

ある種の 概均質ベクトル空間の 相対不変式の
Fourier 変換について.

名大. 理. 寺西 鎮男

§1. 概均質ベクトル空間 $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n, \mathbb{C}))$

G を 組型代数群. $\rho: G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ を G の表現と
する. さらに $B_n(\mathbb{C})$ で 上三角行列群 ($\subset GL(n, \mathbb{C})$) を
表わす事にして, $\tilde{G} = G \times B_n(\mathbb{C})$ とおく. 以下では,
次の様にして, 定義される $\tilde{G}$ の表現 $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n, \mathbb{C}))$
を考える.

$$\tilde{g} = (g, a) \in \tilde{G}, \quad x \in M(n, \mathbb{C}) \text{ に対して.}$$

$$\tilde{\rho}(\tilde{g})x = \rho(g)x a^{-1}$$

とおく. $\tilde{\rho}$ の 反傾表現を $\tilde{\rho}^*$ とする.

以下では, $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n, \mathbb{C}))$ は 常に, 概均質ベク
トル空間であると仮定する.

$(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n, \mathbb{C}))$ の既約相対不変式の完全系を $P_0, \dots, P_k$ (但し, $P_0(x) = \det x$) とし, 対応する指標を $\chi_0, \dots, \chi_k$ とする. $x \in M(n, \mathbb{C})$ の l -番目の, たてベクトルを x^l と書く事にすれば, 任意の相対不変式は, 各々のたてベクトル x^l ($1 \leq l \leq n$) に関して, 斉次であるので, その斉次次数を λ_l と書く事にする. この時, 容易にわかるように,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

である.

$$P_0^*(x) = P_0(x) = \det x, \quad \chi_0^* = \chi_0$$

$$P_i^*(x) = P_i({}^t x^{-1}) P_0(x)^{\lambda(i)}, \quad \chi_i^* = \chi_i^{-1} \chi_0^{\lambda(i)},$$

と置く. 但し,

$\lambda(i) = (\lambda(i)_1, \dots, \lambda(i)_n)$ は, $P_i(x)$ の斉次次数である.

この時, $P_i^*(x)$ は $(\tilde{G}, \tilde{\rho}^*, M(n, \mathbb{C}))$ の相対不変式の完全系をなし,

$$P_i^*(\tilde{\rho}^*(\tilde{g})x) = \chi_i^*(\tilde{g})^{-1} P_i(x) \quad (0 \leq i \leq k)$$

をみたす.

$X_p(\tilde{G}) : (\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n, \mathbb{C}))$ の相対不変式の有理

指標全体のなる群とすると $X_p(\tilde{G})$ は χ_0 ,

$\chi_1, \dots, \chi_k$ で生成される, 自由アーベル群である. 任意の $\chi \in X_p(\tilde{G})$ に対して

$$\chi = \prod_{i=0}^k \chi_i^{\delta(\chi)_i} = \prod_{i=0}^k \chi_i^*{}^{\delta^*(\chi)_i}$$

$$P_\chi = \prod_{i=0}^k P_i^{\delta(\chi)_i}, \quad P_{\chi^*} = \prod_{i=0}^k P_i^*{}^{\delta^*(\chi)_i}$$

と置く. さらには $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^{k+1}$ に対して,

$$\begin{cases} \lambda_\ell(\lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda_i \lambda(i)_\ell \\ \lambda_\ell^*(\lambda) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i (\lambda(i)_1 - \lambda(i)_\ell) \quad (1 \leq \ell \leq n) \end{cases}$$

とて, $\gamma(\lambda), \gamma^*(\lambda)$ を

$$\begin{cases} \gamma(\lambda) = \prod_{\ell=1}^n \Gamma(\lambda_\ell(\lambda) + n - \ell + 1) \\ \gamma^*(\lambda) = \prod_{\ell=1}^n \Gamma(\lambda_\ell^*(\lambda) + n - \ell + 1) \end{cases}$$

($\Gamma(x)$ は ガンマ 函数)

により 定義する.

この時 $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n, \mathbb{C}))$ の b -函数は,

$$b_\chi(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda)}{\gamma(\lambda - \delta(\chi))} \quad \text{によって 与えられる.}$$

§2. Fourier 変換

以下では, G は $\mathbb{R}$ 上定義されていると仮定する.

$S, S^* \in$ それぞれ, $(\tilde{G}, \tilde{\rho}, M(n, \mathbb{C}))$, $(\tilde{G}, \tilde{\rho}^*, M(n, \mathbb{C}))$ の singular set とする.

$$\tilde{G}_{\mathbb{R}} = G \times B_n(\mathbb{R})$$

$$S_{\mathbb{R}} = S \cap M(n, \mathbb{R})$$

$$S_{\mathbb{R}}^* = S^* \cap M(n, \mathbb{R})$$

$$\tilde{\rho}_{\mathbb{R}} = \tilde{\rho}|_{\tilde{G}_{\mathbb{R}}}$$

とあって, 次の条件 (1) ~ (3) を仮定する.

(1) $\rho(\tilde{G}_{\mathbb{R}})$ は $GL(n, \mathbb{R})$ の 連結部分群

(2) $S = \bigcup S_i$

$$S_i = \{x \in M(n, \mathbb{R}) \mid P_i(x) = 0\} \quad (0 \leq i \leq k)$$

(3) $M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}}$ は single $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}(\tilde{G}_{\mathbb{R}})$ -orbit

$\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ の 連結成分を $\tilde{G}_{\mathbb{R}}^0$ として $M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}}$ の $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}(\tilde{G}_{\mathbb{R}}^0)$ による分解

$$M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \dots \cup V_d$$

を考える. $V_i^* = \{x \in M(n, \mathbb{R}) \mid {}^t x \in V_i\}$ とすると

$$M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}}^* = V_1^* \cup \dots \cup V_d^*$$

が $\tilde{\rho}_{\mathbb{R}}^*(\tilde{G}_{\mathbb{R}}^0)$ による orbit 分解である.

$\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^{k+1}$ に対して.

$$|p(x)|^\lambda = \prod_{i=0}^k |p_i(x)|^{\lambda_i}, \quad |p^*(x)|^\lambda = \prod_{i=0}^k |p_i^*(x)|^{\lambda_i}$$

$$|\chi(g)|^\lambda = \prod_{i=0}^k |\chi_i(g)|^{\lambda_i}, \quad |\chi^*(g)|^\lambda = \prod_{i=0}^k |\chi_i^*(g)|^{\lambda_i}$$

と置く.

次の積分を考える:

$$\Phi_i(f, \lambda) = \int_{V_i} f(x) |p(x)|^\lambda dx$$

$$\Phi_i^*(f, \lambda) = \int_{V_i^*} f(x) |p^*(x)|^\lambda dx \quad (1 \leq i \leq \nu)$$

$$f \in \mathcal{S}(M(n, \mathbb{R})).$$

$\operatorname{Re} \lambda_0 > 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_k > 0$ の時, $\Phi_i(f, \lambda), \Phi_i^*(f, \lambda)$

は絶対収束する.

$1 \leq i \leq \nu$ に対して.

$$\varepsilon_i^* = (\operatorname{sgn} p_0^*|_{V_i}, \dots, \operatorname{sgn} p_k^*|_{V_i}) \text{ と置く. 更に}$$

$$\varepsilon_i(\lambda) = \exp 2\pi\sqrt{-1} \left(\frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^k \lambda_\ell (1 - \varepsilon_i(\chi_\ell)) \right)$$

$$d(\lambda) = \sum_{\ell=0}^k \lambda_\ell \deg p_\ell \quad (1 \leq i, \varepsilon_i(\chi_\ell) = \operatorname{sgn} p_\ell|_{V_i})$$

とする. $\chi \in X_p(\tilde{G})$ に対して

$$\sigma_i(\chi) f(\lambda) = \varepsilon_i(\chi) f(\lambda + \delta(\chi)) \text{ と置く.}$$

§

定理: すべての p, q ($p \neq q, 1 \leq p, q \leq n$) に対して, $\varepsilon_p^* \neq \varepsilon_q^*$ と仮定すると $\Phi_i(f, \lambda), \Phi_i^*(f, \lambda)$ は、次の函数等式を満足する.

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(\hat{f}, \lambda - (n, 0, \dots, 0)) \\ \vdots \\ \Phi_n(\hat{f}, \lambda - (n, 0, \dots, 0)) \end{pmatrix} = \gamma(\lambda - (n, 0, \dots, 0)) C(\lambda) \begin{pmatrix} \Phi_1^*(f, \lambda^*) \\ \vdots \\ \Phi_n^*(f, \lambda^*) \end{pmatrix}$$

ここで, $C(\lambda)$ は その (i, j) -成分 $C_{ij}(\lambda)$ が

$$C_{ij}(\lambda) = (-2)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2} - d(\lambda)} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{-1}}{2} d(\lambda)\right) \varepsilon_i(\lambda) \\ \times \prod_{r=0}^k (1 + \sigma_j(\chi_r)) \exp\left(-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2} d(\lambda)\right) \varepsilon_i(-\lambda) \prod_{\ell=1}^n \sin \frac{\pi}{2} (\lambda_\ell(\lambda) - \ell)$$

で与えられる $n \times n$ -行列である.

Example とし, $G = SO(n, \mathbb{C})$ とする. この時, 相対不変式の基本系は

$$P_0(x) = \det x$$

$$P_i(x) = \det \begin{bmatrix} (x^1, x^1), \dots, (x^i, x^i) \\ \vdots \\ (x^i, x^1), \dots, (x^i, x^i) \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

で与えられる. この時

$$S = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_i, \quad S_i = \{x \in M(n, \mathbb{C}) \mid P_i(x) = 0\}$$

で $M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}}$ の orbit 分解は

$$M(n, \mathbb{R}) - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 = \{x \in M(n, \mathbb{R}) \setminus S_{\mathbb{R}} \mid \det x > 0\}$$

$$V_2 = \{x \in M(n, \mathbb{R}) \setminus S_{\mathbb{R}} \mid \det x < 0\}$$

である.

~~と~~ $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ に對して

$$d(\lambda) = n\lambda_0 + \sum_{\ell=1}^{n-1} 2\ell\lambda_\ell$$

$$\lambda_\ell(\lambda) = \lambda_0 + \sum_{m=\ell}^n 2^m \lambda_m \quad (1 \leq \ell \leq n)$$

$$\varepsilon_i(\lambda) = \exp \frac{\pi \sqrt{-1} (1 - (-1)^{i-1}) \lambda_0}{2} \quad (i=1, 2)$$

と定まる. $c_{ij}(\lambda)$, $(1 \leq i, j \leq 2)$ は

$$c_{ij}(\lambda) = 2^{n-1} (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2} - d(\lambda)} \left(\prod_{\ell=1}^n \cos \frac{\pi}{2} (\lambda_\ell(\lambda) - \ell + 1) \right.$$

$$\left. + (-1)^{i+j} (\sqrt{-1})^n \prod_{\ell=1}^n \sin \frac{\pi}{2} (\lambda_\ell(\lambda) - \ell + 1) \right)$$

で与えられる.

従, τ_i , $i=1, 2, \dots, 2T+1$.

$$\begin{aligned} \Phi_i(\hat{f}, s = (n, 0, \dots, 0)) &= \prod_{l=1}^n \Gamma(s_0 + \sum_{m=l}^n 2m s_m - l + 1) \\ &\times \sum_{j=1}^2 C_{ij}(s) \Phi_j(f, s^*) \end{aligned}$$

$$\text{但}, s^* = (-s_0 - \sum_{m=1}^n 2m s_m, s_2, \dots, s_{n-1})$$

を得る.

証明等は.

Y. Teranishi : Relative invariants and b-functions of
prehomogeneous vector spaces $(G \times GL(d_1, \dots, d_r), \tilde{P}_1, M(n, \mathbb{C}))$
(preprint)

" : The functional equation of zeta distributions
associated with prehomogeneous vector spaces
(preprint)