

18 世紀数学史への視点 ——「谷間の時代」の「豊かさ」について

放送大学 長岡亮介 (Ryosuke Nagaoka)
The University of the Air

1 はじめに

「いま、数学史が流行っている！」

少なくとも、国際的にはこの流れは明確である。数学史関係の出版物の数、研究集会の数が、それを物語る。多くの点で世界の潮流から数歩遅れることが多いわが国もこれに関しては例外でない。

歴史的に考えると、数学史の流行は、19 世紀末から 20 世紀初頭にかけての第一期のブーム、1940 年代から 1970 年代に至る第二期のブーム、そして、現在に至る第三次ブームに大雑把に分けることができるように思う。第一期は、クライン (F.Klein) やカントル (M.Cantor) による数学史のような大著 (分量だけでなくその視野において) の発行、あるいは、*Quellen und Studieren* のような数学史に関心を寄せる学術雑誌や *Encyclopaedie des sciences mathématiques* (独訳もなされた!) のような数学史の大型企画の登場に見られる。19 世紀に急激に拡大、激変した数理世界の新たな統一像、全体像を描く試みであるとともに、「数学の危機」に代表される数学の基礎づけについての思想史的な関心が基調にあったものといってい良いだろう。

第二期は、社会的には《科学のもたらす悲慘や不正義》を背景とした、また思想的には論理実証主義 (正反の) を背景とした科学史、科学哲学の隆盛と軌を一にしたものものであり、このブームは後半には、*Archives for the History of exact Sciences*, *Historia Mathematica* など、数学史に焦点を当てた本格的な学術誌の発刊と成長、それと同期した大学における (数学史を含む) 科学史の講義、講座の設置に象徴される数学史の興隆となって結実する。しかし、皮肉なことにこの隆盛を通じて、科学史同様、数学史も《体制化》が始まる。

今日、数学史は第三期のブームというほど、大きな「関心」「注目」を享受している。これを第三期のブームというときは、第二期のブームがいつ終焉してしまったのか、あるいは、第二期のブームの滑かな延長上に今日のブームが来ていると見なすべきではないか、といった問題には議論の余地がある。しかし、それらの議論を精密にすることなくここで敢えて第三期というのは、最近のブームが、第二期を特徴づけた「思想的偏向」を「克服」した、言い換えれば「思想性を欠いて」数学史の研究が展開されていることである。これと並行して、現代数学の立場から見ると圧倒的な存在であった西欧数学史から一定の距離をおいた民族数学 (ethno-mathematics) の歴史的研究が国際的に流行している。数学史が、数学の日陰者存在、あるいは体制批判的存在から、その意義の認知を迫る専門的な

学問分野、すなわち discipline (専門的な学問分野であると同時に、訓練や修業を伴う統制的教練) としての自己完結的な世界を形成してきているということも関係がある。

それにしても、このような数学史の今日的なブームを支えているのは、「純粋数学」の未来の暗雲を感じずる数学者の鋭敏な感性であろうか。あるいは、混迷を深める数学教育の危機を救う切札としての期待であろうか。あるいは国際主義 (internationalism) に代表される 19 世紀の理想主義の凋落、普遍的な理念の崩壊と歩みをともにする民族主義 (国粋主義 nationalism) の勃興を背景にもつものか、その理由を断定的に特定することは難しい¹。しかし、とにかく一つのブームが来ていることは確実である。

いずれの駆動力からのものにせよ、このようなブームの中で、しかし歴史の名にふさわしい、一過性の流行に飲まれない質の高い研究・普及活動を行なうとすれば、数学者と数学史家との協力、協働はますます重要である。

しかし、それはそもそも可能なのか? — これは、本当は真剣に考えなければならない問題である。実際、数学者と数学史家の協働の実現を阻むいくつかの深刻な厚い壁がある。ここではその中で次の二つだけをあげよう。

第一には、論証性についての数学と数学史の理解の落差である。数学的な証明と数学史的な立証の間には決定的な差がある。(実は数学史的に見れば、数学的な証明の規範でさえ、すぐれて歴史的である!) 数学的に自明なことが数学史的には明らかといってはならないこと、反対に数学的には許されない推論の飛躍や周辺の知識 (いわば傍証) への依拠が数学史では重要であることが多いことなどはその典型であろう。

第二には、数学の「中核」(kernel) 的認識を包含する非数学的「殻」(shell) のもつ意味への理解の差である。数学的には数学的本質 (核心) こそがすべてである。その本質を覆い隠す「衣」を剥ぐことこそに意味がある。しかし数学史家はしばしば「衣」の方に関心がある。しかも、「衣」も叙述することの意味はすぐに理解が共有される平易な普遍性を持たない。

このような数学者と数学史家の差を少しでも縮めるための意識的な努力が継続的に必要であり、軽々に「理解し合い」、「協働の成果」を求めるに性急であってはならない。むしろ違いについての鋭敏な感覚が必要である。もちろん、それを踏まえた相互理解への方法論的寛容性がより大切なことはいままでもない。

実際、数学と数学史の隔たりは、具体的な歴史的話題を扱いはじめた途端に明らかになる。ここで全般的に論じる 18 世紀数学史における最大の話題である振動弦問題にそってはじめにこの「常識」を確認しておこう。

数学者から見ると、「波動方程式を最初に定式化したのは誰か」、「波動方程式の解を最初に得たのは誰か」、「境界条件や初期条件を満たす特殊解を得たのは誰か」という、「誰問題」や「いつ問題」が重要である。

反対に、ダランベール (J. Le Rond d'Alembert) やオイラー (L. Euler) その他の数学者の間にあった争いは、学問的名誉を賭けた先取権問題や、登場する個々の数学者の問題解決能力の限界としてしか理解しにくいのではないだろうか。

しかし、数学史家から見ると、「なぜ、弦の振動が問題となったか」あるいは「なぜ、対立する意見がでたか」という「なぜ問題」が重要であり、さらにまた「この論争の中に

¹ そのような「理由」の中に数学史が、インターネット時代の「知」の形態にふさわしい、というものさえも考えられる。

何を見ることができるか」といった「歴史的本質問題」がより重要である。

以下では、こうした立場の違いが浮き出るように、18世紀数学のパラダイムのグランドデッサンを試みる。本論が、数学と数学史の違いをより深く理解し合う《協働への試み》に向かったのささやかな一歩となることを願う。

2 18世紀＝「谷間の世紀」

2.1 なぜ「谷間の世紀」なのか

「谷間の世紀」とは、いうまでもなく解析幾何学、微積分法、古典力学、……の発見に沸く「偉大な科学の世紀」である17世紀と、数論、関数論、微分方程式論、新幾何学など「純粹」数学や電磁気学、熱学を含む「応用」数学の「数理科学の爆発的発展の世紀」である19世紀との間の谷間にある18世紀のことである。数学史的には、18世紀は、二つの偉大な世紀の狭間にあって、目立たない「谷間の世紀」と見なされてきた傾向がある。実際、18世紀に属するヨーロッパの主要な数学者は時代を少し広めにとって列記しても

J. ベルヌーイ (Johann Bernoulli, 1667-1748), テイラー (B. Taylor, 1685-1731), マクローリン (C. Maclaurin, 1698-1746), D. ベルヌーイ (D. Bernoulli, 1700-1782), オイラー (L. Euler, 1707-1783), ダランベール (J. Le Rond d'Alembert, 1717-1783) ラグランジュ (J. L. Lagrange, 1736-1813), モンジュ (G. Monge, 1746-1818), ラプラス (P. S. Laplace, 1749-1827)

といったところで、18世紀を挟む両世紀と比較して数的にも質的にも貧弱な印象は否定できない。それはオイラーが小さい存在であることを意味するわけでは決してないとしても！

確かに、18世紀の数学の大きな部分が前世紀の革命的な発見の検証、精密化、応用に当てられ、独自の領域を大きく開拓する研究が貧弱であったという側面はある。しかし、微積分を応用した天文学、力学など応用的な数理科学領域の開拓において、その後の数学的展開に大きな意味をもった研究は数多くある²。

2.2 「谷間の世紀」の社会文化状況

そもそも18世紀という時代は西欧では、どのようなものであったのであろうか。

世界史的常識に従えば、18世紀は、まずは冒険としての航海が一段落し、商業としての航海、すなわち(植民地)貿易が大規模化する時代である。そして、後半からには、人類史上の最大の社会的革命ともいべき産業革命が開始される。産業革命は、近代西欧諸国の経済発展と、その結果として今日我々の抱えるもっとも深刻な社会的諸問題を産み出す出発点となったものであるが、これと並行して、現代的な自然観、宇宙像が大衆化して

² これに関連して、やや脱線するが、「自然科学、自然現象との結合の有無が、西欧数学と和算の発展の違いである」という「もっともらしい主張」をしばしば耳にするが、これだけの「結論」では、主張にどのような意味があるか、否定的な印象を禁じ得ない。実際、西欧においても数学と自然現象との結合は、数学史的にはまさに「谷間の時代」に行なわれたものであるからである。

いったという科学思想的側面も重要である。

このような変化の背景には、君主を頂点とする封建的な階級社会の激動、社会構造の産業構造の転換に伴う社会的な変化、すなわち、伝統的な富裕層の没落と新たな富裕層の形成がある。実際、ロイヤル・ソサイエティ Royal Society のような、かつての特権的な貴族のための閉じた学術交流に代わり、ヨーロッパ各地にアカデミー、ソサイエティ、サロンの設立が流行（ラグランジュが活躍していた *Miscelanea Taurinensia* もその一つである！）し、そこで、啓蒙主義と自然科学思想が活発に伝搬され、脱宗教化されたデカルト（R.Descartes, 1596-1650）の自然主義をベースとした古典力学的な世界像が共有されるようになる。

他方、18世紀の科学状況はといえば、まずもっとも重要なことは、数学者・科学者の側では数理的なアプローチの困難が自覚されてきたことを第一に指摘しなければならない。ニュートン（I.Newton, 1643-1727）において美しく統一されたかに見えた「天上界と地上界の静謐な秩序」は、「天上界」においては、多体問題という避けることのできない理論的な困難に直面し、摂動論のような実際の解決で満足しなければならない状況であったこと、他方、「地上界」においては、理想化された運動ではなく現実の運動を考察しようとした途端、避けることのできない摩擦や抵抗というあまりに難しい問題の登場によって、17世紀的な楽観が通用しないことを明らかにした。

ビュッフォン（G.L. de Buffon, 1707-1788）は、抽象的な数学的科学である「理論力学」と現実の物理的性質を考慮する「応用力学」との区別を提唱したことで有名であるが、このアイデアの背景には、上のような困難についての認識が通奏低音として響いていたことを理解するべきであろう。

科学史家バナールが「18世紀は旅行家と採集家と分類家の偉大な世紀だった。」というように、数学に必ずしも適合しない自然史や生物学など、博物学的伝統を持つ科学に新しい流れが誕生したのは、このような数理科学の困難と無関係ではない。

実際、18世紀にはディドロ（D. Didrot, 1713-1784）やビュッフォンらの、反デカルト主義、さらには反数学主義的な「新科学主義」がかなりの勢力をもつようになる。数学的＝力学的方法で叙述し切れぬ、自然の豊かさや多様性に注目する姿勢である。

18世紀は数学にとっては17世紀の輝ける成功の反動として、こうした逆風を受ける状況にあった。

2.3 「谷間の世紀」の数学状況

こうした中で、数学は、数学的＝力学的な世界の拡大を目指す方向にしか展開していかなかった。しかしながら、その展開を貫く精神は、まさに反数学主義者が批判した「純粹数学」すなわち《厳しい論理性》にではなく、むしろ反数学主義者と同じように、いわば「現実の現象に対して、結果が出せる」《実用性》に依拠するものであった。

実際、18世紀の数学パラダイム³は、代数解析主義ないし代数的形式主義とでも名付け

³ より正確にはこのパラダイムはウォリス（J. Wallis, 1616-1703）やニュートンに見られるように17世紀にはすでに始まっている。また、コーシー（A.L. Cauchy, 1789-1857）にさえときに見られるように、19世紀に入っても部分的には生き続けていた。

られるべきもので、

「代数的記号法で表された表現は、その中に使われている記号文字が何かを表しているということを特定しなくても、普遍的に正しい」

ことを自明の前提として、数学的な関係式の結果の自在な‘応用’を問題解決の基本技巧として駆使するものである。本稿では詳しく触れる余裕はないが、具体的な例は枚挙に暇がない。

形式的な式が、記号の意味、すなわち指示対象への一切の言及なしに、無条件かつ普遍的に妥当する、という思想は、《形式の妥当性への形而上学的確信》でないとすれば、《結果の生産性をもって妥当性の根拠に代える実用主義》といわなければならない。大雑把に行って、前者は17世紀の多くの数学者に、後者は多くの18世紀の数学者に共有されていた精神である。

なお、このような代数的解析主義における「代数」「解析」の用語であるが、現代から見れば「代数」と「解析」が並列的な位置をもつということそのものに多くの人が違和感を持つであろう。しかし、17世紀から18世紀にかけては、両者が分かちがたく結び付き、まさに

代数≡解析

という文化状況であったことは特に重要である。

これは数学史的には常識であるが、現代の目には異様に映ることなのでごく簡単に説明する。

代数的記号法が誕生した当初、代数的方法は、カルダーノ (G.Cardano, 1501-1576) の著書の表題 “アルス・マグナ Ars magna” に象徴的に表されているように、あくまでも解答を発見する場面において利用される便利な‘術 ars’にすぎず、伝統的な総合幾何における証明に匹敵する厳密なものとは見なされていなかった。伝統的な幾何における作図問題の解を発見する際の予備的な作業を指し示すのに使われる言葉を流用して、代数的記号の計算に依拠するすべての数学的推論が「解析 analysis (= 分析)」の名で呼ばれるようになったのである。微積分法に代表される、このような「代数的な解析」の応用分野の拡大に伴って、頻繁に一緒に用いられる「解析」と「代数」の意味がますます接近を深めていくことになるのである。ただし、すぐ上に述べたように、17世紀には、まだ、「解析」は総合的＝論理演繹的証明の下に位していた。ところが、「解析」が次第にその‘地位’を向上させて、他の数学手法を押えて数学の中心に居座るようになるのが18世紀なのである。

この傾向は、オイラーに、もっとも典型的に現れる。実際、オイラーは、「代数解析主義」を彼の方法の中核に据えて、実に豊かな解析の世界を開拓していった。あまりに有名なので、ここでの詳しい引用は避けるが、“無限解析序説, Introductio in analysin infinitorum”における、著名な公式⁴の導出はそのもっとも典型的な例である。なお、この著書の表題にでてくる analysis の語には発見法にすぎないという謙虚で控え目な遠慮は失われていることに注意したい。

ちなみに、無限小、無限大を包含するオイラーの“解析”の手法と語法は、後のラグランジュ、コーシーのそれを経て、今日の意味へと転換してくるのである。

⁴ $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ など。

2.4 混乱と対立の産み出す生産性

オイラー とほとんど同じ時期を生きた数学者であるが、ダランベール は、代数解析主義に相対的には慎重であったように見える。そこに、18 世紀知識人の世論に圧倒的な影響力をもつ、啓蒙主義者にして反数学主義者の Diderot の陰を見ることができなのかも知れないが、ここではその種の結論を急がず、有名な振動弦を巡る論争を通して、17-18 世紀的数学的パラダイムを巡る数学者の混乱を見てみよう。

ダランベール は、(両端固定という自然な境界条件と、我々から見るとかなり制約的な初期条件のもとで) 弦振動の運動方程式を偏微分方程式として定式化した⁵。これは振動弦についての J. ベルヌーイの研究を発展させたものである。また、いうまでもなく、ダランベール の導いた運動方程式それ自身は、今日の我々が想像するような、すっきりした偏微分方程式の形式を持ってはいない。しかし、表面的な記号法の背後にある数学的なアイデアを読み込めば、ほとんど今日の形で定式化されていたと見て良いレベルに到達している⁶。ダランベール は、この偏微分方程式を、今日も有名な変数変換という巧みな手段を用いて一般的な解を得ることができた。しかし、それは彼が現代的な意味での一般解であることを主張したと理解されてはならない。実際 “la solution générale que nous venons de trouver” と彼がいうとき、それは、単に、無数に多くの解を包含しているという程度の意味であって、すべての解を表現しようと主張しているわけではない。後に得られる「微分方程式の一般解」という概念をもって、上の表現を「読み込」んではならないのである。実際、そもそも、ダランベール の解は、我々の目から見れば極めて限定された、しかし ダランベール にとってももっとも自然で規範的に映ったであろう初期条件に限定して解いたものにすぎないことを思い出す必要もある。そればかりか、ダランベール は微分方程式の解をもっと遥かに制約的に考えていた。たとえば、弦に振動を引き起こすもっとも自然な初期条件、ダランベール の表現によれば、「弦を休止状態からはなつ普通の —— 1 通りだとはいわないが —— 方法、つまり 1 点をつまんで引き弦を張りつめる方法は、弦に、ある角をなして交わる 2 本の直線の形を与える」⁷ が、このような曲線は解析学の主題とはなり得ないと彼は考え、それを排除することが重要であると考えたのである！

「実際、 t と x の関数であると仮定するより以上に一般的に、 y を解析的に表現できるとは、私には思えない。しかしこう仮定すると、振動弦のさまざまな形状が、ただ一つの同じ方程式だけに含め得る場合にしか、問題の解は得られないのである。」

この ダランベール の主張を理解することは数学的に困難であるが、数学史的には理解可能である。それは一言でいえば、

⁵ 偏微分方程式を最初に研究したのはオイラー として良いであろう。彼はすでに 10 年ほど前に、偏微分方程式を任意関数を使って解いている。Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis, *Comment. Acad. Petrop.*, vol. VII, 1734-5, p.184-200

⁶ このような「読み込み」は数学史的にはしばしば危険なことであるので慎重を期する必要がある。そもそも、このように表現を超えて「数学的な理解」の射程を延長することは、いつでも適当というわけではない！

⁷ *Opuscles mathématiques*, t.I, p.41

微分方程式の解である関数は当然微分できなければならない。しかし単一の式で解析的に表現される関数でなければ微分を考えることすらできない。

ということなのである。この「数学的には明らかに間違った命題」を理解するためには、18世紀における微分概念を思い出すことが必須である。18世紀数学には、17世紀数学と同様、微分係数の定義は愚か、極限の定義も18世紀にはなかった。18世紀において、微分とは、導関数を求める微分の計算に他ならなかったのである！したがって、具体的な単一の解析的表現が与えられなければ微分しようもしようがないのである。

ダランベールは、形式的な代数的解析の基礎が、具体的な計算で支えられているという認識を有していたということであろう。

だからこそ、彼は自分の得た一般解の中に登場する「与えられた周期を持つ任意の周期関数を決定する」という、今日の立場から到底信じられないような「数学的問題」に突き進んでしまうのである。しかし、代数的解析主義の立場に立って考えれば、ある意味でフーリエ級数への発想の原点のように評価することもできる問題でもある。

他方、オイラーは初期条件を位置と速度の形で正しく認識し、その一般的な初期条件のもとで期待される一般解を積分表現を利用して定式化した。オイラーにおいても、積分は積分計算を超えては定義されていない⁸ はずであるが、彼は個々の関数の微分可能性、積分可能性を不問にして、代数的解析主義を微分、積分という抽象的な演算にまで拡大したのである。

ここに、代数解析主義の中にいながら、代数的解析主義の論理的放縦から距離をおく‘節度ある’ダランベールと、代数的解析主義の無制限な可能性を疑わない‘奔放な’オイラーとの立場の違いを見ることができる。

ダランベールとオイラーとの対立と論争は、実際には代数的解析主義の《論理的基礎の脆弱性》と信じがたいほど《豊かな生産性》の矛盾が滲み出してきているようなものである。

「18世紀数学を代表する数学者」オイラーの極度に楽観的立ちは次のような例からも明らかである。

まずは有名な $\log(-1)$ を巡るライプニッツ (G.W. von Leibniz, 1646-1716) vs. J. ベルヌーイの論争に関する論考においてオイラーがとった立場である。

「 $\frac{d}{dx}(\log(x)) = \frac{1}{x}$ と $\frac{d}{dx}(\log(-x)) = \frac{1}{x}$ から、 $\log(-x) = \log(x)$ が導かれる」(したがって $\log(-1) = \log 1 = 0$) という Bernoulli の主張に対し、Leibniz は「微分公式は元々正の数に対してしか意味を持たない」という、ごく当然の批判を返したが、オイラーはライプニッツの批判ははあたらない、と主張し、むしろベルヌーイが積分定数の不定性を考慮していないと批評するのである。

もっと面白いのは、J. ベルヌーイが、「対数法則の普遍的正当性」に基づく $\log(-1)^2 = 2\log(-1)$ を根拠に、 $\log(-1) = 0$ を主張したが、オイラーがこれを「もっとも反論しにくい根拠」といっていることである！オイラーは、対数法則のような「代数的」公式は森羅万象を貫いて貫徹しなければならないという信念を決して疑わない！

⁸ 面積を基礎にした定積分の素朴な定義はフーリエによって、区分求積的な定積分の定義と「連続」関数についての定積分の存在は、極限を利用した微分の定義とともにコーシーによって与えられることは有名である。

そして18世紀末には、オイラーの開拓した広大な数理世界に多くの数学者による「数学の大航海」が始まり、その成功を背景として、代数解析主義は、「純粋数学」から隔たった「応用数学」どころか、正統数学＝幾何との地位の交代を迫るのが18世紀末の動きである。

その動きに関してもっとも典型的なのは、ラグランジュの“*Théorie des fonctions analytiques*” (解析的関数の理論), “*Mécanique analytique*” (解析力学)における「解析」の意味である。よく知られているように、ラグランジュは、「解析」(ラグランジュにおいては反幾何ないし純粋代数とほぼ同義)を大きな柱にして近代数学の再構成を計ったがそれには、整理へと向かうしかない数学研究の未来についてのペシミズムがあったこともよく知られている。ラグランジュとは、内容も方法も大きく異なるが、コーシーの“*Cours d'analyse*” (解析教程)はその延長上にある。

そして、この後、19世紀に数学の大躍進が来ることはよく知られている。19世紀における、論理的厳密主義とも公理主義とも無関係な「純粋数学主義」の理念の形成は、18世紀における反数学主義と、それにも関わらず大きく発展した「代数的解析的研究」、すなわち、「純粋数学」から切り離された「応用数学」の成長が大きく関与しているのではないか。

もちろん、本稿ではまったく触れることができなかったが、一般市民の間に一層強く共有された非宗教的自然思想、新興の自然科学に対する信頼、信仰、あるいはまた、高等教育における代数、解析教育の認知、これと連関する、数学の側の代数、解析の正当化、そして、論理的な批判に対抗できる数学の合理化のような要因も重要ではあるが。

「谷間の時代」は、短い論考で言い尽くせぬ豊かさを持っている。