

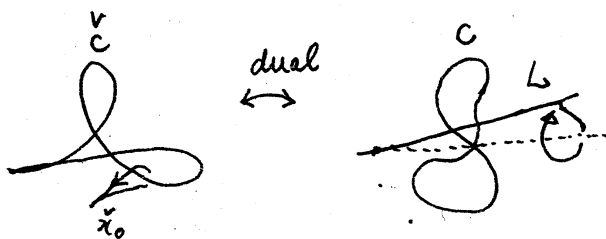
Maximal cuspidal curve の 補空間の基本群について

大・理・金子 譲一

1° $C \subset \mathbb{P}^2$ を n 次代数曲線, $\check{C} \subset \check{\mathbb{P}}^2$ をその双対曲線とする. C の非特異モデルを R , その n 次対称係を $R^{(n)} = R[x] \times R[x] / G_n$, $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^{(n)} \mid \exists i \neq j, x_i = x_j\}$ とする. 準同型.

$$\pi_1(\check{\mathbb{P}}^2 - \check{C}) \longrightarrow \pi_1(R^{(n)} - D)$$

を以下のようにして与えることができる. $\pi_1(\check{\mathbb{P}}^2 - \check{C})$ の基底を $\check{x}_0$, $L \subset \mathbb{P}^2$ をその双対直線とするとき, $\pi_1(\check{\mathbb{P}}^2 - \check{C}, \check{x}_0)$ の元に対して, L から出発して L に戻ってくる $\mathbb{P}^2$ の直線の“運動”が, loop の上の点の双対直線をとることにより定まる. しかもこの運動の途中で直線が C の特異点を通ったり, C に接したりすることはない. 故に, C とこの直線との交点 n 個の互いに衝突せずまた C の特異点を通らぬ“運動”がえられ, これは R 上に持ち上がるから $\pi_1(R^{(n)} - D)$ の元を定める. この対応が求める写像を与える. この写像の $\ker, \text{coker}$ は何かという問題



が生ずる。ところで, $p = R$ の種数, $n \geq 2p-1$ のとき, $R^{(n)}$ は, R のヤコビ多様体 $J(R)$ 上の $\mathbb{P}^{n-p}$ 束であった。このファイバー構造を用いて, 次の完全系列を証明することができず。

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^{n-p} \cap D) \rightarrow \pi_1(R^{(n)} - D) \xrightarrow{(*)} \pi_1(J(R)) \rightarrow 1.$$

$$= \text{is, } \underbrace{\mathbb{P}^{n-p}}_{\text{very ample to linear series}} \text{ is, very ample to linear series に対応するものをとる。また } (*) \text{ は, abel-jacobi 写像により induce されるものとする。}$$

$$P \subset \mathbb{P}^{n-p} \text{ を一般な } 2\text{-plane とすれば,}$$

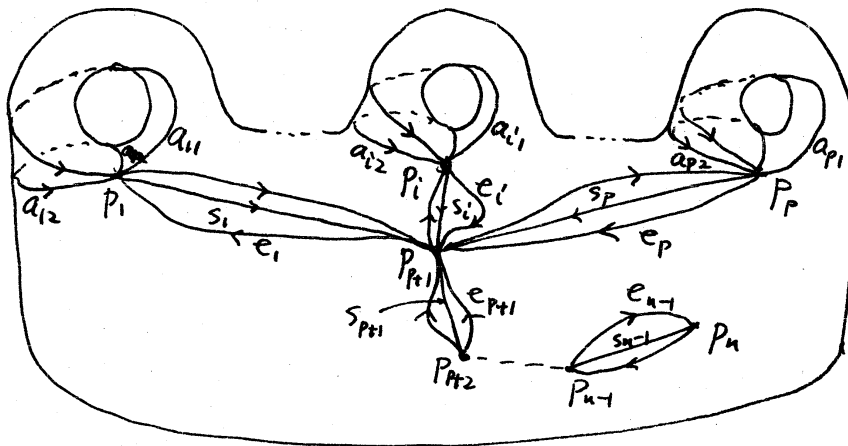
$$\pi_1(\mathbb{P}^{n-p} \cap D) \cong \pi_1(P \cap D). \quad \check{C} \equiv P \cap D \text{ は, } C \text{ として, 種数 } p, \text{ 次数 } n \text{ の node のみをもつ, } R \text{ と双有理な平面曲線をとったときの双対曲線であって, } P \text{ 一般ゆえ, node と cusp のみを特異点とするから, 次数 } 2(n+p-1), \text{ cusp } 3(n+2p-2) \text{ 個, node } 2(n-2)(n-3)+2p(2n+p-7) \text{ 個をもち, 同じ degree, genus で最大個の cusp をもつ曲線である。}$$

$\pi_1(R^{(n)} - D)$ の有限表示は, Zariski によって与えられている。従って, Reidemeister-Schreier の方法により, $\pi_1(P - \check{C})$ の一般には, 無限な (即ち, 生成元, 基本関係式とも無限な) 表示を与えることができる。Zariski [2] は, このようにして, $p=1$ のとき, 無限表示を求め, それを整理して, 有限表示にまで reduce した。我々の目標は, これを p 一般のときに実行することである。そのためには, n 次組みひだ群の $\pi_1(R^{(n)} - D)$ の表示を Zariski のそれと

置いたものにすることから key-point とする。

2°. 組対ひも群の有限表示.

$P = (p_1 \cdots p_n)$ を $R^{(n)} - D$ の基点にとり. R の dissections a_{ij} , $1 \leq i \leq p$, $j=1,2$ を, $a_{i1} \cap a_{i2} = p_i$ かつ $a_{11} \bar{a}_{12} \bar{a}_{11} \bar{a}_{12} \cdots \cdots a_{p1} \bar{a}_{p2} \bar{a}_{p1} \bar{a}_{p2}$ が 2-cell になるようにとる. (下図参照). $p_{p+1}, \dots, p_n$ は, この 2-cell の内部にあるとし, 流れを向きを一定に与えた線分 $s_1, \dots, s_{n-1}$ で結ぶ.



$\pi_1(R^{(n)} - D)$ の生成元を, 以下のようにとる: e_i は $1 \leq i \leq p$ (resp. $p+1 \leq i \leq n-1$) とき, $p_i \in p_{p+1}$ に, $p_{p+1} \in p_i$ に, 上図の如く, 流れが与えられた運動を表わす. (resp. p_{i+1}) (resp. p_{i+1})

p_i , $1 \leq i \leq p$, が dissection a_{ij} にそって, 上図の如く動く, 運動を a_{ij} で表わす.

Theorem 1. $\pi_1(R^{(u)}-D)$ は生成元 e_i $1 \leq i \leq u-1$, a_{ij}

$1 \leq i \leq p$, $j=1,2$ をもち、基本関係式は以下の通り:

$$(1) \quad e_i e_j = e_j e_i, \quad p+1 \leq i, j \leq u-1, |i-j| \geq 2, \text{ or } 1 \leq i \leq p, p+2 \leq j \leq \underbrace{u-1}_{u-1}$$

$$(2) \quad e_i e_{i+1} e_i = e_{i+1} e_i e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq u-2.$$

$$(3) \quad e_i e_{i+1} e_i^{-1} e_j = e_j e_i e_{i+1} e_i^{-1}, \quad 1 \leq i < j-1 \leq p.$$

$$(4) \quad a_{ij} e_k = e_k a_{ij}, \quad i \neq k, \quad j=1,2$$

$$(5) \quad a_{ij} a_{kl} = a_{kl} a_{ij}, \quad i \neq k, \quad j, l=1,2.$$

$$(6) \quad (e_i^{-1} a_{ij})^2 = (a_{ij} e_i^{-1})^2, \quad 1 \leq i \leq p, \quad j=1,2$$

$$(7) \quad a_{i2} a_{i1}^{-1} a_{i2}^{-1} a_{i1} = e_i^2, \quad a_{i1}^{-1} = e_i^{-1} a_{i1} e_i^{-1}, \quad 1 \leq i \leq p.$$

$$(8) \quad \left(\prod_{i=1}^p e_i a_{i2}^{-1} a_{i1} a_{i2} a_{i1}^{-1} e_i \right) e_{p+1} \cdots e_{u-2} e_{u-1}^{-1} e_{u-2} \cdots e_{p+1} = 1.$$

$\Rightarrow \prod_{k=1}^l x_k$ は $x_1 x_2 \cdots x_l$ を表わす.

証明は, Zariski [2] の与えた生成元, 基本関係式との比較による. 即ち, これらの生成元において Zariski の生成元が表わされることを示し, これらの関係式から, Zariski の関係式が実際に成り立つことを示すことによる.

3° 主定理

Reidemeister-Schreier の方法を, 完全系列.

$$1 \longrightarrow \pi_1(P^2 \setminus \check{C}) \longrightarrow \pi_1(R^{(u)}-D) \longrightarrow H_1(R) \longrightarrow 1$$

へ適用すれば, $\pi_1(P^2 \setminus \check{C})$ の表示がえられる. これを

4.

reduction について. 結局. 次のようになる.

Theorem 2. $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus \check{C})$ は次の有限表示をもつ.

生成元: $e_{ikl} \equiv a_{i1}^k a_{i2}^l e_i (a_{i1}^k a_{i2}^l)^{-1}$, $1 \leq i \leq p$, $kl=0, 1$
 e_j , $1 \leq j \leq n-1$.

関係式:

$$(1') \quad e_{ikl} e_{i+1, k'l'} e_{ikl} = e_{i+1, k'l'} e_{ikl} e_{i+1, k'l'}$$

$$1 \leq i \leq p-1, \quad k, l, k', l' = 0, 1 \text{ 及び } (k, l), (k', l') = (0, 2), (2, 0), (2, 1).$$

$$(2') \quad e_{pkl} e_{p+1} e_{pkl} = e_{p+1} e_{pkl} e_{p+1}, \quad k, l = 0, 1 \text{ 及び } (k, l) = (0, 2), (2, 0), (2, 1),$$

== 74.

$$e_{i02} = e_{i01} e_{i00} e_{i01}^{-1}$$

$$e_{i20} = e_{i10} e_{i00} e_{i10}^{-1}$$

$$e_{i21} = e_{i11} e_{i01} e_{i11}^{-1}$$

$$1 \leq i \leq p.$$

以下, k, l, k', l', k'', l'' は, 0 および 1 の勝手な値をとるものとす
 る.

$$(3') \quad e_{ikl} e_{i+1, k'l'} e_{ikl}^{-1} e_{jk''l''} = e_{jk''l''} e_{ikl} e_{i+1, k'l'} e_{ikl}^{-1},$$

$$1 \leq i < j-1 \leq p-1$$

$$(4') \quad e_{ikl} e_{i+1, kl} e_{ikl}^{-1} e_{p+1} = e_{p+1} e_{ikl} e_{i+1, kl} e_{ikl}^{-1}$$

$$(5') \quad e_{jk'l'} e_{ikl} (e_{i01} e_{i11} e_{i10} e_{i00})^{-1} e_{ikl} \quad \xrightarrow{1 \leq i \leq p-1}$$

$$= e_{ikl} (e_{i01} e_{i11} e_{i10} e_{i00})^{-1} e_{ikl} e_{jk'l'}. \quad 1 \leq i \neq j \leq p$$

$$(6') \quad e_i e_k e_j = e_j e_i e_k, \quad 1 \leq i \leq p, \quad p+2 \leq j \leq n-1.$$

$$(7') \quad e_i e_{i+1} e_i = e_{i+1} e_i e_{i+1}, \quad p+1 \leq i \leq n-1$$

$$(8') \quad e_i e_j = e_j e_i, \quad p+1 \leq i, j \leq n-1, |i-j| \geq 2.$$

$$(9') \quad \left(\prod_{i=1}^p e_{i'01} e_{i'11} e_{i'10} e_{i'00} \right) e_{p+1} \cdots e_{n-2} e_{n-1}^2 e_{n-2} \cdots e_{p+1} = 1.$$

証明は、計算のみである。Zariski のそれと、かなり平行に
いく。詳細は本論文も参照して下さい。

文献

[1] Polgachev-Libgober : On the fundamental group
of the complement to a discriminant variety, *In:*
Algebraic Geometry, Lect. Notes in Math. vol 862, pp
1~25.

[2] Zariski, O : The topological discriminant
group of a Riemann surface of genus p .
Amer. J. Math. 59(1937), pp.335~358.