

2 階算術の諸体系

— モデル論的手法による分析 —

東北大学 教養部 数学科

田中 一之 (Kazuyuki Tanaka)

我々の目的は、2 階算術の諸体系の論理的関係を「モデル理論」を手段として分析することである。本文は、以下のように構成されている。

§0. 準備

§1. AC, DC, SP, TI

§2. WKL₀に関する Harrington の結果

§3. WKL₀に関する Friedman の結果

§1 は、すでによく知られた結果をまとめたものである。

§2, 3 の結果は未発表のもので、私自身はペンシルバニア州立大での Simpson 教授の講義から学んだ。ここに感謝の意を表す。また、研究代表者の角田法也氏には大変お世話になった。彼の忍耐と努力なしには、この論文集が世に出ることはなかっただろう。最後に、読者諸賢のご意見ご指導を望む。

§0. 準備

2 階算術の言語は次の記号からなる：

- (i) numerical variables: $a, b, c, \dots, m, n, \dots$,
- (ii) set variables: $X, Y, Z, \dots$,
- (iii) constant symbols: $0, 1$,
- (iv) function symbols: $+, \cdot$,
- (v) relation symbols: $=, <, \in$.

numerical variables と constant symbols を $+$ と $\cdot$ 及び カッコ を使って適当に組合せたものを term と呼ぶ。 t_1 と t_2 を terms とするとき、

$$t_1 = t_2, \quad t_1 < t_2, \quad t_1 \in X$$

のような記号列を atomic formulas と呼ぶ。一般の formula は、atomic formulas から $\sim, \vee$ などの命題論理記号と number quantifiers $\forall x, \exists x$ 及び set quantifiers $\forall X, \exists X$ を使って作られる。

formula はその形によって次のように分類される。

- (i) atomic formulas から命題論理記号と bounded number quantifiers $\forall x < t, \exists x < t$ だけを使って作られる formula を Π_0 formula と呼ぶ。
ここで、 $\forall x < t$ は $\forall x (x < t \rightarrow \dots)$, $\exists x < t$ は $\exists x (x < t \wedge \dots)$ の省略形で、 t は x を含まない term,
- (ii) set quant. を含まない formula を Π_0 又は arithmetical と呼ぶ;

- (iii) φ が Π_j^i ならば, $\sim\varphi$ は Σ_j^i ($i=0,1, j \in \omega$),
 (iv) φ が Σ_j^0 ならば, $\forall x_1 \dots \forall x_k \varphi$ は Π_{j+1}^0 ,
 (v) φ が Σ_j^i ならば, $\forall x_1 \dots \forall x_k \varphi$ は Π_{j+1}^i .

注: 上の (i)~(v) のどれにも属さない formula が多数ある。

定義 0.1. $\mathcal{C}$ を formula の集合として, $\mathcal{C}$ -内包公理 は次の図式で定義される。

$$(\mathcal{C}\text{-CA}): \exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow \varphi(x)),$$

但し, $\varphi \in \mathcal{C}$ は X を free variable として含まない。

また, Δ_j^i -内包公理 は次の図式として定義される。

$$(\Delta_j^i\text{-CA}): \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow \sim\psi(x)) \rightarrow \exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow \varphi(x)),$$

但し, $\varphi, \psi \in \Pi_j^i$ は X を free に含まない。

定義 0.2. $\mathcal{C}$ -帰納法 は次の図式で定義される。

$$\mathcal{C}\text{-ind}: \varphi(0) \wedge \forall n (\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)) \rightarrow \forall n \varphi(n),$$

但し, $\varphi \in \mathcal{C}$ 。

定義 0.3. 再帰的内包公理 の体系 RCA_0 は以下の公理から成る。

(i) 基本算術公理:

$$n+1 \neq 0, \quad n+1 = m+1 \rightarrow n=m,$$

$$n+0 = n, \quad n+(m+1) = (n+m)+1,$$

$$n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot (m+1) = n \cdot m + n,$$

$$n < m \leftrightarrow \exists k \neq 0 (n+k = m).$$

(ii) $(\Delta_1^0 - (A))$

(iii) $\Sigma_1^0\text{-ind}$

注: Δ_1^0 の概念が再帰的集合のそれと一致することは Shoenfield などの教科書を参照.

補題 0.1. $RCA_0 \vdash \Pi_1^0\text{-ind}.$

(証明) $\varphi \in \Pi_1^0$ として, $\varphi(0)$ か $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$ と仮定する.

いま, $\sim\varphi(a)$ とすれば, $\sim\varphi(a-i)$ に対して $\Sigma_1^0\text{-ind. on } i \leq a$ を用いて, $\sim\varphi(0)$ が得られるので矛盾. すなわち, $\forall x \varphi(x)$ となる. $\square$

補題 0.2. $RCA_0 \vdash \text{"}\Sigma_1^0 \text{ is closed under bounded quantification"}$.

(証明) $\forall j < t \exists j \theta(i, j)$ with $\theta \in \Pi_1^0$ を仮定する. $\exists n \forall i < m \theta(i, (n)_i)$

に対して $\Sigma_1^0\text{-ind on } m \leq t$ を用いて, $\exists n \forall i < t \theta(i, (n)_i)$ を得る. $\square$

補題 0.3. $RCA_0 \vdash (\text{finite } \Sigma_1^0\text{-CA}) : \forall n \exists X \forall i \leq n (i \in X \leftrightarrow \varphi(i)), \varphi \in \Sigma_1^0.$

(証明) ある $\varphi \in \Sigma_1^0$ について, $\sim \exists X \forall i \leq n (i \in X \leftrightarrow \varphi(i))$ とする n が存在したと仮定する. いま,

$$\psi(k) \equiv \exists S \subseteq \{0, \dots, n\} \{ |S| = k \wedge \forall i \in S \varphi(i) \}$$

とおくと, 補題 0.2 から ψ は Σ_1^0 . $\psi(k) \wedge \sim \psi(k+1)$ ならば, $\exists S \{ |S| = k \wedge \forall i \in S \{ i \in S \leftrightarrow \varphi(i) \} \}$ となって仮定に反するから, $\forall k (\psi(k) \rightarrow \psi(k+1))$ を得る. $\psi(0)$ は明らかだから, $\Sigma_1^0\text{-ind}$ により $\forall k \psi(k)$ となるが, $\psi(n+1)$ となるはずはないから矛盾が出た. 従って, $RCA_0 \vdash (\text{finite } \Sigma_1^0\text{-CA})$ が証明された. $\square$

注: $RCA_0 - \Sigma_1^0\text{-ind} + \Sigma_0^0\text{-ind} \vdash (\text{finite } \Sigma_1^0\text{-CA}) \rightarrow \Sigma_1^0\text{-ind}$. 何故ならば, 任意の n について, $\forall i \leq n (i \in X \leftrightarrow \varphi(i))$ となる X があるから, $i \in X$ に対して $\Sigma_0^0\text{-ind on } i \leq n$ を使えばよい.

定義 0.4. $\mathcal{C}\text{-CA}_0 \equiv RCA_0 + (\mathcal{C}\text{-CA})$ ($\mathcal{C} = \Sigma_1^i, \Pi_1^i, \Delta_1^i$ など)

特に, $\Pi_0^1\text{-CA}_0$ を 算術的内包公理 の体系と呼び, ACA_0 と書く.

注: 次のことは直ちにいえる. $\Sigma_1^i\text{-CA}_0 \equiv \Pi_1^i\text{-CA}_0$, $\Sigma_1^i\text{-CA}_0 \vdash \Sigma_1^i\text{-ind}$, $\Sigma_1^0\text{-CA}_0 \equiv \Sigma_2^0\text{-CA}_0 \equiv \dots \equiv \Sigma_0^1\text{-CA}_0$. (ゆえ, $\Sigma_1^1\text{-CA}_0 \neq \Sigma_2^1\text{-CA}_0$).

定義 0.5. '無限個の頂点をもつ2分木 $T \subseteq \{0,1\}^*$ は無限の長さの path をもつ' という弱い König の補題 を RCA_0 において表現し, それを (WKL) と呼ぶ. そして, $WKL_0 \equiv RCA_0 + (WKL)$ とおく.

注: recursive to infinite path をもたない recursive to infinite tree $T \subseteq \{0,1\}^*$ の発見は Kleene による.

補題 0.4. $RCA_0 \vdash (WKL) \leftrightarrow \Sigma_1^0 \text{分離原理} (\Sigma_1^0\text{-SP})$

(証明) Simpson の Cauch/Peano の論文 (JSL 49 (1984), 783-802) の Lemma 2.6.

定義 0.6. 算術的超限再帰の公理 (ATR) は次の図式として定義される: 任意の Π_1^0 formula $\varphi(n, X)$, 任意の $A \subseteq \mathbb{N}$, 任意の整列順序 $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対し, 次の条件を満たす集合 $H \subseteq \mathbb{N}$ が存在する,

- (i) b が $<$ に因りて最小のとき, $(H)_b = A$,
- (ii) b が a の $<$ -successor のとき, $\forall n (n \in (H)_b \leftrightarrow \varphi(n, (H)_a))$,
- (iii) b が $<$ における極限のとき, $\forall a \forall n (n \in ((H)_b)_a \leftrightarrow a < b \wedge n \in (H)_a)$.

そして, $ATR_0 \equiv RCA_0 + (ATR)$.

補題 0.5. $RCA_0 \vdash (ATR) \leftrightarrow \Sigma_1^1 \text{分離原理} (\Sigma_1^1\text{-SP})$

(証明) 省略. (non-standard hierarchy method による).

§1. AC, DC, SP, TI

本節では, AC(選択公理), DC(従属選択), SP(分離原理), TI(超限帰納法)及びそれらの公理に基づく様々な体系の強さについて調べる.

定義 1.1. $\mathcal{C}$ を formula の集合として,

$$(\mathcal{C}\text{-AC}): \forall x \exists Y \varphi(x, Y) \rightarrow \exists Z \forall x \varphi(x, (Z)_x),$$

但し, $\varphi(x, Y) \in \mathcal{C}$ は Z を free に含まない,

$$(\mathcal{C}\text{-DC}): \forall x \forall X \exists Y \varphi(x, X, Y) \rightarrow \exists Z \forall x \varphi(x, (Z)_x, (Z)_{x+1})$$

但し, $\varphi(x, X, Y) \in \mathcal{C}$ は Z を free に含まない,

$$(\mathcal{C}\text{-SP}): \forall x (\varphi(x) \rightarrow \sim \psi(x)) \rightarrow \exists X \forall x [(\varphi(x) \rightarrow x \in X) \wedge (x \in X \rightarrow \sim \psi(x))]$$

但し, $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{C}$ は X を free に含まない.

ここで, $(Z)_x = \{z : (z, x) \in Z\}$, 且て $(z, x) = (z+x) \cdot (z+x+1)/2 + z$ である.

定義 1.2. RCA_0 に上の axiom schema の / つ (X) を加えて出来る体系を $\mathcal{X}_0$ と書く.

例えば, $\Sigma'_2\text{-AC}_0 \equiv \text{RCA}_0 + (\Sigma'_2\text{-AC})$. ここで, Σ'_2 は Σ'_2 formula の集合 $\mathcal{C}$ を意味する.

補題 1.1. (i) $\Pi'_k - AC_0 \equiv \Sigma'_{k+1} - AC_0$, (ii) $\Pi'_k - DC_0 \equiv \Sigma'_{k+1} - DC_0$ ($k \geq 0$).

(証明) (i) $\varphi(x, Y) \equiv \exists W \psi(x, Y, W)$ with $\psi \in \Pi'_k$ とし, $\forall x \exists Y \varphi(x, Y)$ と仮定する. RCA_0 において, $\exists Y \exists W \psi(x, Y, W) \leftrightarrow \exists Y \psi(x, (Y)_0, (Y)_1)$ がいえるので, $\forall x \exists Y \psi(x, (Y)_0, (Y)_1)$ を得る. これに $(\Pi'_k - AC)$ を適用すると $\exists Z \forall x \psi(x, ((Z)_x)_0, ((Z)_x)_1)$, 従って $\exists Z \forall x \exists W \psi(x, ((Z)_x)_0, W) \equiv \exists Z \forall x \varphi(x, ((Z)_x)_0)$ を得る. RCA_0 において, Z から $((Z)_x)_0 = (Z')_x$ となる Z' が容易に定義できるので, $\exists Z' \forall x \varphi(x, (Z')_x)$ となって, $(\Sigma'_{k+1} - AC)$ が $\Pi'_k - AC_0$ で証明された. (ii) も同様. $\square$

補題 1.2. $\Delta'_k - CA_0 \stackrel{(i)}{\subseteq} \Pi'_k - SP_0 \stackrel{(ii)}{\subseteq} \Sigma'_k - AC_0 \stackrel{(iii)}{\subseteq} \Sigma'_k - DC_0$ ($k \geq 0$).

(証明) (i) $(\Pi'_k - SP)$ の図式の前提部分 $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \sim \psi(x))$ を $\forall x (\varphi(x) \leftrightarrow \sim \psi(x))$ に置き換えたものが $(\Delta'_k - CA)$ であるから明らか.

(ii) $\varphi(x), \psi(x) \in \Pi'_k$ で, $\forall x (\neg \varphi(x) \vee \neg \psi(x))$ と仮定する. いま,

$$\theta(x, Y) \equiv \neg \varphi(x) \wedge 0 \in Y \vee \neg \psi(x) \wedge 0 \notin Y$$

とおくと, $\forall x \exists Y \theta(x, Y)$. $(\Sigma'_k - AC)$ より $\forall x \theta(x, (W)_x)$ となる W が存在し, $X = \{x : 0 \in (W)_x\}$ とおけばこれが φ と ψ を分離する.

(iii) $(\Sigma'_k - DC)$ の図式において, $\varphi(x, X, Y)$ が X に依存しないものだけを考えれば $(\Sigma'_k - AC)$ になる. $\square$

補題 1.3. $\Sigma'_k\text{-DC}_0 \vdash \Sigma'_k\text{-ind}$.

(証明) $\varphi(x) \equiv \exists X \theta(x, X)$ with $\theta \in \Pi'_{k-1} \leq 1$, $\varphi(0)$ から $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$ と仮定する. いま,

$$\psi(x, X, Y) \equiv \{x=0 \wedge \theta(x, Y)\} \vee \{x>0 \wedge (\theta(x-1, X) \rightarrow \theta(x, Y))\}$$

とおくと, 仮定から $\forall x \forall X \exists Y \psi(x, X, Y)$ である. ψ は $\Sigma'_k \text{TC}$ から, $(\Sigma'_k\text{-DC})$ によって $\forall x \psi((Z)_x, (Z)_{x+1})$ とする Z が存在する. そこで, $\Sigma'_k\text{-DC}_0 \vdash (\Delta'_k\text{-CA})$ により, $W = \{n : \theta(n, (Z)_{n+1})\}$ が存在する. あとは, $\Sigma'_0\text{-ind}$ により $\forall x x \in W$ がいえるので, $\forall x \varphi(x)$ が成立する. $\square$

命題 1.4. (近藤-Addison) $\forall \varphi(Y) \in \Pi'_1(\text{on } \Sigma'_2) \exists \varphi^*(Y) \in \Pi'_1(\text{on } \Sigma'_2)$

次のことが $\Pi'_1\text{-CA}_0$ で証明できる:

- (i) $\forall Y (\varphi^*(Y) \rightarrow \varphi(Y)),$
- (ii) $\exists Y \varphi(Y) \rightarrow \exists Y \varphi^*(Y),$
- (iii) $\forall Y, Z (\varphi^*(Y) \wedge \varphi^*(Z) \rightarrow Y=Z).$

証明は, Shoenfield や Rogers などの標準的な教科書を参照されたい.

Addison の証明は $\Pi'_1\text{-CA}_0$ でそのまま行える.

定理 1.5. $\Delta'_2 - CA_0 \equiv \Pi'_2 - SP_0 \equiv \Sigma'_2 - AC_0$.

(証明) 補題 1.2 により, $\Delta'_2 - CA_0 \vdash (\Sigma'_2 - AC)$ を示せば十分. $\varphi =$
 $\varphi(x, Y)$, $\varphi \in \Sigma'_2$ と仮定する. 命題 1.4 により, φ
 φ^* が存在する. いま,

$$\psi_1(i, x) \equiv \exists Y (\varphi^*(x, Y) \wedge i \in Y),$$

$$\psi_2(i, x) \equiv \forall Y (\varphi^*(x, Y) \rightarrow i \in Y)$$

とおくと, $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ なるから, $(\Delta'_2 - CA)$ より $Z = \{(i, x) : \psi_1(i, x)\}$
 $\varphi^*(x, (Z)_x)$, すなわち $\forall x \varphi(x, (Z)_x)$ を得
 $\square$

定理 1.6. $\Delta'_2 - CA_0 + \Sigma'_2 - ind \equiv \Sigma'_2 - DC_0$.

(証明) 補題 1.2 及び 1.3 から, $\Delta'_2 - CA_0 + \Sigma'_2 - ind \subseteq \Sigma'_2 - DC_0$ である.
 $\varphi(x, X, Y)$, $\varphi \in \Sigma'_2$ と仮定する. 命
 φ^* uniformizes φ とする. φ^* uniformizes φ とする. φ^* uniformizes φ とする. φ^* uniformizes φ とする.

$$\psi(x, w) \equiv (w)_0 = \emptyset \wedge \forall y < x \varphi^*(y, (w)_y, (w)_{y+1})$$

とおく. $(\Sigma'_2 - AC)$ により ψ は Σ'_2 formula に書き直せるから, $\Sigma'_2 - ind$
 $\psi(n, w)$ を得る. φ^* uniformizes φ とする. φ^* uniformizes φ とする. φ^* uniformizes φ とする.

$$\psi_1(i, x) \equiv \exists W (\psi(x, W) \wedge i \in W),$$

$$\psi_2(i, x) \equiv \forall W (\psi(x, W) \rightarrow i \in W)$$

とおくと, $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ だから, $(\Delta'_2 - CA)$ より $Z = \{(i, x) : \psi_1(i, x)\}$ が存在する. そして, $\forall x (\varphi(x, (Z)_x, (Z)_{x+1}))$ を得る. $\square$

注: $\Delta'_2 - CA_0 \nVdash \Sigma'_2\text{-ind}$ である(後述).

定義 1.3. "X が自然数上の整列順序である" という述語を $WO(X)$ で表わし, $(i, j) \in X$ を $i <_X j$ と書く. このとき,

$$(\mathcal{C}\text{-TI}) : \forall X (WO(X) \rightarrow (\forall j (\forall i <_X j (\varphi(i) \rightarrow \varphi(j)) \rightarrow \varphi(j)))$$

但し, $\varphi(i) \in \mathcal{C}$.

そして, $\mathcal{C}\text{-TI}_0 \equiv ACA_0 + (\mathcal{C}\text{-TI})$ とおく.

定義 1.4. 2 階算術の構造 $(M, S, +, \cdot, \dots)$ が ω -model iff $M = \omega$.
 ω -model $(\omega, S, +, \cdot, \dots)$ が β -model iff

$$\forall \sigma \in \Sigma'_1 (S \text{ の要素をパラメタとして含む } \sigma \Rightarrow \mathcal{M} \models \sigma$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{または} \\ \forall \sigma \in \Pi'_1 (\quad \quad \quad) \mathcal{M} \models \sigma \Rightarrow \sigma \end{array} \right]$$

補題 1.7. (i) 任意の ω -model $\models \Sigma'_\omega\text{-ind}$.

(ii) 任意の β -model $\models (\Sigma'_\omega\text{-TI})$.

(証明) (i) $\mathcal{M}$ を任意の ω -model, $\varphi(x)$ を任意の formula とし,
 $\mathcal{M} \models \varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$ と仮定する. すると, $\mathcal{M} \models \varphi(0)$ かつ
 $\forall n \in \omega (\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))$ だから, $\forall n \in \omega \varphi(n)$ によって $\mathcal{M} \models \forall x \varphi(x)$.

(ii) $\mathcal{M}$ が β -model なら, $\mathcal{M} \models WO(B) \Rightarrow WO(B)$ となることに注意
 し, (i) と同様に $\forall n \in \omega \varphi(n)$ を示す. $\square$

補題 1.8. 任意の β -model $\models ATR_0$.

(証明) $\mathcal{M}$ を β -model, $\sigma \equiv \exists X \psi(X)$ with $\psi(X) \in \Pi'_1$ とする.

$$\mathcal{M} \models \sigma \Rightarrow \exists B \mathcal{M} \models \psi(B) \Rightarrow \exists B \psi(B) \Rightarrow \sigma$$

だから, 逆に真なる Π'_2 formula はすべて $\mathcal{M}$ で成り立つ. ATR_0
 は Π'_2 formula で書けるから, $\mathcal{M}$ で成り立つ. $\square$

補題 1.9. $\Pi'_1\text{-CA}_0 \vdash$ 可算 β -model が存在する.

(証明) $\varphi(e, X, Y)$ を universal Σ'_1 predicate とする. $S = \{X_n\}$ を帰納的に
 に定義する. $X^{<n} = \{(i, j) : i < n, j \in X_i\}$ とおき, $\exists Y \varphi(e, X^{<n}, Y)$ とする.

Gandy の basis theorem から, $\varphi(e, X^{<n}, \gamma)$ かつ $O^\gamma \equiv_h O^{X^{<n}}$ となる γ が存在し, それを $X_{(e,n)}$ とおく. すると, すべての n について $O^{X_n} \equiv_h O^\alpha$ が示せるから $S = \{X_n\}$ は Π'_1 -CA₀ で存在し, また明らかに (ω, S) は β -model.

系 1.10. $ATR_0 + (\Sigma'_\infty\text{-TI}) \vdash \Pi'_1\text{-CA}_0$.

(証明) 補題 1.7-9 より, $\Pi'_1\text{-CA}_0 \vdash \text{Con}(ATR_0 + \Sigma'_\infty\text{-TI})$. 従って, $ATR_0 + \Sigma'_\infty\text{-TI} \vdash \Pi'_1\text{-CA}_0$ は Gödel の不完全性定理に反す. $\square$

注: $\Sigma'_n\text{-ind}$ と $\Pi'_n\text{-ind}$ は同値だが, $(\Sigma'_n\text{-TI})$ と $(\Pi'_n\text{-TI})$ は異なる.
(cf. 定理 1.11-12, 補題 1.13)

定理 1.11 (Simpson). $\Sigma'_1\text{-TI}_0 \equiv ATR_0 + \Sigma'_1\text{-ind}$.

(証明のアイデア) $\subseteq$: $(\Sigma'_1\text{-TI})$ を否定し, 矛盾を導く. $WO(X)$ とし, ある Π'_1 formula φ について, $\exists m \varphi(m)$ かつ $\forall m (\varphi(m) \rightarrow \exists n <_X m \varphi(n))$ と仮定する. ATR_0 では, Π'_1 -uniformization for numbers が証明できる (Π'_1 set は well-ordering のコードの集合と考えられ, ATR_0 では well-ordering に較べられる) から, ある Π'_1 formula $\psi(m, n)$ が存在して,

$$\varphi(m) \rightarrow \exists n! \psi(m, n),$$

$$\psi(m, n) \rightarrow n <_X m \wedge \varphi(n).$$

$\varphi(m)$ となる m を固定し, $\Pi'_1\text{-ind} (\Leftrightarrow \Sigma'_1\text{-ind})$ を用いて,

$$\forall k \exists! \sigma [\sigma(0)=m \wedge \forall i <_k \psi(\sigma(i), \sigma(i+1))]$$

がいえる. $(\Delta'_1\text{-CA})$ により

$$f(0)=m \wedge \forall i \psi(f(i), f(i+1))$$

となる f が存在する. すなわち, $\forall i f(i+1) <_x f(i)$ であるから,
 $WO(X)$ と矛盾する.

$\exists$: $\varphi(j)$ を "hyperarith. hierarchy が $<_x$ に沿って j まで存在する" という命題にする. $\varphi(j)$ は Σ'_1 で, $<_x$ に沿っての各 step は ACA_0 で証明できるから, $\Sigma'_1\text{-TI}_0$ において $\forall j \varphi(j)$, すなわち (ATR) が成り立つ. $\square$

注: $ATR_0 \vdash \Sigma'_1\text{-ind}$ (後述).

定理 1.12 (Howard-Kreisel) $\Pi'_1\text{-TI}_0 \equiv \Sigma'_1\text{-DC}_0$.

(証明の概略) $\subseteq$: $\varphi(n) \equiv \exists X \theta(n, X)$ with $\theta \in \Pi'_0$ として,

$$\forall n (\varphi(n) \rightarrow \exists m <_x n \varphi(m)), \quad \text{すなわち}$$

$$\forall n \forall X \exists m \exists Y (m <_x n \wedge (\theta(n, X) \rightarrow \theta(m, Y)))$$

と仮定すると, $(\Sigma'_1\text{-DC})$ から $\sim \theta(X)$. よって $(\Pi'_1\text{-TI})$ の対偶が示された.

$\exists: \forall f \exists g \forall n \theta(f \upharpoonright n, g \upharpoonright n) \rightarrow \exists h \forall k \forall n \theta(h_k \upharpoonright n, h_{k+1} \upharpoonright n)$ with $\theta \in \Pi_1^1$ を示せばよい。いま, tree $T (\subseteq \omega^{<\omega})$ を下のように定義する:

$$T = \{t: \forall k < \text{lh}(t) \forall n \leq \min(\text{lh}(t_k), \text{lh}(t_{k+1})) \theta(t_k \upharpoonright n, t_{k+1} \upharpoonright n)\}.$$

h が T の infinite path なら, $\forall k \forall n \theta(h_k \upharpoonright n, h_{k+1} \upharpoonright n)$ となるから, その結論を否定し, T が well-founded と仮定する。そこで,

$$t \in T \text{ が good} \Leftrightarrow \exists h \forall k < \text{lh}(t) \forall n \theta(h_k \upharpoonright n, h_{k+1} \upharpoonright n) \& h \upharpoonright \text{lh}(t) = t$$

と定義する。明らかに, 空列は good である。また, $\forall f \exists g \forall n \theta$ の仮定から, good sequence は good extension (T の Kleene-Brouwer ordering においてはより小さな sequence) をもつ。goodness は Σ_1^1 述語だから, $(\Pi_1^1 - \text{TI})$ より T は (K. B. ordering に関して) well-ordered である。すなわち, 矛盾が得られた。 $\square$

補題 1.13. $\Sigma_1^1\text{-DC}_0 + \Sigma_\infty^1\text{-ind} \vdash \text{ATR}_0$, $\text{ATR}_0 + \Sigma_\infty^1\text{-ind} \vdash \Sigma_1^1\text{-DC}_0$.

(証明) 前半は, $(\omega, \text{HYP}) \vdash \Sigma_1^1\text{-DC}_0 + \Sigma_\infty^1\text{-ind} + \neg \text{ATR}_0$ より明らか。 $\sigma \equiv \forall X \exists Y \theta(X, Y)$ with $\theta \in \Pi_0^1$ として σ の成立を仮定する。 $(\Sigma_1^1\text{-DC})$ により $\forall n \theta((Z)_n, (Z)_{n+1})$ となる $Z = \{(Z)_n\}$ が存在して, $(\omega, Z) \models \sigma$ 。また $\varphi \in \Sigma_\infty^1$ に対して, φ^Z は Σ_0^1 in Z だから, $(\omega, Z) \models \Sigma_\infty^1\text{-ind}$ が $\Sigma_1^1\text{-DC}_0$ で証明できる。従って, $\Sigma_1^1\text{-DC}_0 + \sigma \vdash \text{Con}(\sigma + \Sigma_\infty^1\text{-ind})$ 。いま, $\sigma = (\text{ATR})$ とすれば, $\text{ATR}_0 + \Sigma_\infty^1\text{-ind} \vdash \Sigma_1^1\text{-DC}_0$ は Gödel の不完全性定理に反す。 $\square$

次の目標は, $\Sigma_1^1\text{-ACA}_0$ が ACA_0 の Π_2^1 -保存的拡大になるという Barwise - Schlipf の結果を紹介することであるが, その為により の準備が必要である.

定義 1.5. $\mathcal{L}$ を可算個の記号からなる 1 階の言語とする. $\mathcal{L}$ における可算構造 $\mathcal{M}$ が recursively saturated $\Leftrightarrow$ 任意の formulas の rec. 集合 $\{\varphi_i(x, v_1, \dots, v_k)\}$ に対して,

$$\begin{aligned} \forall b_1, \dots, b_k \in M \left[\forall j \exists a \in M \forall i \leq j \mathcal{M} \models \varphi_i(a, b_1, \dots, b_k) \right. \\ \left. \rightarrow \exists a \in M \forall i \mathcal{M} \models \varphi_i(a, b_1, \dots, b_k) \right]. \end{aligned}$$

命題 1.14. 可算言語 $\mathcal{L}$ における無矛盾な文の集合は, rec. sat. な可算モデルをもつ.

(証明) 可算言語における無矛盾な集合は, 可算モデル $\mathcal{M}_0$ をもつ. いま,

$S_1 =$ elementary diagram of $\mathcal{M}_0$. ($\mathcal{M}_0$ で成立する formula 全体)

$$\cup \left\{ \exists x \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(x, b_1, \dots, b_k) \rightarrow \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} \varphi_i(c_{\Phi, b_1, \dots, b_k}, b_1, \dots, b_k) : \right.$$

$\Phi = \{\varphi_i(x, v_1, \dots, v_k)\}$ は rec., $b_1, \dots, b_k \in M$

$c_{\Phi, b_1, \dots, b_k}$ は新しい定数記号

とおくと, コンパクト性定理から S_1 は可算 model $\mathcal{M}_1 \succ \mathcal{M}_0$ をもつ。
 そして, $\mathcal{M}_0$ で *finitely satisfiable* な 1-type $\{\varphi_i(x, b_1, \dots, b_{k_i})\}$ は $\mathcal{M}_1$ で
satisfiable になる。同様に, $\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_2$ から $\mathcal{M}_3, \dots$ を作って,
 $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$ が求めるものとなる。 $\square$

L を 1 階算術の言語とし, これに可算個の 1 変数述語記号
 (又は集合定数記号) $A_1, A_2, \dots$ を加えた言語を $L(\bar{A})$ で表わす。
 $L(\bar{A})$ の構造 $(M, \bar{A}^M) = (M, A_1^M, A_2^M, \dots)$ が与えられたとき,

$$(A_n^M)_b = \{a \in M : (M, \bar{A}^M) \models (a, b) \in A_n\}$$

と定め, そして

$$S_M = \{(A_n^M)_b : n \in \mathbb{N}, b \in M\}$$

とおく。

補題 1.15. $\varphi(e, m, X)$ を universal Σ_1^0 formula とする。そして $(M, \bar{A}^M)$
 を 基本算術公理, Σ_1^0 -ind, 及びすべての $n \in \mathbb{N}$ について

$$(*) \quad \forall e \exists j \forall m (\varphi(e, m, A_n) \leftrightarrow m \in (A_{n+1})_j)$$

の rec. sat. モデルとすれば, $(M, S_M) \models \Sigma_1^0\text{-AC}_0$ 。

注: 定理 1.16 のためには, (*) において $j=e$ の場合を考えれば十分. この形は定理 1.17 で必要となる.

(証明) 上の補題の条件の下で $(M, S_M) \models ACA_0$ は容易にわかる. あとは, $(M, S_M) \models (\Pi'_0 - AC)$ をいえば十分 (補題 1.1). いま, (M, S_M) において, $\forall x \exists Y \theta(x, Y)$ with $\theta \in \Pi'_0$ が成立すると仮定する. このとき, $(M, A^M) \models \forall x \exists y \theta(x, (A_n)_y)$ となる n が存在する. そうでないと, $\{\sim \exists y \theta(x, (A_n)_y) : n \in \mathbb{N}\}$ は finite sat. だから sat. になり, ある $a \in M$ に対して,

$$(M, A^M) \models \sim \exists y \theta(a, (A_n)_y) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}$$

よって, $(M, S_M) \models \sim \exists Y \theta(a, Y)$ となり, 最初の仮定に反する.

さてそこで, $(M, S_M) \models \exists W \forall x \exists y \theta(x, (W)_y)$ となる. 最後に $(M, S_M) \models ACA_0$ から, $(M, S_M) \models \exists Y \forall x \theta(x, (Y)_x)$ が容易に得られる. よって, $(M, S_M) \models \Sigma'_1 - AC_0$ が示された. $\square$

定理 1.16 (Barwise-Schlipf). $\forall \sigma \in \Pi'_2 \quad \Sigma'_2 - AC_0 \vdash \sigma \Rightarrow ACA_0 \vdash \sigma$.

(証明) $\sigma \equiv \forall x \exists Y \theta(x, Y)$ with $\theta \in \Pi'_0$ とし, $ACA_0 \not\vdash \sigma$ と仮定する. Gödel の完全性定理から, $(M, S) \models ACA_0 + \sim \sigma$ となるモデル (M, S) がある. いま, $(M, S) \models \sim \exists Y \theta(A_0^M, Y)$ となる $A_0^M \in S$ を

選ぶ。 $(M, S) \models ACA_0$ だから、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して帰納的に、

$$(M, S) \models \forall e \forall m (\varphi(e, m, A_n^M) \leftrightarrow m \in (A_{n+1}^M)_e)$$

となる $A_{n+1}^M \in S$ が選べる。こうして作られる $(M, \bar{A}^M)$ は基本算術公理, $\Sigma_1^0\text{-ind}$, $\forall e \forall m (\varphi(e, m, A_n) \leftrightarrow m \in (A_{n+1})_e)$ ($n \in \mathbb{N}$), $\sim \exists y \theta(A_0, (A_n)_y)$ ($n \in \mathbb{N}$) のモデルになるから、これらの formula の集合は無矛盾であり、命題 1.14 よりその rec. sat. な可算モデル $(\tilde{M}, \tilde{A}^{\tilde{M}})$ が存在する。補題 1.15 のように $S_{\tilde{M}}$ を定義すれば、

$$(\tilde{M}, S_{\tilde{M}}) \models \Sigma_1^1\text{-}AC_0 + \sim \exists Y \theta(A_0^{\tilde{M}}, Y).$$

よって、 $\Sigma_1^1\text{-}AC_0 + \neg \sigma$ は無矛盾となり、 $\Sigma_1^1\text{-}AC_0 \nVdash \sigma$ を得る。 $\square$

次の補題は、上の定理の証明と類似の方法で示される。

補題 1.17. $\Sigma_1^1\text{-}AC_0 + \Sigma_1^1\text{-ind} \vdash \forall \sigma \in \Pi_3^1 (" \Sigma_1^1\text{-}AC_0 \vdash \sigma " \rightarrow \text{"}\sigma \text{ is true"}).$

(証明) $\sigma \equiv \forall x \exists Y \forall Z \theta(x, Y, Z)$ with $\theta \in \Pi_0^1$ とし、 σ が true でない仮定する。すなわち、 $A_0 \subseteq \mathbb{N}$ が存在して、 $\forall Y \exists Z \sim \theta(A_0, Y, Z)$ 。さて、 $\varphi(e, m, X)$ を universal Σ_1^1 とし、

$$\begin{aligned} \psi(x, Y, Z) \equiv & \forall e \exists j \forall m (\varphi(e, m, Y) \leftrightarrow m \in (Z)_j) \\ & \wedge \forall i \exists j \sim \theta(x, (Y)_i, (Z)_j) \end{aligned}$$

とおく。そして、基本算術公理、 $\Sigma_1^0\text{-ind}$ 及び $\psi(A_0, A_n, A_{n+1})$ ($n \in \mathbb{N}$) が矛盾になることを $\Sigma_1^1\text{-AC}_0 + \Sigma_1^1\text{-ind}$ の下で示す。それらが無矛盾なら、命題 1.14 より rec. sat. な可算モデル $(\tilde{M}, \tilde{A}^{\tilde{M}})$ が存在し、補題 1.15 より $(\tilde{M}, S_{\tilde{M}}) \models \Sigma_1^1\text{-AC}_0$ 。また $(\tilde{M}, S_{\tilde{M}}) \models \sim \sigma$ は明らかで $\Sigma_1^1\text{-AC} \vdash \sigma$ を得る。このとき、命題 1.14 と補題 1.15 が ACA₀ で証明できることに注意する。

さて、 $\forall Y \exists Z \sim \theta(A_0, Y, Z)$ から $\forall Y \forall i \exists Z \sim \theta(A_0, (Y)_i, Z)$ がまずいえる。そこで、 $(\Sigma_1^1\text{-AC})_1$ により $\forall Y \exists Z \forall i \sim \theta(A_0, (Y)_i, (Z)_i)$ 。そして、 $(\Pi_1^0\text{-CA})$ を使えば $\forall Y \exists Z \psi(A_0, Y, Z)$ が得られる。最後に、 $\Sigma_1^1\text{-ind}$ により、

$$\forall n \exists W ((W)_0 = A_0 \wedge (\forall i < n) \psi(A_0, (W)_i, (W)_{i+1}))$$

を得る。すると、基本算術公理、 $\Sigma_1^0\text{-ind}$ 及び $\psi(A_0, A_i, A_{i+1})$ ($i < n$) は無矛盾であり、 n は任意だから全体が無矛盾になる。以上で、証明が完了した。 $\square$

定理 1.18. $ATR_0 \not\vdash \Sigma_1^1\text{-ind}$.

(証明) $ATR_0 + \Sigma_1^1\text{-ind} \vdash \sim \text{Con}(ATR_0) \rightarrow " \Sigma_1^1\text{-AC}_0 \vdash \sim (ATR) " \rightarrow \sim (ATR)$ (by 補題 1.17). よって、 $ATR_0 + \Sigma_1^1\text{-ind} \vdash \text{Con}(ATR_0)$. $ATR_0 \vdash \Sigma_1^1\text{-ind}$ は Gödel の不完全性定理と矛盾する。 $\square$

§2. WKL₀に関する Harrington の結果

本節では, WKL₀が RCA₀の Π^1_1 -保存的拡大になるという Harrington の結果を紹介する。証明に入る前に, そこで用いられる forcing の技法の基本を復習しておく。

半順序集合 $(P, <)$ を任意に固定し, $p, q, r, \dots$ で P の元を表わす。

定義 2.1. $G \subseteq P$ は open iff $q < p \in P \Rightarrow q \in P$.

記法: $[p] = \{q \in P : q \leq p\}$.

注: open set G は $\bigcup_{p \in G} [p]$ と一致するから, $\{[p] : p \in P\}$ は open base を形成する。

定義 2.2. $D \subseteq P$ は dense iff $\forall p [p] \cap D \neq \emptyset$
(すなわち, iff $\forall p. \exists d \in D \ d \leq p$).

定義 2.3. $F \subseteq P$ は (強) filter iff i) $q > p \in F \Rightarrow q \in F$,
ii) $\forall p, q \in F [p] \cap [q] \cap F \neq \emptyset$.

定義 2.4. filter G が M-generic iff $\forall D \in M (D \subseteq P \text{ dense} \Rightarrow G \cap D \neq \emptyset)$.

命題 2.1. (Generic Existence Thm.) M が P の dense subset を高々可算個しか含まないとき, 任意 $p \in P$ に対し, p を要素とする M -generic filter G が存在する。

(証明) M に含まれる P の dense subsets を並べ上げ, $D_0, D_1, \dots, D_i, \dots$ (iew) とする. $p \in P$ が任意に与えられたとし, P の要素の減少列 $p_0 \geq p_1 \geq \dots$ を次のように作る: まず $p_0 = p$ とおき, 各 $n > 0$ に対しては $p_n \in [p_{n-1}] \cap D_{n-1}$ となる元 p_n を選ぶ. そして, $G = \{q : \exists i \ p_i \leq q\}$ とおけば, 明らかに $p \in G$ かつ G は M -generic filter である. $\square$

Digression: M を ZFC の可算推移的モデル, $(P, <) \in M$ かつ P は最大元 $|_P$ をもつとする. G を M -generic filter とすれば, 一般に $G \notin M$ である. いま, 各 $a \in M$ に対して帰納的に $a^G \equiv \{b^G : \exists p \in G \langle b, p \rangle \in a\}$ と定め, $M[G] \equiv \{a^G : a \in M\}$ とおく. M の中で $M[G]$ について直接議論することは出来ないうが,

$$p \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ iff for every generic } G \ni p, M[G] \models \varphi(a_1^G, \dots, a_n^G)$$

によって $\Vdash$ の関係を導入すると, 驚くべきことに $\Vdash$ は M で定義可能である (Definability Lem.). さらに, 任意の generic filter G について,

$$M[G] \models \varphi(a_1^G, \dots, a_n^G) \text{ iff } \exists p \in G \ p \Vdash \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ (Truth Lem.)}$$

が成立するので, $M[G] \models \sigma$ を示すにはある $p \in G$ に対して $p \Vdash \sigma$ をいえばよく, $p \Vdash \sigma$ は M の中で直接扱えることがポイントである. $\square$

さて, Harringtonの証明に入る. まず, $\mathcal{M} = (M, S)$ を RCA_0 の可算モデルとする. ここで, M は non-standard な元を含めた自然数の集合で, $S \subseteq P(M)$ とする. そして,

$$P = \{ T \in S : \mathcal{M} \models T \text{ is an infinite subtree of } \{0,1\}^{<\omega} \}$$

とおき, さらに

$$T_1 \leq T_2 \quad \text{iff} \quad T_1 \subseteq T_2$$

によって, P に半順序を入れる. このとき,

$$D \subseteq P \text{ は } \underline{\text{dense}} \quad \text{iff} \quad \forall T \in P \exists T' \in D \quad T' \leq T$$

となる.

定義 2.5. $X \subseteq P$ が $\mathcal{M}$ -definable, $X \in \text{Def}(\mathcal{M})$ iff ある formula $\varphi(X)$ ($M \cup S$ の要素をパラメタとして含んでよい) が存在して,

$$X = \{ T \in P : \mathcal{M} \models \varphi(T) \}.$$

補題 2.2. $F \subseteq P$ が $\text{Def}(\mathcal{M})$ -generic filter ならば, すべての $T \in F$ は共通の infinite path $G = \bigcap F$ をもつ. (すなわち, T は G で生成される principal filter ($\subseteq P(M)$) に含まれる. 一般に $G \in P$ ではない.)

(証明) 任意の $l \in M$ に対し, $E_l = \{T \in P : \exists s \in \{0,1\}^l T \subseteq s \wedge \{0,1\}^{<\omega}\}$ は dense かつ $\mathcal{M}$ -definable である. F を $\text{Def}(\mathcal{M})$ -generic filter とすれば, 各 l に対し,

$$T_l \subseteq S_l \wedge \{0,1\}^{<\omega} \text{ for some } S_l \in \{0,1\}^l$$

となる $T_l \in F$ がある. $l < l'$ ならば, S_l は $S_{l'}$ の initial segment かつ $S_{l'} \in T_{l'}$ となる. そうでないと, $[T_l] \cap [T_{l'}] = \emptyset$ となって, F の filter 条件を崩す. そこで, $G = \bigcup_{l \in M} S_l$ とおけば $G = \bigcap_l T_l$ である. 最後に, $G = \bigcap F$ をいう. $G \not\subseteq T \in F$ ならば, $S_l \not\subseteq T$ となる l が存在し, $[T] \cap [T_l] = \emptyset$ となって矛盾する. $\square$

定義 2.6. $G (\subseteq M)$ が $\mathcal{M}$ -generic path iff $\forall \text{dense } D \in \text{Def}(\mathcal{M}) \exists T \in D$
 G は T の infinite path である.

補題 2.3. すべての $T \in P$ は, $\mathcal{M}$ -generic path G をもつ.

(証明) $\text{Def}(\mathcal{M})$ は可算集合だから, 命題 2.1 よりすべての T はある $\text{Def}(\mathcal{M})$ -generic filter F に含まれる. さらに, 補題 2.2 により F の tree には共通の path G が存在する. この G が $\mathcal{M}$ -generic path になることは定義から明らか. $\square$

補題 2.4. G を $\mathcal{M}$ -generic graph とすれば, $(M, S \cup \{G\}) \models \Sigma_1^0\text{-ind}$.

(証明) $\varphi(i, X)$ を任意の Σ_1^0 formula とし, $\varphi(0, G)$ から $\forall n (\varphi(n, G) \rightarrow \varphi(n+1, G))$ を仮定する. $b \in M$ を任意に選び, $\varphi(b, G)$ を示せばよい. $X = \{a \leq_M b : \varphi(a, G)\} \in S$ がいえれば, $\mathcal{M} \models (\Delta_1^0\text{-CA})$ より $Y = \{a : a \in X \vee a \geq_M b\} \in S$. 又, $0 \in Y$ から $\forall m (m \in Y \rightarrow m+1 \in Y)$ は明らかだから, $\mathcal{M} \models \Sigma_1^0\text{-ind}$ より $Y = M$, よって $b \in X$, つまり $\varphi(b, G)$ を得る. 従って, あとは $X \in S$ を示せば十分.

いま $\varphi(i, X) \equiv \exists j \theta(i, X \upharpoonright j)$, $\theta \in \Sigma_0^0$, とし,

$$D_b \equiv \left\{ T \in P : \begin{array}{l} \textcircled{1} \forall a \leq b \quad \textcircled{1} \forall t \in T \sim \theta(a, t) \quad \vee \\ \textcircled{2} \exists k \forall t \in T \cap \{0, 1\}^k \exists s \leq t \theta(a, s) \end{array} \right\}$$

とおく. もちろん D_b は $\mathcal{M}$ -definable であり, また下には示すように dense になる. 従って, path G を持つ tree T_0 が D_b の中に存在する. 各 $a \leq_M b$ に対して,

$$\mathcal{M} \models \textcircled{1} \text{ with } T = T_0 \quad \Rightarrow \quad (M, S \cup \{G\}) \models \neg \varphi(a, G),$$

$$\mathcal{M} \models \textcircled{2} \text{ with } T = T_0 \quad \Rightarrow \quad (M, S \cup \{G\}) \models \varphi(a, G)$$

であり, から $\mathcal{M} \models \textcircled{1} \vee \textcircled{2} \text{ with } T = T_0$ だから,

$$\mathcal{M} \models \textcircled{2} \text{ with } T = T_0 \quad \Leftrightarrow \quad (M, S \cup \{G\}) \models \varphi(a, G).$$

② は Σ_1^0 -formula (或は①が Π_1^0) で $\mathcal{M} \models (\text{finite } \Sigma_1^0\text{-CA})$ [補題0.3] だから, $X = \{a \leq_M b : \mathcal{M} \models \text{② with } T = T_0\} \in S$ となる。

最後に, D_b が dense になることを示そう。 $T \in P$ を任意に選ぶ。各 $\sigma \in \{0, 1\}^{<\omega}$ に対し, tree T_σ を次のように定義する:

$$T_{\langle \rangle} = T,$$

$$T_{\sigma \wedge \langle 0 \rangle} = \{t \in T_\sigma : \forall s \leq t \sim \theta(a, s)\} \quad \text{但し } a = \text{length}(\sigma),$$

$$T_{\sigma \wedge \langle 1 \rangle} = T_\sigma.$$

そして, $S_b = \{\sigma \in \{0, 1\}^{b+1} : T_\sigma \text{ は infinite}\}$ とおく。ここで,

$$T_{\sigma \wedge \langle 0 \rangle} \text{ が infinite} \iff T_\sigma \text{ が infinite} \ \& \ \neg \text{② with } \begin{matrix} a = \text{length}(\sigma) \\ T = T_\sigma \end{matrix}$$

が直ちにいえるので, 再び (finite Σ_1^0 -CA) によって $S_b \in S$ である。また, $\langle \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{b+1} \rangle \in S_b$ より $S_b \neq \emptyset$ 。いま, σ_b を S_b における辞書式順序の最初の要素とする。 $a \leq_M b$ を任意に選ぶ。 $\sigma_b(a) = 0$ の場合,

$$T_{\sigma_b} \subseteq T_{\sigma_b \wedge \langle 0 \rangle} \subseteq \{t : \sim \theta(a, t)\}$$

だから, ① with $T = T_{\sigma_b}$ がいえる。 $\sigma_b(a) = 1$ のときは, $T_{\sigma_b \wedge \langle 0 \rangle}$ は finite だから, ② with $T = T_{\sigma_b \wedge \langle 0 \rangle}$, 従って ② with $T = T_{\sigma_b}$ も成り立つ。以上から $T_{\sigma_b} \in D_b$ となり, D_b が dense になることが示された。

□

$T \in P$ の $\mathcal{M}$ -generic path G を固定し,

$$S^T = \{X \subseteq M : X \text{ は } \Delta_1^0 \text{ definable over } (M, S \cup \{G\})\}$$

とおくと, 次の補題が得られる.

補題 2.5. $(M, S^T) \models \text{RCA}_0 + T$ は infinite path をもつ

(証明) S^T の要素をパラメタとする Σ_1^0 formula φ に対し, $S \cup \{G\}$ の要素だけをパラメタとする Σ_1^0 formula で それと同値なもの ψ が存在する. これは Σ_1^0 induction で証明されるが概略は次のようである. φ が S^T の要素 X をパラメタにもつとする. X は Δ_1^0 def. over $(M, S \cup \{G\})$ だから, $S \cup \{G\}$ の要素をパラメタとする Σ_1^0 formula X_1, X_2 が存在して, $n \in X \leftrightarrow X_1(n) \leftrightarrow \neg X_2(n)$ である. φ に現れる $t \in X$ を $X_1(t)$ または $\neg X_2(t)$ で置き換え, さらに他のパラメタについても同様な置換をすれば, いくつかの Σ_1^0 formula を $\wedge, \vee, \forall n < t, \exists n < t, \exists n$ でつなげた formula で $S \cup \{G\}$ の要素だけをパラメタとするものが得られる. これを厳密な Σ_1^0 formula に変形する操作は普通と変わらない. キー・ポイントは, $\forall i < t \exists j \theta(i, j)$ から $\exists n \forall i < t \theta(i, (n)_i)$ を導くとき, $n \leq t$ に関する Σ_1^0 ind. で $\exists n \forall i < m \theta(i, (n)_i)$ を証明することである.

上の事実と補題 2.4 より, $(M, S^T) \models \text{RCA}_0$ が直ちにいえる. また, $(M, S^T) \models T$ は path G をもつ. $\square$

補題 2.6. $S \subseteq S_\infty \subseteq \mathcal{P}(M)$ となる S_∞ が存在し, $(M, S_\infty) \models \text{WKL}_0$.

(証明) $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$ を次のように作る。

$$S_0 = S,$$

$$S_{(n,m)+1} = S_{(n,m)}^T, \quad \text{但し, } T \text{ は } S_n (\subseteq S_{(n,m)}) \text{ に含まれる}$$

m 番目の infinite tree, かつ

$$(n, m) = (n+m)(n+m+1)/2 + n.$$

そして, $S_\infty = \bigcup_{i \in \omega} S_i$ とすればよい. $\square$

定理 2.7 (Harrington) $\forall \sigma \in \Pi_1' \quad \text{WKL}_0 \vdash \sigma \Rightarrow \text{RCA}_0 \vdash \sigma$.

(証明) σ を RCA_0 で証明されない Π_1' 文とする. Gödel の完全性定理から, $(M, S) \models \text{RCA}_0 + \neg \sigma$ となる可算モデル (M, S) が存在する. $\neg \sigma \leftrightarrow \exists X \varphi(X)$ with $\varphi \in \Pi_0'$ とすると, $A \in S$ が存在し, $(M, S) \models \text{RCA}_0 + \varphi(A)$ となる. 上の補題により S_∞ を構成すれば, $(M, S_\infty) \models \text{WKL}_0 + \varphi(A)$ である. ここで, $\varphi(X)$ は算術的だから, $\varphi(A)$ の真偽は M と A のみに依存していることに注意する. そして, $(M, S_\infty) \models \text{WKL}_0 + \neg \sigma$, つまり $\text{WKL}_0 + \neg \sigma$ は無矛盾だから $\text{WKL}_0 \vdash \sigma$. $\square$

§3. WKL₀に関する Friedman の結果

本節では、WKL₀が PRA の Π_2^0 -保存的拡大になるという H. Friedman の結果を紹介する。PRA は Primitive Recursive Arithmetic の頭文字をとったもので、自然数の順序と和積演算に関する普通の 1 階算術の公理に加えて、すべての prim. rec. 関数 f に対してその定義式を公理としてもち、そして $\Sigma_1^0\text{-ind.}$ を備えた体系である。言語が拡張されているから、formula やその階層も厳密には定義し直さねばならないが、それは自然な仕方とされるものとして読者に委ねる。また、よく知られた基本事実として、 $\Sigma_1^0\text{-ind.}$ は PRA で証明できる (cf. Girard, "Proof Theory and Logical Complexity, vol. 1," Bibliopolis, 1987)。PRA は ヒルベルトの 有限の立場 の形式化と考えられるから、Friedman の結果は ヒルベルトのプログラム に対し重要な意味をもつ (cf. 田中一之, '逆・数学' と 2 階算術の証明論, 数学 42 (1990), 244-260)。

一般に、PRA のモデルは $(M, +^M, \cdot^M, 0^M, 1^M, <^M, f_0^M, f_1^M, \dots)$ の形で与えられるが、 $F = \{f_0^M, f_1^M, \dots\}$ として簡単に (M, F) で表わす。

さて、Friedman の結果の証明に入る前に、Kirby と Paris ("Initial segments of models of Peano's axioms," Lec. Notes Math. 619 (), 211-226) によって導入された semi-regular cut の概念を復習しておく。以下、PRA のモデル (M, F) を 1 つ固定して議論を進める。

素数を小さい方から並べ上げる prim. rec. 関数を $p \in F$ とする (すなわち, $p(0)=2, p(1)=3, p(2)=5, \dots$).

定義 3.1. 集合 $X (\subseteq M)$ が コード $c \in M$ をもつ iff

$$X = \{n \in M : M \models \exists d < c \ c = p(n) \cdot d\}.$$

コードをもつ集合 X を M-finite と呼び, その要素の数を $|X|$ または $|c|$ (c は X のコード) で表わす。

注: $|c|$ は M 上の prim. rec. 関数, すなわち $|c| \in F$ である。また, コード c をもつ集合 $X (\neq \emptyset)$ の最大元を $\max(c)$ と表わすと, $\max \in F$ である。

記法: $I \subseteq_e M$ は, I が M の (proper) initial segment であつ successor に関して閉じていることを表わす。このとき, I を M の cut と呼ぶ。

定義 3.2. $I \subseteq_e M$ が semi-regular cut iff すべての M -finite set X に対し,

$$|X| \in I \Rightarrow X \cap I \text{ は bounded in } I.$$

注: $b \in I$ を $X \cap I$ の上界とすると, $X \cap I = \{a <^M b : a \in I\}$ は M -finite で最大元をもつ。semi-regular cut は集合論の regular ordinal の analogue である。また, $\mathbb{N} \subseteq M$ は常に semi-regular である。

命題 3.1 (Kirby-Paris). $I \in_e M$ が semi-regular ならば,

$$(I, FII) \not\models \text{PRA}.$$

(証明) まず, I が prim. rec. 関数に関して閉じていることをいう。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 1変数の prim. rec. 関数 g_n を次のように定める:

$$g_0(x) = x + 1,$$

$$g_{n+1}(x) = \overbrace{g_n g_n \cdots g_n}^{x+2^2}(x).$$

すると, 任意の prim. rec. 関数 f に対し, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\text{PRA} \vdash f(x_1, x_2, \dots, x_k) < g_n(\max\{x_1, x_2, \dots, x_k\})$$

が、えるから, I が各 g_n に関して閉じていることをいえば十分である。 I は successor に関して閉じているから, $n=0$ の場合は成立。いま, g_n で成り立ち, g_{n+1} で成り立たないとして矛盾を導く。 $g_{n+1}^M(a) \notin I$ となる $a \in I$ を選び,

$$X = \{g_n^M(a), g_n^M g_n^M(a), \dots, \overbrace{g_n^M g_n^M \cdots g_n^M}^{a+2^2}(a)\}$$

とおく。 $|X| = a+2 \in I$ だから, $X \cap I$ は bounded となり最大元 b が存在する。しかし, I は g_n に関して閉じているから, $g_n^M(b) \in X \cap I$ となり, b の最大性に反する。

上のことから, $(I, F \upharpoonright I)$ は (M, F) の substructure と考えることが出来て, Σ_0^0 formula については 2つの構造における真偽値が一致している。いま, $\varphi(x)$ を Σ_0^0 formula として, $(I, F \upharpoonright I) \models \varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$ と仮定する。 $c \in I$ を任意に定め, $\psi(x) \equiv \varphi(x) \vee c < x$ とおくと, $\psi(x)$ も Σ_0^0 formula で, $(M, F) \models \psi(0) \wedge \forall x (\psi(x) \rightarrow \psi(x+1))$ がいえる。 $(M, F) \models \Sigma_0^0\text{-ind}$ だから $(M, F) \models \forall x \psi(x)$, 従って $(I, F \upharpoonright I) \models \forall x \psi(x)$ 。特に $\psi(c) \leftrightarrow \varphi(c)$ だから $(I, F \upharpoonright I) \models \varphi(c)$ 。 c は任意なので, $(I, F \upharpoonright I) \models \forall x \varphi(x)$ を得る。すなわち, $(I, F \upharpoonright I)$ は $\Sigma_0^0\text{-ind}$ を満たし, PRA のモデルになる。 $\square$

定義 3.3. $I \subseteq_e M$ が与えられたとき, $B \subseteq I$ が M-coded iff M-finite set X が存在して,

$$B = X \cap I.$$

記法: $S_I = \{B \subseteq I : B \text{ は } M\text{-coded}\}$

補題 3.2. $I \subseteq_e M$ が semi-regular ならば,

$$(I, S_I) \models \text{WKL}_0.$$

注: I 上の和積演算 $+^I, \cdot^I$ などは, M 上の演算 $+, \cdot$ を I に制限することで与えられる。

(証明) (I, S_I) が順序と和積演算の公理を満たすことは問題ない。

あと示すべきことは $(\Delta_1^0 - CA)$, weak König's lemma 及び $\Sigma_1^0\text{-ind}$ だが, まず induction から取り掛かる. $I \cup S_I$ の要素をパラメタとして持つ formula φ に対し, すべての集合パラメタ $B \in S_I$ を対応する M -finite set X (i.e., $B = X \cap I$) で置き換えてできる formula を φ^* で表わす. もっと厳密に言えば, X のコードを c として, " $t \in B$ " を " $\exists d < c \quad c = p(t) \cdot d$ " で置き換える. このとき, φ が Σ_0^0 formula ならば, 任意の $a \in I$ に対し,

$$(I, S_I) \models \varphi(a) \iff (M, F) \models \varphi^*(a)$$

が成立するので, 命題 3.1 の証明と同様にして $(I, S_I) \models \Sigma_0^0\text{-ind}$ が示される.

次に, $\varphi(x) \equiv \exists y \theta(x, y)$ with $\theta \in \Sigma_0^0$ として, $(I, S_I) \models \varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$ と仮定する. 任意の c に対して, $(I, S_I) \models \varphi(c)$ を示すことが我々の目的である. いま, $c \in I, d \in M - I$ を任意にとり, $Z = \{(a, b) : a <^M c, b <^M d \text{ \& } (M, F) \models \theta^*(a, b) \wedge \forall x < b \neg \theta^*(a, x)\}$ とおく. Z が M -finite で $|Z| \leq^M c$ となることは明らかだから, I の semi-regularity から $Z \cap (I \times I)$ は bounded, つまり $d' \in I$ が存在して, すべての $a <^M c$ について,

$$\exists b \in I (a, b) \in Z \iff \exists b < d' (a, b) \in Z.$$

従って, すべての $a <^M c$ に対して,

$$\begin{aligned}
 (I, S_I) \models \varphi(a) &\Leftrightarrow \exists b \in I (I, S_I) \models \theta(a, b) \\
 &\Leftrightarrow \exists b \in I (M, F) \models \theta^*(a, b) \\
 &\Leftrightarrow \exists b <^{M d'} (M, F) \models \theta^*(a, b) \\
 &\Leftrightarrow (M, F) \models \exists y < d' \theta^*(a, y)
 \end{aligned}$$

となる。 $\exists y < d' \theta^*(a, y)$ は Σ_0^0 formula で $(M, F) \models \Sigma_0^0\text{-ind}$ だから, すべての $a <^M c$ について $(I, S_I) \models \varphi(a)$ 。 $c \in I$ は任意に選んだので, $(I, S_I) \models \forall x \varphi(x)$ となる。

残るは $(\Delta_1^0\text{-CA})$ と weak König's lemma であるが, 我々はこの両者を合わせたものと同値な $(\Sigma_1^0\text{-SP})$ を示そう。 $\varphi_i(x) \equiv \exists y \theta_i(x, y)$ with $\theta_i(x, y) \in \Sigma_0^0$ ($i=0, 1$) とし, $(I, S_I) \models \sim \exists x (\varphi_0(x) \wedge \varphi_1(x))$ と仮定する。前と同様, φ の集合パラメタを M -finite set で置き換えた式を φ^* で表わす。いま, $d \in M - I$ を任意にとり,

$$Y = \{a <^M d : \exists b <^M d (M, F) \models \theta_0^*(a, b) \wedge \forall x < b \neg \theta_1^*(a, x)\}$$

とおくと, Y は M -finite だから $Y \cap I \in S_I$ 。そして,

$$(I, S_I) \models \forall a \{(\varphi_0(a) \rightarrow a \in Y \cap I) \wedge (a \in Y \cap I \rightarrow \neg \varphi_1(a))\}$$

も容易にいえるから, $(I, S_I) \models (\Sigma_1^0\text{-Sep})$ 。以上から, $(I, S_I) \models \text{WKL}_0$ が証明された。 $\square$

次の補題は, Friedmanの定理(定理3.4)の証明の中核となるもので, 命題3.1の逆を弱めた形と考えられる.

補題3.3 (M, F) をPRAの可算モデルとする. $c, d \in M$ として, すべての prim. rec. 関数 f に対して $f^M(c, c, \dots, c) <^M d$ と仮定する. このとき, $c \in I$ で $d \notin I$ となる semi-regular cut $I \subseteq_e M$ が存在する.

注: $c \in M - N$ として, J を $c \in J$ から prim. rec. 関数で閉じた最小の cut とする. すなわち, $\{g_n\}$ を命題3.1の証明の中で作った prim. rec. 関数の列とすれば, $J = \{a \in M : \exists n \ a <^M g_n^M(c)\}$ である. ところが, J が semi-regular ではないことは大よそ次のようにしてわかる. $G_x = g_x(c)$ という関数を考える. G は prim. rec. ではないが, (finite Σ_1^0 -CA) より $X = \{G(0), G(1), \dots, G(c)\}$ が存在し, M -finite になる. すると $|X| \in J$ だが $X \cap J$ は unbounded in J になるから, J は semi-regular ではない. この議論はそもそも $s \in M - N$ に対する g_s を定義してからでないと意味がなく, また補題において求める I を作るにも g_s に匹敵する概念が必要になる. 下の証明の中で定義される prim. rec. 述語 $B(x, y, z)$ は " $g_x(y) \leq z$ " とほぼ同じ内容を PRA で表現したもので, Friedmanの鬼才を示している.

(証明) まず, prim. rec. 述語 $B(x, y, z)$ ("区間 $[y, z) = \{w : y \leq w < z\}$ は x -big である"と読む) を以下のように定義する:

$$B(0, y, z) \iff y < z$$

$$B(x+1, y, z) \iff |X| < y \text{ となる任意の } M\text{-finite set } X \subset [y, z) \text{ に対し,} \\ x\text{-big な区間 } [y', z') \subset [y, z) \text{ で } [y', z') \cap X \\ = \emptyset \text{ となるものが存在する.}$$

$B(x+1, y, z)$ の定義式において, "任意の M -finite set X " というのは, 厳密に言えば "任意の M -finite set のコード c " であり, z 番目の素数を $p(z)$ として "任意の M -finite set のコード $c < \{p(z)\}^M$ " と考えてもよいから, 右辺全体は Σ_0 formula であり, B は prim. rec. に定義されている. (ここで, 述語 B が prim. rec. というのは, その特性関数が prim. rec. のことである.)

さて, すべての prim. rec. 関数 f に対して $f^M(c, \dots, c) <^M d$ となる $c, d \in M$ が与えられたとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $g_n^M(c) <^M d$ だから, また $B(n, c, d)$ となる. 一方, 明らかに $\sim B(d-c, c, d)$ であるから, $\sim B(b', c, d)$ となる最小の数 $b' \in M - \mathbb{N}$ が存在する. そして, $b = b' - 1$ とおく. 後の議論のためには, $\forall a \leq^M b \ B(a, c, d)$ となる non-standard 数 $b \in M - \mathbb{N}$ を一つ選んで固定しておけばよい.

M を可算集合とすると, M -finite sets も可算個しかない. そこで, $\langle X_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を M -finite sets の列で, 各 M -finite sets が無限

四現れるものとする。これを使って、縮小区間列 $[C_n, d_n)_{new}$ を下のように定義する:

$$[C_0, d_0) = [C, d)$$

$$[C_{n+1}, d_{n+1}) = \begin{cases} [C_n, d_n) & |X_n| \geq^M C_n \text{ のとき,} \\ [C'_n, d'_n) & |X_n| <^M C_n \text{ のとき, } [C'_n, d'_n) \subset [C_n, d_n) \\ & \text{は } (b-n)\text{-big で } [C'_n, d'_n) \cap X_n = \emptyset \\ & \text{となるもの(適当に1つ選ぶ).} \end{cases}$$

任意の $a \in M$ に対し, $\{a\}$ は M -finite set だから十分大きな n について $[C_n, d_n) \cap \{a\} = \emptyset$ つまり $a \notin [C_n, d_n)$ となる。従って,
 $\bigcap_{new} [C_n, d_n) = \emptyset$ である。

いま, $I = \{a \in M : \exists n \ a <^M C_n\} = \{a \in M : \forall n \ a <^M d_n\}$ とおき,
 I が semi-regular になっていることを証明しよう。 X が M -finite set で $|X| \in I$ とする。無限個の n について $X = X_n$ となるから,
 $X = X_n$ かつ $|X| <^M C_n$ となる n がある。すると, $[C_{n+1}, d_{n+1}) \cap X = \emptyset$ 。
 従って, C_{n+1} は $X \cap I$ の上界であり, $X \cap I$ は bounded in I となる。
 よって, I は semi-regular である。 $\square$

注: 上の証明において, I は recursive in (M, F) であり, 証明全体を RCA_0 で行うことが出来る。

定理 3.4 (Friedman). $\forall \sigma \in \Pi_1^0 \quad \text{WKL}_0 \vdash \sigma \Rightarrow \text{PRA} \vdash \sigma.$

(証明) $\sigma \equiv \forall y \exists z \theta(y, z)$ with $\theta \in \Sigma_1^0$ を PRA で証明されない (WKL₀ の言語における) Π_1^0 文とする. まず, コンパクト性定理を使って, $\text{PRA} \cup \{ \sim \exists z \theta(c, z) \} \cup \{ f(c, c, \dots, c) < d : f \text{ は prim. rec. 関数記号} \}$ が可算モデル (M, F, c, d) をもつことがいえる. ここで, c と d は新しい定数記号であり, このモデルにおいてはそれぞれ c と d に解釈される. すなわち, PRA の可算モデル (M, F) とその 2 つの元 c, d が補題 3.3 の条件を満たしており, $c \in I$ かつ $d \notin I$ となる semi-regular cut $I \subseteq_e M$ が存在する. $\sim \exists z \theta(c, z)$ は Π_1^0 文で $M \models \sim \exists z \theta(c, z)$ だから, $I \models \sim \exists z \theta(c, z)$ すなわち $I \models \sim \sigma$ である. 次に, 補題 3.2 から $(I, S_I) \models \text{WKL}_0$ がいえる. よって $(I, S_I) \models \text{WKL}_0 + \neg \sigma$ だから, $\text{WKL}_0 + \neg \sigma$ は無矛盾となり, σ は WKL_0 でも証明できない. $\square$

注: 上の定理は WKL_0 で証明可能であり, 自らの定理を適用することで, PRA でも証明可能になる. cf. Simpson-Tanaka, On the strong soundness of the theory of real closed fields, Proc. of the 4th Asian Logic Conf. (1990), 7-10.