

New Duality in $\mathcal{W}$ -algebras

アルバータ大学 元良 直輝

Naoki Genra

University of Alberta

1 頂点代数

[FBZ, K] にしたがって頂点代数の基本的な定義や性質を説明する。 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V がスーパーベクトル空間であるとは、 V が $\mathbb{Z}_2$ 次数付けされている、すなわち $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ ($\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$) のような分解をもつことである。このとき $A \in V_{\bar{i}}$ に対して次数 $\bar{i} \in \mathbb{Z}_2$ を A のパリティと呼び、 $\bar{i} = \bar{0}$ のとき偶 (even), $\bar{i} = \bar{1}$ のとき奇 (odd) という。 $\text{End } V$ は V の次数付けから自然な次数付け、すなわち $(\text{End } V)_{\bar{0}} = \text{End } V_{\bar{0}} \oplus \text{End } V_{\bar{1}}$, $(\text{End } V)_{\bar{1}} = \text{Hom}(V_{\bar{0}}, V_{\bar{1}}) \oplus \text{Hom}(V_{\bar{1}}, V_{\bar{0}})$ が誘導されスーパーベクトル空間になる。さらに $\text{End } V$ はスーパー括弧積 $[A, B] = A \circ B - (-1)^{\bar{A}\bar{B}} B \circ A$ によってスーパー Lie 代数の構造をもつ。ただし $\bar{A}$ は A のパリティである。(スーパー) ベクトル空間 V が (スーパー) 頂点代数であるとは、 0 でない偶ベクトル $|0\rangle \in V$, 偶線形写像 $\partial \in \text{End } V$ さらに偶線形写像

$$Y(\cdot, z): V \times A \mapsto Y(A, z) = A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1} \in \text{End } V[[z, z^{-1}]]$$

が存在し、次のような条件を満たす：

1. 任意の $A, B \in V$ に対し、 $A(z)B = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} B z^{-n-1} \in V[[z]]$.
2. $Y(|0\rangle, z) = \text{Id}_V$. また任意の $A \in V$ に対し $A(z)|0\rangle \in V[[z]]$ であって、 $A(z)|0\rangle|_{z=0} = A$.
3. $\partial|0\rangle = 0$. また任意の $A \in V$ に対し $[\partial, A(z)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\partial, A_{(n)}] z^{-n-1} = \partial_z A(z)$.
4. 任意の $A, B \in V$ に対し、ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し、

$$(z-w)^N [A(z), B(w)] = (z-w)^N \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} [A_{(m)}, B_{(n)}] z^{-m-1} w^{-n-1} = 0.$$

$|0\rangle$ を V の真空ベクトル、 ∂ を V の変換作用素、 $Y(\cdot, z)$ を V の頂点作用素という。1. の条件を満たす $\text{End } V$ 値の形式的べき級数 $A(z)$ を V 上の場と呼ぶ。2つの場 $A(z)$ と $B(z)$ に対して4. の条件が成り立つとき $A(z)$ と $B(z)$ は局所的であるという。2. の条件から $Y(\cdot, z)$ は単射であることがわかる。また $Y(\partial A, z) = \partial_z A(z)$ かつ $\partial A = A_{(-2)}|0\rangle$ であることも導出される。さらに任意の $A, B \in V$ に対し、ある N が存在して

$$[A(z), B(w)] = \sum_{n=0}^N \frac{Y(A_{(n)} B, w)}{(z-w)^{n+1}} \Big|_{|z| > |w|}$$

が成り立つ。このとき

$$A(z)B(w) \sim \sum_{n=0}^N \frac{Y(A_{(n)} B, w)}{(z-w)^{n+1}}$$

と表し $A(z)$ と $B(w)$ の OPE (Operator Product Expansion) という. 任意の $A, B \in V$ に対し,

$$:A(z)B(z): = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \geq 0} A_{(n-m)} B_{(m)} + (-1)^{\bar{A}\bar{B}} \sum_{m < 0} B_{(m)} A_{(n-m)} \right) z^{-n-2}$$

を $A(z)$ と $B(z)$ の NOP (Normally Ordered Product) という. 1. および 4. の条件から $:A(z)B(z):$ は well-defined な場であることがわかる. 一般に任意の $A^1, \dots, A^s \in V$ に対し $:A^1(z)A^2(z)\cdots A^s(z): = :A^1(z)(:A^2(z)\cdots A^s(z):):$ と帰納的に定義する. すると任意の $A^1, \dots, A^s \in V$ および $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$Y(A_{(-n_1)}^1 \cdots A_{(-n_s)}^s | 0), z) = \frac{:\partial_z^{n_1-1} A^1(z) \cdots \partial_z^{n_s-1} A^s(z):}{(n_1-1)! \cdots (n_s-1)!} \quad (1.1)$$

が成り立つ. 逆に (スーパー) ベクトル空間 V の 0 でない偶ベクトル $|0\rangle$, パリティをもつ V の可算部分集合 S , そして任意の $A \in S$ に対し A と同じパリティをもつ V 上の場 $A(z)$ たちであって次の条件を満たすものが存在すると仮定する:

1. 任意の $A \in S$ に対し, $A(z)|0\rangle \in V[z]$ かつ $A(z)|0\rangle|_{z=0} = A$.
2. 任意の $A, B \in S$ に対し, $A(z)$ と $B(z)$ は局所的.
3. $V = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{A_{(-n_1)}^1 \cdots A_{(-n_s)}^s | 0\rangle \mid A^1, \dots, A^s \in S, n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$.

このとき任意の V の元 $A_{(-n_1)}^1 \cdots A_{(-n_s)}^s | 0\rangle$ ($A^1, \dots, A^s \in S, n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) の頂点作用素による行き先を (1.1) によって定義することで V が (スーパー) 頂点代数の構造をもつことが証明できる (再構成定理). ただし変換作用素は $\partial A = A_{(-2)}|0\rangle$ で定義される. このとき V は $A(z)$ ($A \in S$) たちで生成される (スーパー) 頂点代数という.

$(z-w)^{-1}$ の $|z| > |w|$ および $|z| < |w|$ の領域での展開はそれぞれ

$$\frac{1}{z-w} \Big|_{|z|>|w|} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} w^n, \quad \frac{1}{z-w} \Big|_{|z|<|w|} = - \sum_{n=-1}^{\infty} z^{-n-1} w^n$$

である. これを用いて $V[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の元をそれぞれ $V((z))((w))$, $V((w))((z))$ に埋め込むことができる. これは z, w 上の形式的な有理関数のなす環の w 進位相および z 進位相による完備化に他ならない. 同様にして $|w| > |z-w|$ の領域で z^{-1} を展開する式を用いることで $V[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の元を $V((w))((z-w))$ に埋め込むことができ, これは $w, z-w$ 上の形式的な有理関数のなす環の $z-w$ 進位相による完備化になる. これまで述べた (スーパー) 頂点代数の性質は次に述べる性質として集約される:

- 任意の $A, B, C \in V$ に対し, ある $V[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の元であって, $V[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の異なる完備化による埋め込みの像がそれぞれ

$$\begin{aligned} Y(A, z)Y(B, w)C &\in V((z))((w)), \\ (-1)^{\bar{A}\bar{B}}Y(B, w)Y(A, z)C &\in V((w))((z)), \\ Y(Y(A, z-w)B, w)C &\in V((w))((z-w)) \end{aligned}$$

となるようなものが存在する.

より標語的には, 「 $Y(A, z)Y(B, w)C$, $(-1)^{\bar{A}\bar{B}}Y(B, w)Y(A, z)C$, $Y(Y(A, z-w)B, w)C$ の 3 つの元は $V[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ において一致する」と表現できる. これを (スーパー) 頂点代数の結合性という. この性質をもとに (スーパー) 頂点代数の表現が定義される. すなわち, (スーパー) ベクトル空間 M が (スーパー) 頂点代数 V の表現であるとは, V の元を M 上の場に写す偶線型写像 $Y_M(\cdot, z): V \rightarrow \text{End } M[[z, z^{-1}]]$ が存在し, 次の条件を満たすことである:

- $Y_M(|0\rangle, z) = \text{Id}_M$.
- 任意の $A, B \in V$ および任意の $C \in M$ に対し, ある $M[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の元であって, $M[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z-w)^{-1}]$ の異なる完備化による埋め込みの像がそれぞれ

$$\begin{aligned} Y_M(A, z)Y_M(B, w)C &\in M((z))((w)), \\ (-1)^{\bar{A}\bar{B}}Y_M(B, w)Y_M(A, z)C &\in M((w))((z)), \\ Y_M(Y(A, z-w)B, w)C &\in M((w))((z-w)) \end{aligned}$$

となるようなものが存在する.

記号の濫用ではあるが, V の表現 M が定める頂点作用素 Y_M を V の定める頂点作用素と同じ記号 Y で表すことが多く, ここでもそのルールに従うこととする.

2 頂点代数の例

以下では (スーパー) 頂点代数およびその表現の例について述べる. Virasoro 代数 $\text{Vir} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}C$ とは

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}C, \quad [C, \text{Vir}] = 0$$

で定義される無限次元の Lie 代数である. Vir の部分代数 $\text{Vir}_+ = \bigoplus_{n \geq -1} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}C$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_c$ を $L_n = 0$ ($n \geq -1$), $C = c \in \mathbb{C}$ で定義する. $\mathbb{C}_c$ が誘導する Vir の表現を

$$V^c = U(\text{Vir}) \underset{U(\text{Vir}_+)}{\otimes} \mathbb{C}_c$$

と表す. このとき $U(\text{Vir})$ の PBW 基底を用いて $U(\text{Vir}) \simeq U(\text{Vir}_-) \otimes U(\text{Vir}_+)$ と分解できる. ただし $\text{Vir}_- = \bigoplus_{n \leq -2} \mathbb{C}L_n$ である. この分解を用いることでベクトル空間としての同型 $V^c \simeq U(\text{Vir}_-)|0\rangle$ が誘導される. ただし $|0\rangle = 1 \otimes 1$ である. すると V^c は $|0\rangle$ を真空ベクトルとする,

$$L(z) = Y(L_{-2}|0\rangle, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

で生成される頂点代数の構造をもつ. 実際, $L(z)$ は自分自身と局所的であり

$$L(z)L(w) \sim \frac{\partial L(w)}{z-w} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{c/2}{(z-w)^4}$$

なる OPE 関係式を満たす. V^c を中心電荷 c の Virasoro 頂点代数という.

$\mathfrak{g}$ を複素有限次元単純 (スーパー) Lie 代数であって非退化 (スーパー) 対称不変偶双線形形式 $(\cdot|\cdot)$ をもつものとする (スーパーでなければ Killing 形式のスカラー倍をとればよい). 今は $(\theta|\theta) = 2$ を満たすよう正規化しておく. ここで θ は $\mathfrak{g}$ の最高ルートである. このときアファイン (スーパー) Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ が

$$[u_{(m)}, v_{(n)}] = [u, v]_{(m+n)} + m(u|v)\delta_{m+n,0}K, \quad u, v \in \mathfrak{g}; \quad [K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0$$

によって定義される. ただし $u_{(m)} = ut^m$ を表す. $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_k$ を $K = k \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}[t] = 0$ によって定義する. すると誘導表現

$$V^k(\mathfrak{g}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \underset{U(\widehat{\mathfrak{g}}_+)}{\otimes} \mathbb{C}_k \simeq U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$$

は $|0\rangle = 1 \otimes 1$ とする,

$$u(z) = Y(u_{(-1)}|0\rangle, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{(n)} z^{-n-1}, \quad u \in \mathfrak{g}$$

によって生成される (スーパー) 頂点代数の構造をもつ. 実際, $u(z)$ たちは互いに局所的であり

$$u(z)v(w) \sim \frac{[u, v](w)}{z-w} + \frac{k(u|v)}{(z-w)^2}, \quad u, v \in \mathfrak{g}$$

なる OPE 関係式を満たしている. $V^k(\mathfrak{g})$ をレベル k のアフライン (スーパー) 頂点代数という. この定義は $\mathfrak{g}$ が簡約 (スーパー) Lie 代数の場合に自然に拡張される. $\mathfrak{g}$ が単純のとき, $h^\vee$ を $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数, $\mathfrak{g}$ の基底を $\{u_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}}$, $(\cdot|\cdot)$ に関する双対基底を $\{u^i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ とする. $k + h^\vee \neq 0$ のとき, $V^k(\mathfrak{g})$ 上の場 $L^{\mathfrak{g}}(z)$ を

$$L^{\mathfrak{g}}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^{\mathfrak{g}} z^{-n-2} = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} (-1)^{\bar{u}_i} :u^i(z)u_i(z):$$

で定義する. このとき $L_0^{\mathfrak{g}}$ は $V^k(\mathfrak{g})$ 上半単純で, $L_{-1}^{\mathfrak{g}} = \partial$ が成り立ち, さらに $L_n^{\mathfrak{g}}$ たちは中心電荷 $c(k) = k \operatorname{sdim} \mathfrak{g} / (k + h^\vee)$ の Virasoro 代数の関係式を満たす. したがって $V^k(\mathfrak{g})$ は中心電荷 $c(k)$ の Virasoro 頂点代数の表現になる. Virasoro 頂点代数の表現を与えるような場を含む (スーパー) 頂点代数を共形的, Virasoro 頂点代数の表現を与える場を共形場という. よって $V^k(\mathfrak{g})$ は $k + h^\vee \neq 0$ のとき共形的であり, $L^{\mathfrak{g}}(z)$ はその共形場であることがわかる. E を $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする. このとき E は $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ の表現に $K = k \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}[t]t = 0$ によって拡張される. すると誘導表現

$$V^k(E) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{g}}_+)} E$$

は自然に $V^k(\mathfrak{g})$ の表現になる. $V^k(E)$ を E から誘導される Weyl 表現という.

$\mathfrak{c}$ を対称双線形形式をもつ可換な Lie 代数とすると $U(\widehat{\mathfrak{c}})$ は $\mathfrak{c}$ に付随する Heisenberg 代数と呼ばれ, $\pi^k := V^k(\mathfrak{c})$ を $\mathfrak{c}$ に付随するレベル k の Heisenberg 頂点代数という. 任意の $\lambda \in \mathfrak{c}$ に対して, $\mathfrak{c}$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_\lambda$ を $\mathfrak{c} \ni \mu \mapsto (\lambda|\mu) \in \mathbb{C}$ で定義する. そのとき $\mathbb{C}_\lambda$ が誘導する π^k の表現を最高ウェイト λ の Fock 表現と呼び, π_λ^k で表す. 有限ランクの整数格子 L に対し, $\mathfrak{c} = L \otimes \mathbb{Z}$ に付随するレベル 1 の Heisenberg 頂点代数 π を考える. π の Fock 表現たちの直和

$$V_L = \bigoplus_{\lambda \in L} \pi_\lambda$$

にスーパーベクトル空間の構造を, π_λ のパリティが $(\lambda|\lambda) \bmod 2$ となるように与える. すると V_L は π の表現の構造を自然に拡張して (スーパー) 頂点代数の構造をもつ. その際, π_λ の最高ウェイトベクトル $|\lambda\rangle$ に対応する場は

$$Y(|\lambda\rangle, z) = e^\lambda(z) := S_\lambda z^{\lambda(0)} \exp\left(-\sum_{n < 0} \frac{\lambda_{(n)} z^{-n}}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n > 0} \frac{\lambda_{(n)} z^{-n}}{n}\right)$$

で定義される. ただし S_λ は任意の $\mu_{(n)}$ ($\mu \in L, n \neq 0$) と可換かつ $S_\lambda |\mu\rangle = |\lambda + \mu\rangle$ を満たす作用素である. V_L を L に付随する (スーパー) 格子頂点代数と呼ぶ.

$\mathfrak{u}$ を有限次元 (スーパー) ベクトル空間, $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ をパリティ次数をもつ $\mathfrak{u}$ の基底とする. $\operatorname{Cl}(\mathfrak{u})$ を, u_α と異なるパリティをもつ元 $\varphi_{\alpha,n}, \varphi_n^\alpha$ ($\alpha \in I, n \in \mathbb{Z}$) によって生成され,

$$[\varphi_{\alpha,m}, \varphi_n^\beta] = \delta_{m+n,-1}, \quad [\varphi_{\alpha,m}, \varphi_{\beta,n}] = [\varphi_m^\alpha, \varphi_n^\beta] = 0, \quad \alpha, \beta \in I, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

なる関係式を満たす (スーパー) $\mathbb{C}$ 代数として定義する. $\operatorname{Cl}(\mathfrak{u})$ の Fock 表現を $\varphi_{\alpha,n}|0\rangle = \varphi_{n+1}^\alpha|0\rangle = 0$ なる偶ベクトル $|0\rangle$ によって生成される表現として定義し, $\Lambda(\mathfrak{u})$ で表す. このとき $\Lambda(\mathfrak{u})$ は

$$Y(\varphi_{\alpha,-1}|0\rangle, z) = \varphi_\alpha(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_{\alpha,n} z^{-n-1}, \quad Y(\varphi_0^0|0\rangle, z) = \varphi^0(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n^0 z^{-n}, \quad \alpha \in I$$

によって生成される（スーパー）頂点代数の構造をもつ．実際， $\varphi_\alpha(z), \varphi^\alpha(z)$ たちは互いに局所的であり，

$$\varphi_\alpha(z)\varphi^\beta(w) \sim \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w}, \quad \varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(w) \sim 0 \sim \varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(w), \quad \alpha, \beta \in I$$

なる OPE 関係式を満たしている．

3 $\mathcal{W}$ 代数

[?] にしたがって $\mathcal{W}$ 代数の定義を説明する． $\mathfrak{g}$ を非退化（スーパー）対称不変偶双線形形式 $(\cdot|\cdot)$ をもつ複素有限次元単純（スーパー）Lie 代数， f をパリティが偶のベキ零元とする．双線形形式は $(\theta|\theta) = 2$ となるように正規化する（ θ は $\mathfrak{g}$ の最高ルート）． $\mathfrak{g}$ の f に関する good な次数付けとは $\mathfrak{g}$ の $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 次数付け $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ であって次の条件を満たすものである：

- 任意の $i, j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対し， $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ ．
- $f \in \mathfrak{g}_{-1}$ ．
- 線型写像 $\text{ad}(f): \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{j-1}$ は $j \geq \frac{1}{2}$ のとき単射かつ $j \leq \frac{1}{2}$ のとき全射．

Jacobson-Morozov の定理から f を含む $\mathfrak{sl}_2$ 三つ組 $\{e, h, f\}$ を $\mathfrak{g}$ の部分集合としてとれる．このとき $\text{ad}(\frac{1}{2}h)$ は $\mathfrak{g}$ の f に関する good な次数付けを与えるので，good な次数付けはいつでも存在する．今， $\mathfrak{g}$ が good な $\mathbb{Z}$ 次数付け

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

が存在することを仮定する． $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}_0$ に含まれるようにとる．このとき， $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数を $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ に含まれるようにとることができる． Δ を $\mathfrak{g}$ のルート系， Δ_+ を正ルートの集合， Π を単純ルートの集合とする．任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対し， $\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}$ ， $\Pi_j = \Pi \cap \Delta_j$ とおくと， $\Delta_+ \subset \Delta_{\geq 0}$ かつ $\Pi = \Pi_0 \sqcup \Pi_1$ が成り立つ．スーパー頂点代数

$$C^k(\mathfrak{g}, f) := V^k(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_{>0})$$

および $C^k(\mathfrak{g}, f)$ 上の奇な場

$$d(z) = \sum_{\alpha \in \Delta_{>0}} (-1)^{\bar{\alpha}} (e_\alpha(z) + (f|e_\alpha)) \otimes \varphi^\alpha(z) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \Delta_{>0}} (-1)^{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} c_{\alpha, \beta}^\gamma : \varphi_\gamma(z) \varphi^\alpha(z) \varphi^\beta(z) :$$

を考える．ただし e_α は α に対応するルートベクトル， $\bar{\alpha}$ は e_α のパリティ， $c_{\alpha, \beta}^\gamma \in \mathbb{C}$ は $[e_\alpha, e_\beta] = \sum_{\gamma \in \Delta_{>0}} c_{\alpha, \beta}^\gamma e_\gamma$ で定義される構造定数である．このとき $d(z)d(w) \sim 0$ が成り立ち，特に $d_{(0)}^2 = 0$ がわかる． $\Lambda(\mathfrak{g}_{>0})$ に電荷次数を $\deg \varphi^\alpha(z) = 1 = -\deg \varphi_\alpha(z)$ で定義し，電荷次数に関する次数付けを $\Lambda(\mathfrak{g}_{>0}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \Lambda(\mathfrak{g}_{>0})_j$ で表す． $C^k(\mathfrak{g}, f)$ に電荷次数による次数付けを $\deg V^k(\mathfrak{g}) = 0$ で誘導し， $C^k(\mathfrak{g}, f)_j = V^k(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_{>0})_j$ とおく．このとき $d(z)$ の定義から $d_{(0)} \cdot C^k(\mathfrak{g}, f)_j \subset C^k(\mathfrak{g}, f)_{j+1}$ がわかる．したがって $(C^k(\mathfrak{g}, f), d_{(0)})$ は電荷次数に関してコチェイン複体の構造をもち，そのコホモロジーを

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H^\bullet(C^k(\mathfrak{g}, f), d_{(0)})$$

で表す． $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は $C^k(\mathfrak{g}, f)$ から誘導される（スーパー）頂点代数の構造をもち， $\mathfrak{g}, f$ に付随するレベル k の $\mathcal{W}$ 代数という．任意の $u \in \mathfrak{g}$ に対し， $C^k(\mathfrak{g}, f)$ 上の場 $J^u(z)$ を

$$J^u(z) = u(z) \otimes 1 + \sum_{\alpha, \beta \in \Delta_{>0}} (-1)^{\bar{\alpha}} c_{u, \beta}^\alpha : \varphi_\alpha(z) \varphi^\beta(z) :$$

で定義する。ただし $c_{u,\beta}^\alpha$ は $[u, e_\beta]$ に表れる e_α の係数として定義される定数である。もし $u, v \in \mathfrak{g}_{\geq 0}$ または $u, v \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$ であれば、 $J^u(z)$ と $J^v(w)$ は

$$J^u(z)J^v(w) \sim \frac{J^{[u,v]}(w)}{z-w} + \frac{\tau_k(u|v)}{(z-w)^2}$$

なる OPE 関係式を満たす。ただし τ_k は

$$\tau_k(u|v) = k(u|v) + \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(u|v) - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

で定義される $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ または $\mathfrak{g}_{\leq 0}$ 上の不変双線形形式である。ここで $\kappa_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式を表す。特に $J^u(z)$ ($u \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$) で生成されるスーパー頂点部分代数は $\mathfrak{g}_{\leq 0}$ に付随するレベル τ_k のアフェイン (スーパー) 頂点代数と同型であり、これを $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_{\leq 0})$ で表す。 C_-^k を $\varphi_\alpha(z)$, $d_{(0)} \cdot \varphi_\alpha(z) = J^{e_\alpha}(z) + (f|e_\alpha)$ ($\alpha \in \Delta_{>0}$) で生成されるスーパー頂点部分代数, C_+^k を $J^u(z)$ ($u \in \mathfrak{g}_{\leq 0}$), $\varphi^\alpha(z)$ ($\alpha \in \Delta_{>0}$) で生成される (スーパー) 頂点部分代数とすると, スーパーベクトル空間として $C^k(\mathfrak{g}, f) \simeq C_-^k \otimes C_+^k$ かつ $(C_\pm^k, d_{(0)})$ は部分複体になっている。したがって $C^k(\mathfrak{g}, f) \simeq C_-^k \otimes C_+^k$ は複体の分解に他ならず, 定義より

$$H^\bullet(C^k(\mathfrak{g}, f)) \simeq H^\bullet(C_-^k) \otimes H^\bullet(C_+^k) = \mathbb{C} \otimes H^\bullet(C_+^k) \simeq H^\bullet(C_+^k).$$

一方で任意の $i \neq 0$ に対して, $H^i(C^k(\mathfrak{g}, f)) = 0$ となることが知られているので $H^\bullet(C^k(\mathfrak{g}, f)) \simeq H^0(C_+^k) = \text{Ker}_{V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_{\leq 0})} d_{(0)}$ が成り立つ。特に $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_{\leq 0})$ の部分代数になる。射影 $\mathfrak{g}_{\leq 0} \rightarrow \mathfrak{g}_0$ が誘導する (スーパー) 頂点代数の射 $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_{\leq 0}) \rightarrow V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ を $\mathcal{W}$ 代数に制限することで (スーパー) 頂点代数の射

$$\mu^k: \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \rightarrow V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$$

が得られ, これを三浦写像という。三浦写像 μ^k は k にらずいつでも単射である。 Q_0 を $\mathfrak{g}_0$ のルート格子, Π^Γ を $\Delta_{>0}$ の元であって二つの $\Delta_{>0}$ の元の和に分解できないものの全体の集合とする。任意の $\alpha, \beta \in \Pi^\Gamma$ に対し, 同値関係 $\alpha \sim \beta$ を

$$\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta \in Q_0$$

で定義し, α を含む同値類を $[\alpha]$ で表す。このとき $\Pi_1 \ni \alpha \mapsto [\alpha] \in \Pi^\Gamma / \sim$ は全単射写像になる。任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対し, $\mathfrak{g}_0$ の表現 $E_\alpha = \bigoplus_{\beta \in [\alpha]} \mathbb{C} v_\beta$ を

$$u \cdot v_\beta = \sum_{\gamma \in [\alpha]} c_{\gamma, u}^\beta v_\gamma, \quad u \in \mathfrak{g}_0, \quad \beta \in [\alpha]$$

で定義する。すると E_α は $\mathfrak{g}_0$ の既約表現になる。 E_α の誘導する $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ の Weyl 表現を $V^{\tau_k}(E_\alpha)$ と表す。 $k + h^\vee \neq 0$ のとき, $(u^i | u_j) = \delta_{i,j}$ を満たす $\mathfrak{g}_0$ の双対基底を $\{u_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_0}$, $\{u^i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}_0}$ とすると,

$$L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \frac{1}{2(k + h^\vee)} \sum_{i=1}^{\mathfrak{g}_0} (-1)^{\bar{u}_i} : J^{u^i}(z) J^{u_i}(z) :$$

は $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$ 上の共形場を与える。任意の $\alpha \in \Pi_1$ に対し, $\text{Hom}(V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0), V^{\tau_k}(E_\alpha))$ に係数をもつ形式的べき級数 $S^\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n^\alpha z^{-n}$ を

$$S^\alpha(z)A = (-1)^{\bar{\alpha}\bar{A} + \bar{A}} e^{zL_{-1}} Y(A, -z)v_\alpha, \quad A \in V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$$

で定義する。 k が generic のとき,

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \simeq \text{Im } \mu = \bigcap_{\alpha \in \Pi_1} \text{Ker} \left(\int S^\alpha(z) dz : V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \rightarrow V^{\tau_k}(E_\alpha) \right)$$

が成り立つ ($[\mathcal{G}]$)。ただし $\int S^\alpha(z) dz$ は $S^\alpha(z)$ の形式的留数を表し, $\int S^\alpha(z) dz = S_1^\alpha$ である。

4 副正則 $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ または $\mathfrak{so}_{2n+1}$, $f = f_{\text{sub}}$ を $\mathfrak{g}$ の副正則べき零元とする. このとき次の次数付き Dynkin 図形で表される $\mathfrak{g}$ の f_{sub} に関する good な $\mathbb{Z}$ 次数付けが存在する:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}: & \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \end{array} \\ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}: & \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n & \end{array} \end{aligned}$$

このとき $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{z}$ である. ただし $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}_0$ の中心を表す. すると三浦写像は

$$\mu_1^k: \mathcal{W}(\mathfrak{g}, f_{\text{sub}}) \hookrightarrow V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2) \otimes \pi_3^{k+h^\vee} \quad (4.1)$$

なる埋め込み写像を与える. ただし $\pi_3^{k+h^\vee}$ は $\mathfrak{z}$ に付随する Heisenberg 頂点代数, $h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数である. $\pi_1^{k+h^\vee}$ を

$$\alpha_1(z)\alpha_1(w) \sim \frac{2(k+h^\vee)}{(z-w)^2}$$

なる OPE 関係式を満たす場 $\alpha_1(z)$ で生成される Heisenberg 頂点代数, $M_{\mathfrak{sl}_2}$ を $\beta\gamma$ システムと呼ばれる

$$\beta(z)\gamma(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad \beta(z)\beta(w) \sim 0 \sim \gamma(z)\gamma(w)$$

なる OPE 関係式を満たす偶の場 $\beta(z), \gamma(z)$ で生成される頂点代数とする. $V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2)$ は臨本表現と呼ばれ自由場への埋め込み

$$\begin{aligned} \rho_1^k: V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2) &\hookrightarrow M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_1^{k+h^\vee}, \\ e(z) &\mapsto \beta(z), \quad h(z) \mapsto -2:\gamma(z)\beta(z): + \alpha_1(z), \\ f(z) &\mapsto -:\gamma(z)^2\beta(z): + (k+h^\vee-2)\partial\gamma(z) + \gamma(z)\alpha_1(z) \end{aligned}$$

が存在する. ただし $\{e, h, f\}$ は $\mathfrak{sl}_2$ 三つ組である. したがって

$$\omega_1^k := (\rho_1^k \otimes \text{id}) \circ \mu_1^k: \mathcal{W}(\mathfrak{g}, f_{\text{sub}}) \hookrightarrow M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$$

を得る. ただし $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$ に付随するレベル $k+h^\vee$ の Heisenberg 頂点代数で $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \simeq \pi_3^{k+h^\vee} \otimes \pi_1^{k+h^\vee}$ である. 一方で k が generic ならば,

$$\begin{aligned} \text{Im } \mu_1^k &= \bigcap_{i=2}^n \text{Ker} \left(\int S^{\alpha_i}(z) dz: V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2) \otimes \pi_3^{k+h^\vee} \rightarrow V^k(E_{\alpha_i}) \right), \\ \text{Im } \rho_1^k &= \text{Ker} \left(\int \beta(z) e^{-\frac{\alpha_1}{k+h^\vee}}(z) dz: M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_1^{k+h^\vee} \rightarrow M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{1,-\alpha_1}^{k+h^\vee} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $S^{\alpha_i}(z)$ は ρ_1^k を介することで

$$\int S^{\alpha_i}(z) dz = \int e^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z) dz: V^{k+h^\vee-2}(\mathfrak{sl}_2) \otimes \pi_3^{k+h^\vee} \rightarrow M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+h^\vee}$$

と同一視できる．よって

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\text{sub}}) &\simeq \text{Im } \omega_1^k = \bigcap_{i=2}^n \text{Ker} \left(\int e^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z) dz : M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{\mathfrak{h}, -\alpha_i}^{k+h^\vee} \right) \\ &\quad \cap \text{Ker} \left(\int \beta(z) e^{-\frac{\alpha_1}{k+h^\vee}}(z) dz : M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow M_{\mathfrak{sl}_2} \otimes \pi_{\mathfrak{h}, -\alpha_1}^{k+h^\vee} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ．次に

$$(x|x) = 1 = -(y|y), \quad (x|y) = 0$$

を満たす x, y で生成されるランク 2 の格子 $L = \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y$ に付随するスーパー格子頂点代数 V_L を考え, V_L 上の場合 $x(z), y(z), e^{x+y}(z), e^{-x-y}(z)$ たちで生成される部分頂点代数を V_{x+y} で表す．このとき $M_{\mathfrak{sl}_2}$ の自由場実現

$$M_{\mathfrak{sl}_2} = \text{Ker} \left(\int e^x(z) dz : V_{x+y} \rightarrow V_L \right)$$

が知られている．このとき $\beta(z) \mapsto e^{x+y}(z)$ で対応する．したがって次の定理を得る：

Theorem 4.1 ([CGN, Theorem 3.2]) k が $\mathfrak{s}$ generic ならば

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\text{sub}}) &\simeq \bigcap_{i=2}^n \text{Ker} \left(\int e^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z) dz : V_{x+y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow V_{x+y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}, -\alpha_i}^{k+h^\vee} \right) \\ &\quad \cap \text{Ker} \left(\int e^{-\frac{\alpha_1}{k+h^\vee} + x+y}(z) dz : V_{x+y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow V_{x+y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}, -\alpha_1}^{k+h^\vee} \right) \\ &\quad \cap \text{Ker} \left(\int e^x(z) dz : V_{x+y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow V_L \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ．

5 スーパー主 $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{1|n+1}$ または $\mathfrak{osp}_{2|2n}$, $f = f_{\text{prin}}$ を $\mathfrak{g}$ の偶部分空間の正則べき零元とする．このとき次の次数付き Dynkin 図形で表される $\mathfrak{g}$ の f_{prin} に関する good な $\mathbb{Z}$ 次数付けが存在する：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{1|n+1}: \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \otimes & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ \\ \alpha_0 & \alpha_1 & & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{array}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}_{2|2n}: \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \otimes & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ \\ \alpha_0 & \alpha_1 & & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{array}$$

このとき $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}_{1|1} \oplus \mathfrak{z}$ である．ただし $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}_0$ の中心を表す．すると三浦写像は

$$\mu_2^k: \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\text{prin}}) \hookrightarrow V^{\kappa}(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes \pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee} \quad (5.1)$$

なる埋め込み写像を与える．ただし $\pi_{\mathfrak{z}}^{k+h^\vee}$ は $\mathfrak{z}$ に付随する Heisenberg 頂点代数, κ は

$$\begin{aligned} \kappa(e_{1,1}|e_{1,1}) &= 1, & \kappa(e_{2,2}|e_{2,2}) &= 2r(k+h^\vee) + 1, \\ \kappa(e_{1,1}|e_{2,2}) &= -r(k+h^\vee) - 1, & \kappa(e_{1,2}|e_{2,1}) &= -r(k+h^\vee) \end{aligned}$$

で定義される $\mathfrak{gl}_{1|1}$ 上の不変双線形形式, r は $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の lacity, $e_{i,j}$ たちは $\mathfrak{gl}_{1|1}$ の標準基底である. $\pi_2^{k+h^\vee}$ を

$$\chi_1(z)\chi_1(w) \sim 0, \quad \chi_2(z)\chi_2(w) \sim \frac{2r(k+h^\vee)}{(z-w)^2}, \quad \chi_1(z)\chi_2(w) \sim \frac{-r(k+h^\vee)}{(z-w)^2}$$

なる OPE 関係式を満たす場 $\chi_1(z), \chi_2(z)$ で生成される Heisenberg 頂点代数, $M_{\mathfrak{gl}_{1|1}}$ を bc システムと呼ばれる

$$b(z)c(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad b(z)b(w) \sim 0 \sim c(z)c(w)$$

なる OPE 関係式を満たす奇の場 $b(z), c(z)$ で生成されるスーパー頂点代数とする.

Proposition 5.1 ([CGN, Proposition 2.1, Lemma 2.2]) $V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1})$ の自由場への埋め込み

$$\begin{aligned} \rho_2^k: V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) &\hookrightarrow M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_2^{k+h^\vee}, \\ e_{1,2}(z) &\mapsto b(z), \quad e_{2,1}(z) \mapsto c(z)(\chi_1(z) + \chi_2(z)) - r(k+h^\vee)\partial c(z), \\ e_{1,1}(z) &\mapsto -:c(z)b(z): + \chi_1(z), \quad e_{2,2}(z) \mapsto :c(z)b(z): + \chi_2(z), \end{aligned}$$

が存在する.

よって

$$\omega_2^k := (\rho_2^k \otimes \text{id}) \circ \mu_2^k: \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\text{prin}}) \hookrightarrow M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$$

を得る. ただし $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$ に付随するレベル $k+h^\vee$ の Heisenberg 頂点代数で $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \simeq \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \otimes \pi_{\chi}^{k+h^\vee}$ である. 一方で k が generic ならば,

$$\text{Im } \mu_2^k = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \left(\int S^{\alpha_i}(z) dz: V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow V^\kappa(E_{\alpha_i}) \right)$$

が成り立つ.

Proposition 5.2 ([CGN, Proposition 2.5]) $k \neq -h^\vee$ ならば

$$\text{Im } \rho_2^k = \text{Ker} \left(\int b(z) e^{-\frac{\alpha_0}{k+h^\vee}}(z) dz: M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_2^{k+h^\vee} \rightarrow M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{2,-\alpha_0}^{k+h^\vee} \right)$$

が成り立つ. ただし $\alpha_0(z) = -r^{-1}(\chi_1(z) + \chi_2(z))$ である.

ここで $S^{\alpha_i}(z)$ は ρ_2^k を介することで

$$\int S^{\alpha_i}(z) dz = \int e^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z) dz: V^\kappa(\mathfrak{gl}_{1|1}) \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+h^\vee}$$

と同一視できる. よって

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\text{prin}}) &\simeq \text{Im } \omega_2^k = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \left(\int e^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z) dz: M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_i}^{k+h^\vee} \right) \\ &\quad \cap \text{Ker} \left(\int b(z) e^{-\frac{\alpha_0}{k+h^\vee}}(z) dz: M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \otimes \pi_{\mathfrak{h},-\alpha_0}^{k+h^\vee} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. 次に $V_{\mathbb{Z}}$ を $\mathbb{Z}$ に付随するスーパー格子頂点代数とし, $\mathbb{Z}$ の生成元を ϕ とする. $(\phi|\phi) = 1$ である. このとき boson-fermion 対応と呼ばれる同型写像

$$M_{\mathfrak{gl}_{1|1}} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{Z}}, \quad b(z) \mapsto e^\phi(z), \quad c(z) \mapsto e^{-\phi}(z)$$

が存在する. したがって次の定理が証明された.

Theorem 5.3 ([CGN, Theorem 3.4]) k が $\mathfrak{s}$ generic ならば

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\text{prin}}) &\simeq \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \left(\int e^{-\frac{\alpha_i}{k+h^\vee}}(z) dz : V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}, -\alpha_i}^{k+h^\vee} \right) \\ &\cap \text{Ker} \left(\int e^{-\frac{\alpha_0}{k+h^\vee} + \phi}(z) dz : V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \rightarrow V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}, -\alpha_0}^{k+h^\vee} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。

6 $\mathcal{W}$ 代数の双対性

$(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = (\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{sl}_{1|n+1})$ または $(\mathfrak{so}_{2n+1}, \mathfrak{osp}_{2|2n})$ とし, $\mathfrak{h}_i$ を $\mathfrak{g}_i$ ($i = 1, 2$) の Cartan 部分代数, $h_i^\vee$ を $\mathfrak{g}_i$ ($i = 1, 2$) の双対 Coxeter 数, α_i ($i = 1, \dots, n$) を $\mathfrak{g}_1$ の単純ルート, β_i ($i = 0, \dots, n$) を $\mathfrak{g}_2$ の単純ルート, r を $\mathfrak{g}_1$ の lacity, $\pi_{\mathfrak{h}_i}^{k_i+h_i^\vee}$ をレベル $k_i + h_i^\vee$ の $\mathfrak{h}_i \simeq \mathfrak{h}_i^*$ ($i = 1, 2$) に付随する Heisenberg 頂点代数とする. 定理 4.1 および定理 5.3 から $\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\text{sub}}) \hookrightarrow V_{x+y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}_1}^{k_1+h_1^\vee}$ および $\mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\text{prin}}) \hookrightarrow V_{\mathbb{Z}} \otimes \pi_{\mathfrak{h}_2}^{k_2+h_2^\vee}$ なる埋め込みがあって, k_i が $\mathfrak{s}$ generic のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\text{sub}}) &\simeq \bigcap_{i=2}^n \text{Ker} \int e^{-\frac{\alpha_i}{k_1+h_1^\vee}}(z) dz \cap \text{Ker} \int e^{-\frac{\alpha_1}{k_1+h_1^\vee} + x+y}(z) dz \cap \text{Ker} \int e^x(z) dz, \\ \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\text{prin}}) &\simeq \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \int e^{-\frac{\beta_i}{k_2+h_2^\vee}}(z) dz \cap \text{Ker} \int e^{-\frac{\beta_0}{k_2+h_2^\vee} + \phi}(z) dz \end{aligned}$$

である. $\omega_1^\vee \in \mathfrak{h}_1$ を $\mathfrak{g}_1$ の第 1 基本コウエイト, $\omega_0^\vee \in \mathfrak{h}_2$ を $\mathfrak{g}_2$ の第 0 基本コウエイトとする. $H_1(z), H_2(z)$ を上の自由場への埋め込みのもとで

$$H_1(z) = \omega_1^\vee(z) - y(z), \quad H_2(z) = \omega_0^\vee(z) + \phi(z)$$

で定義される $\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\text{sub}}), \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\text{prin}})$ 上のそれぞれの場合, π_{H_i} を $H_i(z)$ で生成される Heisenberg 頂点代数, $\pi_{x,y}$ を $x(z), y(z)$ で生成される V_{x+y} の Heisenberg 部分頂点代数, π_ϕ を $\phi(z)$ で生成される $V_{\mathbb{Z}}$ の Heisenberg 部分頂点代数, $\pi_{\tilde{\alpha}}$ を

$$\tilde{\alpha}_0(z) = x(z), \quad \tilde{\alpha}_1(z) = \alpha_1(z) - (k_1 + h_1^\vee)(x(z) + y(z)), \quad \tilde{\alpha}_i(z) = \alpha_i(z), \quad (i = 2, \dots, n-1), \quad \tilde{\alpha}_n(z) = r\alpha_n(z)$$

で生成される $\pi_{x,y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}_1}^{k_1+h_1^\vee}$ の Heisenberg 部分頂点代数, $\pi_{\tilde{\beta}}$ を

$$\tilde{\beta}_0(z) = -\frac{1}{k_2 + h_2^\vee} \beta_0(z) + \phi(z), \quad \tilde{\beta}_i(z) = -\frac{1}{k_2 + h_2^\vee} \beta_i(z), \quad (i = 1, \dots, n)$$

で生成される $\pi_\phi \otimes \pi_{\mathfrak{h}_2}^{k_2+h_2^\vee}$ の Heisenberg 部分頂点代数とする. このとき

$$\pi_{H_1} \otimes \pi_{\tilde{\alpha}} \simeq \pi_{x,y} \otimes \pi_{\mathfrak{h}_1}^{k_1+h_1^\vee}, \quad \pi_{H_2} \otimes \pi_{\tilde{\beta}} \simeq \pi_\phi \otimes \pi_{\mathfrak{h}_2}^{k_2+h_2^\vee}$$

が成り立つ. この同型から埋め込み

$$\text{Com}(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\text{sub}})) \hookrightarrow \pi_{\tilde{\alpha}}, \quad \text{Com}(\pi_{H_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\text{prin}})) \hookrightarrow \pi_{\tilde{\beta}}$$

が誘導され, この埋め込みの像は k_i が $\mathfrak{s}$ generic ならば

$$\begin{aligned} \text{Com}(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\text{sub}})) &\simeq \text{Ker} \int e^{\tilde{\alpha}_0}(z) dz \bigcap_{i=1}^{n-1} \text{Ker} \int e^{-\frac{\tilde{\alpha}_i}{k_1+h_1^\vee}}(z) dz \cap \text{Ker} \int e^{-\frac{\tilde{\alpha}_n}{r(k_1+h_1^\vee)}}(z) dz, \\ \text{Com}(\pi_{H_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\text{prin}})) &\simeq \bigcap_{i=0}^n \text{Ker} \int e^{\tilde{\beta}_i}(z) dz \end{aligned}$$

と表される。さらに Feigin-Frenkel 双対性から

$$\mathrm{Ker} \int e^{-\frac{\tilde{\alpha}_i}{k_1+h_1^\vee}}(z) dz = \mathrm{Ker} \int e^{\tilde{\alpha}_i}(z) dz \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \mathrm{Ker} \int e^{-\frac{\tilde{\alpha}_n}{r(k_1+h_1^\vee)}}(z) dz = \mathrm{Ker} \int e^{\tilde{\alpha}_n}(z) dz$$

が成り立つ。よって

$$\mathrm{Com}(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}})) \simeq \bigcap_{i=0}^n \mathrm{Ker} \int e^{\tilde{\alpha}_i}(z) dz$$

となる。今、 $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ の間に関係式

$$r(k_1 + h_1^\vee)(k_2 + h_2^\vee) = 1 \quad (6.1)$$

が成り立つとき、Heisenberg 頂点代数の間の同型 $\pi_{\tilde{\alpha}} \xrightarrow{\sim} \pi_{\tilde{\beta}}$ が対応 $\tilde{\alpha}_i \mapsto \tilde{\beta}_i$ ($i = 0, \dots, n$) によって与えられる。したがって次の定理が証明された：

Theorem 6.1 ([CGN, Theorem 4.3]) k_1, k_2 が *generic* かつ関係式を満たすとき、同型

$$\mathrm{Com}(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}})) \simeq \mathrm{Com}(\pi_{H_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}))$$

が成り立つ。

$V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}$ を $\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ に付随するスーパー格子頂点代数、 ψ を $\sqrt{-1}\mathbb{Z}$ の生成元とする。 $(\psi|\psi) = -1$ である。 $\tilde{H}_1(z), \tilde{H}_2(z)$ を

$$\tilde{H}_1(z) = \phi(z) - H_1(z), \quad \tilde{H}_2(z) = \psi(z) + H_2(z)$$

で定義される $\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \otimes V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}$ 上のそれぞれの場、 $\pi_{\tilde{H}_i}$ を $\tilde{H}_i(z)$ で生成される Heisenberg 頂点代数とする。上と同様に $\mathcal{W}$ 代数の自由場表示と Feigin-Frenkel 双対性を用いることで、次の定理が証明される：

Theorem 6.2 ([CGN, Theorem 4.4]) k_1, k_2 が *generic* かつ関係式 (6.1) を満たすとき、同型

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) &\simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\tilde{H}_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \otimes V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}\right), \\ \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) &\simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\tilde{H}_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。

[CL] より定理 6.1 および定理 6.2 に表れる Heisenberg コセットの次数付き指標は k_1, k_2 によらず不変であることがわかる。特に $\mathcal{W}$ 代数の自由場実現を用いることで [T] の意味で連続変形族になることがわかる。よって [AFO] で用いられた手法を用いれば、 k_1, k_2 を動かして generic な点で同型な二つの（スーパー）頂点代数は k_1, k_2 が定義される範囲でいつでも同型になる。 $(H_i|H_i) = 0$ を満たす k_i の値を γ_i ($i = 1, 2$) とする。一方で $(\tilde{H}_i|\tilde{H}_i) = 0$ を満たす k_i の値は $-h_i^\vee$ である。したがって次の定理が成り立つ：

Theorem 6.3 ([CGN, Corollary 5.15]) $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2) = (\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{sl}_{1|n+1})$ または $(\mathfrak{so}_{2n+1}, \mathfrak{osp}_{2|2n})$ 、 k_1, k_2 が関係式 (6.1) を満たしていると仮定する。このとき次が成り立つ：

1. $k_i \neq -h_i^\vee, \gamma_i$ ならば、 $\mathrm{Com}(\pi_{H_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}})) \simeq \mathrm{Com}(\pi_{H_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}))$.
2. $k_i \neq -h_i^\vee$ ならば、 $\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\tilde{H}_2}, \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \otimes V_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}\right)$.
3. $k_i \neq -h_i^\vee$ ならば、 $\mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{g}_2, f_{\mathrm{prin}}) \simeq \mathrm{Com}\left(\pi_{\tilde{H}_1}, \mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{g}_1, f_{\mathrm{sub}}) \otimes V_{\mathbb{Z}}\right)$.

参考文献

- [AFO] M. Aganagic, E. Frenkel, and A. Okounkov, Quantum q -Langlands correspondence, Trans. Moscow Math. Soc., **79**, 2018, 1–83.
- [CGN] T. Creutzig, N. Genra, S. Nakatsuka, Duality of subregular $\mathcal{W}$ -algebras and principal $\mathcal{W}$ -superalgebras, arXiv:2005.10713 [math.QA].
- [CL] T. Creutzig and A. R. Linshaw, Cosets of affine vertex algebras inside larger structures, J. Algebra **517** (2019) 396.
- [FBZ] E. Frenkel and D. Ben-Zvi, Vertex algebras and algebraic curves, Mathematical Surveys and Monographs, **88**, American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.
- [FF] B. L. Feigin, E. Frenkel. Quantization of Drinfel'd-Sokolov reduction. *Phys. Lett., B* 246(1–2):75–81, 1990.
- [G] N. Genra, Screening operators for $\mathcal{W}$ -algebras, Sel. Math. New. Ser., **23**, 2017, 3, 2157–2202.
- [K] V. Kac, Vertex algebras for beginners, University Lecture Series, **10**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, viii+141.
- [KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.
- [T] C. Taubes, Differential geometry, Oxford Graduate Texts in Mathematics, **23**, Oxford University Press, Oxford, 2011, xiv+298.