分上に, ∞ を極とする Green 関数 G_ω を構成する.

6. G_ω を Σ に関してすべて集めた集合を H とする. そこには自然な距離 ρ が定まって完備距離空間となる.
7. 各 j に対して $\alpha_j(G) := (1/d_j) \cdot G \circ f_j (G \in H)$ によって写像 $\alpha_j : H \rightarrow H$ を定義する. この α_j は距離 ρ に関して縮小的であることが分かる.

以上により, Green 関数の空間である H 上に反復関数系 $\{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq m}$ が構成できた. この種の反復関数系の構成は Klimek ([3]) が多変数の場合に行っているが, 反復関数系のアトラクターの位相的性質については言及をしていない. 一方, 畑 ([1]) は反復関数系の一般論としてアトラクターの位相的性質に関する種々の結果を出している. そこで, 畑の結果を適用してこの反復関数系のアトラクターである H の位相的性質を調べる. それにより, Σ と H との対応に関する有用な結果を得た. それを応用して多項式半群の構造に関する結果 (自由半群となるための一つの十分条件) も得ることが出来た.

上の設定の $m = 2$ の場合で, 次数 2 以上の一変数複素係数多項式 f_1, f_2 で生成される半群の Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の力学系を考える. $\omega \in \Sigma$ に対して ω の Julia 集合に付随して作られる Green 関数を G_ω とし, H は G_ω を Σ に関してすべて集めた空間として, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ を f_1, f_2 から作られる H 上の反復関数系とする.

定理 1. f_1, f_2 をそれぞれ次数 $d_1 \geq 2, d_2 \geq 3$ である一変数複素係数多項式とする. f_1, f_2 の Julia 集合が一致しなければ, $\alpha_1(H) \cap \alpha_2(H) = \emptyset$ かつ $\xi : \Sigma \ni \omega \mapsto G_\omega \in H$ は同相である. ただし, $H := \{G_\omega | \omega \in \Sigma\}$ とする.

定理 1 の ξ が単射であることを用いると次の定理を示すことが出来る.

定理 2. f_1, f_2 を一方が次数 2 以上, もう一方が次数 3 以上の一変数複素係数多項式とする. f_1, f_2 の Julia 集合が一致しなければ, この 2 つの多項式を生成元とする半群は自由半群となる. ただし, 半群の積は写像の合成で定義する.

また, 定理 1, 定理 2 の仮定を満たす (f_1, f_2) の組がどの位存在するかについて調べ, Julia 集合が異なる多項式の組の集合が次数 2 以上の多項式空間と次数 3 以上の多項式空間の直積の中で開かつ稠密であることを示した.

最後に, 今まで述べてきたことは Riemann 球面上でのことであつたが, 定理 2 についてはより一般的に高次元複素射影空間上で考えても同様の結果を得ることが出来る ([5]).

参考文献

- [1] M. Hata, *On the Structure of Self-Similar Sets*, Japan J. Appl. Math., 2 (1985), 381–414.
- [2] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *The dynamics of semigroups of rational functions I*, Proc. London Math. Soc. (3), 73 (1996), 358–384.
- [3] M. Klimek, *Iteration of Analytic Multifunctions*, Nagoya Math. J. Vol. 162 (2001), 19–40.

- [4] H. Sumi, *Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 21 (2001) 563–603.
- [5] H. Sumi, in preparation.
- [6] 住川豪, 「Julia 集合に付随する Green 関数を用いた多項式半群の構造と力学系の解析」 大阪大学大学院理学研究科数学専攻, 2013 年度修士論文.