数理解析研究所講究録
第 752 巻 1991 年 32-52

32

ÜBER ELLIPTISCHE SPITZENFORMEN VOM GEWICHT $g \geq 2$.

Von Ulrich Christian

Mathematisches Institut der Universität
Bunsenstraße 3-5
D-3400 GÖTTINGEN
Bundesrepublik Deutschland

0. EINLEITUNG

Im ersten Paragraphen leiten wir einige grundlegende Eigenschaften über Spitzenformen zur Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe $\Gamma(q)$ der elliptischen Modulgruppe ab. Insbesondere betrachten wir Spitzenformen vom Gewicht g, wobei $qg = 12$ gilt. Ist $\eta^*(z)$ die Dedekindsche η-Funktion, so ist $\eta^{*2g}(z)$ eine Spitzenform zu $\Gamma(q)$ ohne Multiplikatoren. Schließlich werden Weierstraßpunkte elliptischer Spitzenformen untersucht.

Der zweite Paragraph dient der Bereitstellung zweier Hilfssätze über Fouriersche Reihen.

Im dritten Paragraphen gehen wir von Christian [2], [3] aus. Mittels eines Heckeschen Summationsverfahrens setzen wir gewisse Poincarésche Reihen meromorph in die komplexe Ebene fort. Es stellt sich heraus, daß diese Reihen bei $s = 0$ holomorph und die Werte Spitzenformen sind. Wir werden weiter die oben genannten Poincaréschen Reihen in Fourierreihen entwickeln.

Im vierten Paragraphen gehen wir kurz auf die Peterssonsche Metrisierungstheorie ein.

1. GRUNDLAGEN

Es sei $\mathfrak{Z}(1) = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ die in $\mathbb{C}$ gelegene obere Halbebene. Für $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ setze man

$$N\langle z\rangle = \frac{az+b}{cz+d} = x_N + iy_N;\ N\{z\} = cz + d, \tag{1}$$

wobei x_N, y_N Real- und Imaginärteil von $N\langle z\rangle$ bezeichnen. Durch die Zuordnung $z \to N\langle z\rangle$ wird $\mathfrak{Z}(1)$ bijektiv auf sich abgebildet. Das unter $SL(2, \mathbb{R})$ invariante Volumenelement in $\mathfrak{Z}(1)$ ist

$$d\omega_z = \frac{dxdy}{y^2}. \tag{2}$$

Für eine Funktion $f(z)$ auf (1) und $g \in \mathbb{N}$ werde

$$(f|[N,g])(z) = (N\{z\})^{-g} f(N\langle z\rangle) \qquad (N \in SL(2,\mathbb{R}) \tag{3}$$

gesetzt.

Es seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{M}(q) = \left\{N \in SL(2,\mathbb{Z}), N \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod q\right\}$ die "Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe" zur elliptischen Modulgruppe $\mathfrak{M}(1) = SL(2,\mathbb{Z})$. Es sei $\mathfrak{F}(q)$ ein Fundamentalbereich von $\mathfrak{M}(q)$ in $\mathfrak{Z}(1)$. Nach Christian [4], (8) hat $\mathfrak{F}(q)$

$$p(q) = \epsilon(q)^{-1} q^2 \prod_{p^*|q} (1 - p^{*-2}) \tag{4}$$

mod $\mathfrak{M}(q)$ inäquivalente Spitzen $\xi_1 = \infty, \xi_2, \ldots, \xi_{p(q)}$. In (4) ist das Produkt über alle in q steckenden Primzahlen p^* zu bilden. Es gilt

$$\epsilon(q) = \left\{ \begin{matrix} 1 & (q = 1,2) \\ 2 & (q > 2) \end{matrix} \right\}. \tag{5}$$

Bekanntlich gibt es Matrizen $R_1 = I, R_2, \ldots, R_{p(q)} \in \mathfrak{M}(1)$ mit

$$R_\iota^{-1}\langle \xi_\iota\rangle = \infty \qquad (\iota = 1, \ldots, p(q)). \tag{6}$$

Nach Christian [4], (11) gilt für den Gruppenindex

$$[\mathfrak{M}(1)/_{(\pm I)} : \mathfrak{M}(q)/_{(\pm I)\cap \mathfrak{M}(q)}] = qp(q). \tag{7}$$

Aus Christian [4], (16) folgt

$$12 \mid qp(q) \qquad (q \geq 3). \tag{8}$$

Die Untergruppe $\mathfrak{M}_\infty(q)$ besteht aus den Matrizen $N = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(q)$. Man setze $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für $q = 1,2$ wird dann $\mathfrak{M}_\infty(q)$ durch $\pm U^q = \pm \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $q > 2$ durch $U^q = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt. Aus Christian [2], Hilfssatz 1 folgt leicht

Hilfssatz 1: Es gilt

$$\mathfrak{M}(q)R_\kappa U^\mu \cap \mathfrak{M}(q)R_\iota U^\nu = \emptyset \tag{9}$$

$$((\kappa,\mu) \neq (\iota,\nu);\ \iota,\kappa = 1,\dots,p(q);\ \nu,\mu = 0,\dots,q-1).$$

Hieraus folgt, daß

$$\mathfrak{F}(q) = \bigcup_{\iota=1}^{p(q)} \bigcup_{\nu=0}^{q-1} (R_\iota U^\nu)\langle \mathfrak{F}(1)\rangle \tag{10}$$

ein Fundamentalbereich von $\mathfrak{M}(q)$ ist. Dabei ist $\mathfrak{F}(1)$ ein Fundamentalbereich von $\mathfrak{M}(1)$.

Definition 1: Eine Modulform $f(z)$ zu $\mathfrak{M}(q)$ vom Gewicht g ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) $f(z)$ ist holomorph in $\mathfrak{Z}(1)$;

b) Es gilt

$$(f \mid [N,g])(z) = f(z) \qquad (N \in \mathfrak{M}(q)); \tag{11}$$

c) Für jedes $R \in \mathfrak{M}(1)$ besteht eine Fourierentwicklung

$$(f \mid [R,g])(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a(f \mid [R,g],\nu) e^{\frac{2\pi i \nu z}{q}}. \tag{12}$$

Der Vektorraum aller Modulformen zu $\mathfrak{M}(q)$ vom Gewicht g werde mit $\mathfrak{M}(q,g)$ bezeichnet. $f(z)$ heiße "Spitzenform", wenn $a(f \mid [R,g],0) = 0$ $(R \in \mathfrak{M}(1))$ gilt. Der Vektorraum der Spitzenformen sei $\mathfrak{T}(q,g)$. Man setze

$$\eta(q,g) = \dim \mathfrak{T}(q,g). \tag{13}$$

Da $\mathfrak{M}(q)$ Normalteiler von $\mathfrak{M}(1)$ ist, ist mit $f(z) \in \mathfrak{M}(q,g)$ bzw. $f(z) \in \mathfrak{T}(q,g)$ auch $f \mid [R,g] \in \mathfrak{M}(q,g)$ bzw. $f \mid [R,g] \in \mathfrak{T}(q,g)$ $(R \in \mathfrak{M}(1))$.

Verabredung: Für $q \geq 3$ ist das Gewicht $g \in \mathbb{Z}$. Ferner gilt

$$g \equiv 0 \bmod 2 \qquad (q = 1,2). \tag{14}$$

Satz 1: Es ist

$$\dim \mathfrak{M}(q,g) = \eta(q,g) + \left\{ \begin{array}{ll} p(q)-1 & (g=2) \\ p(q) & (g \geq 3) \end{array} \right\}. \tag{15}$$

Ferner gilt

$$\eta(q,2) = 0 \qquad (q = 1,2,3,4,5) \tag{16}$$

$$\eta(q,2) = \frac{qp(q)}{12} - \frac{p(q)}{2} + 1 \quad (q \geq 2), \tag{17}$$

$$\eta(1,g) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (g=2) \\ \left[\frac{g}{12}\right] - 1 & (g \equiv 2 \, mod \, 12, \; g \geq 14) \\ \left[\frac{g}{12}\right] & (g \not\equiv 2 \, mod \, 12) \end{array} \right\} (g \equiv 0 \bmod 2), \tag{18}$$

$$\eta(q,g) = \frac{qp(q)}{12}(g-1) - \frac{p(q)}{2} \qquad (q \geq 2, \, g \geq 3) \tag{19}$$

$$\eta(q,2) \geq 1 \qquad (q \geq 6). \tag{20}$$

Beweis: Die Aussagen (15) folgen aus Schoeneberg [24], Chapter 7 und das erste auch aus Hecke [10], Seite 472, Satz 6. Der Rest folgt aus Christian [4], Satz 4 und Formeln (253), (254) oder aus Christian [5], §6.

Satz 2: Es seien $q, g \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\eta(q,g) = 0 \qquad (qg < 12), \tag{21}$$

$$\eta(q,g) = 1 \qquad (qg = 12). \tag{22}$$

$$\eta(q,g) > 1 \qquad (q,g \geq 2; \; qg > 12). \tag{23}$$

Beweis: (21), (22) folgen für $g = 1$ aus Christian [6], (13), (16). Dabei ist zu beachten, daß laut unserer Verabredung für $g = 1$ immer $q \geq 3$ sein muß . Für $g \geq 2$ folgen (21), (22), (23) aus Satz 1. Für $g \equiv 1 \bmod 2$ muß laut Verabredung $q \geq 3$ sein.

Satz 3: Es seien $\eta^*(z)$ die Dedekindsche η-Funktion, $q, g \in \mathbb{N}$ und

$$qg = 12. \tag{24}$$

Dann ist

$$\eta^{*2g}(z) \in \mathfrak{N}(q,g), \tag{25}$$

η^{*2g} spannt den Vektorraum $\mathfrak{N}(q,g)$ auf, und es gilt

$$a(\eta^{*2g} \mid [R,g], 1) \neq 0 \qquad (R \in \mathcal{M}(1)). \tag{26}$$

Beweis: Nach Lint [13], insbesondere theorem 3 oder Petersson [17], Seite 32, (8.6) ist $\eta^*(z)$ eine Modulform zu $\mathcal{M}(1)$ vom Gewicht $\frac{1}{2}$ mit dem Multiplikatorensystem

$$v(M) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{d}{c}\right)^* e^{\frac{\pi i}{12}\{(a+d)c - bd(c^2-1) - 3c\}} & (c \equiv 1 \bmod 2) \\ \left(\frac{c}{d}\right)_* e^{\frac{\pi i}{12}\{(a+d)c - bd(c^2-1) + 3(d-1) - 3cd\}} & (c \equiv 0 \bmod 2) \end{array} \right\} \tag{27}$$

$$\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(1)\right)$$

und

$$\left(\frac{d}{c}\right)^{*2} = \left(\frac{c}{d}\right)_*^2 = 1. \tag{28}$$

Hieraus folgt sofort

$$v^{2g}(M) = 1 \qquad (M \in \mathcal{M}(q)), \tag{29}$$

sofern (24) gilt. Also $\eta^{*2g}(z) \in \mathfrak{M}(q,g)$.

Es gilt

$$\eta^*(z) = e^{\frac{\pi i z}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n z}) \qquad (z \in \mathfrak{z}(1)). \tag{30}$$

Also wegen (24)

$$\eta^{*2g}(z) = e^{\frac{2\pi i z}{q}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n z})^{2g}. \tag{31}$$

Daraus folgt

$$a(\eta^{*2g}, 0) = 0,\ a(\eta^{*2g}, 1) \neq 0. \tag{32}$$

Für $R \in \mathcal{M}(1)$ ist

$$(\eta^{*2g} \mid [R,g])(z) = v(R)\eta^{*2g}(z). \tag{33}$$

Vermöge (32), (33) also

$$a(\eta^{*2g} \mid [R,g], 0) = 0,\ a(\eta^{*2g} \mid [R,g], 1) \neq 0 \quad (R \in \mathcal{M}(1)). \tag{34}$$

Damit hat man (25), (26). Wegen (22) spannt η^{*2g} den Vektorraum $\mathfrak{r}(q,g)$ auf. Satz 3 ist bewiesen.

Definition 2: Es sei $f \in \mathfrak{M}(q,g)$ und nicht identisch 0. Für $z_0 \in \mathfrak{z}(1)$ hat man eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b(f, z_0, \nu)(z - z_0)^{\nu}. \tag{35}$$

Ist dann

$$b(f, z_0, \nu) = 0 \quad (\nu = 0, 1, ..., \tau - 1),\ b(f, z_0, \tau) \neq 0, \tag{36}$$

so hat $f(z)$ bei z_0 eine "Nullstelle der Ordnung $\tau = \tau(f, z_0)$". Ist R_ι eine der Matrizen (6) und gilt in der Fourierentwicklung (12)

$$\left\{ \begin{array}{l} a(f \mid [R_\iota, g], \nu) = 0 \quad (\nu = 0, 1, ..., \tau - 1), \\ a(f \mid [R_\iota, g], \tau) \neq 0 \end{array} \right\}, \tag{37}$$

so hat $f(z)$ bei ξ_ι eine "Nullstelle der Ordnung $\tau = \tau(f, \xi_\iota)$" $(\iota = 1, \ldots, p(q))$. Für $q \geq 2$ heißt

$$\tau(f) = \sum_{\substack{z_0 \in \mathfrak{F}(1) \\ z_0 \text{ inkongruent mod } \mathfrak{M}(q)}} \tau(f, z_0) + \sum_{\iota=1}^{p(q)} \tau(f, \xi_\iota) \tag{38}$$

die "Nullstellenanzahl von f". Für $q = 1$ hat man $\tau(f, z_0)$ durch $\frac{1}{2}\tau(f, z_0)$ bzw. $\frac{1}{3}\tau(f, z_0)$ zu ersetzen, sofern z_0 zu i bzw. $\rho = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ unter $\mathfrak{M}(1)$ äquivalent ist.

Satz 4: Es sei $f \in \mathfrak{M}(q, g)$, f nicht identisch 0. Dann ist

$$\tau(f) = \frac{gqp(q)}{12}. \tag{39}$$

Beweis: (7), (8) und Rankin [21], Seite 98, theorem 4.1.4 oder Schoeneberg [24], Seite 114, theorem 8.

Hilfssatz 2: Auf einem Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathbb{C}$ sei ein System $\mathcal{L}$ holomorpher Funktionen gegeben. $\mathcal{L}$ bilde einen k-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{C}$. Es sei $z_o \in \mathfrak{G}$. Jede Funktion $f(z) \in \mathcal{L}$ besitzt dann bei z_0 eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b(f, z_0, \nu)(z - z_0)^\nu. \tag{40}$$

k ganze Zahlen

$$0 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k \tag{41}$$

heißen ein "Hauptsystem" zum Vektorraum $\mathcal{L}$ und zum Punkt z_0, wenn es k Funktionen $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{L}$ gibt, so daß

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} b(f_1, z_0, n_1) & \ldots & b(f_k, z_0, n_1) \\ \vdots & & \vdots \\ b(f_1, z_0, n_k) & \ldots & b(f_k, z_0, n_k) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{42}$$

ist. Solche Hauptsysteme gibt es. Ist $n_1, \ldots, n_k$ ein Hauptsystem zu $\mathcal{L}$ und z_0, so gilt (42) genau dann, wenn die $f_1, \ldots, f_k$ eine Basis von $\mathcal{L}$ bilden. Ein Hauptsystem $n_1, \ldots, n_k$ heißt "größer" als das Hauptsystem $n_1^*, \ldots, n_k^*$, wenn die

von Null verschiedene Differenz $n_\kappa - n_\kappa^*$ mit kleinstem Index $\kappa = 1, \ldots, k$ positiv ist. Das kleinste Hauptsystem zu $\mathcal{L}$ und z_0 heiße "Grundsystem". Es werde mit

$$0 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_k \tag{43}$$

bezeichnet. $\mathcal{L}$ besitzt eine Basis $G_1, \ldots, G_k$, welche bei z_0 die Entwicklung

$$G_\iota(z) = \sum_{\nu=m_\iota}^{\infty} b(G_\iota, z_0, \nu)(z - z_0)^\nu \quad (\iota = 1, \ldots, k), \tag{44}$$

$$b(G_\iota, z_0, m_\iota) = 1 \qquad (\iota = 1, \ldots, k) \tag{45}$$

hat.

Beweis: Christian [6], Hilfssatz 1 oder Petersson [16], §1.

Hilfssatz 3: Mit einer Basis $f_1, \ldots, f_k$ von $\mathcal{L}$ und

$$f_\iota^{(\kappa)} = \frac{d^\kappa f_\iota}{dz^\kappa} \qquad (\iota = 1, \ldots, k;\ \kappa = 0, \ldots, k-1) \tag{46}$$

bilde man die "Wronskische Determinante"

$$\mathfrak{W}(f_1, \ldots, f_k) = Det \begin{pmatrix} f_1^{(0)} & \ldots & f_k^{(0)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ f_1^{(k-1)} & \ldots & f_k^{(k-1)} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Diese ist nicht identisch Null und durch $\mathcal{L}$ bis auf einen von Null verschiedenen Faktor eindeutig bestimmt. Man bezeichnet daher

$$V(\mathcal{L}, z) = \mathfrak{W}(f_1, \ldots, f_k; z) \tag{48}$$

als "Wronskische Determinante von $\mathcal{L}$".

Ihre Nullstellen und deren Ordnungen sind durch $\mathcal{L}$ allein bestimmt. Ist $z_0 \in \mathfrak{g}$ und $m_1, \ldots, m_k$ das zu z_0 gehörende Grundsystem, so hat $V(\mathcal{L}, z)$ bei z_0 genau eine Nullstelle der Ordnung

$$\sum_{\iota=1}^{k} m_\iota - \frac{k(k-1)}{2}. \tag{49}$$

Für alle Punkte $z_0 \in \mathfrak{g}$, in denen $V(\mathcal{L}, z_0) \neq 0$ ist, gilt also

$$m_\iota = \iota - 1 \qquad (\iota = 1, \ldots, k). \tag{50}$$

Beweis: Christian [6], Hilfssatz 2 oder Petersson [16], §1.

Satz 5: Es sei $\eta(q,g) > 0$. Die Wronskische Determinante $W(q,z) = V(\Upsilon(q,g),z)$ ist eine Spitzenform zu $\mathcal{M}(1)$, welche sich nach dem Gesetz

$$W(q,R\{z\}) = v(R)(R\{z\})^{\eta^2(q,g)+(g-1)\eta(q,g)}W(q,z) \quad (R \in \mathcal{M}(1)) \tag{51}$$

transformiert. Die Multiplikatoren $v(R)$ sind Charaktere der Faktorgruppe $\mathcal{M}(1)/\mathcal{M}(q)$. Sie sind also $(qp(q))$-te Einheitswurzeln, und es gilt

$$v(M) = 1 \qquad (M \in \mathcal{M}(q)). \tag{52}$$

Man fasse $W(q,z)$ als Spitzenform vom Gewicht $\eta^2(q,g)+(g-1)\eta(q,g)$ zu $\mathcal{M}(q)$ auf. Es sei $z_0 \in \mathfrak{Z}(1)$ und $m_1,\ldots,m_{\eta(q,g)}$ das zu z_0 gehörende Grundsystem. Dann hat $W(q,z)$ bei $z = z_0$ eine Nullstelle der Ordnung

$$\beta(q,g,z_0) = \sum_{\iota=1}^{\eta(q,g)} m_\iota - \frac{\eta(q,g)(\eta(q,g)-1)}{2}. \tag{53}$$

Es sei $\xi \in \mathbb{Q} \cup \infty$ und $R \in \mathcal{M}(1)$ so gewählt, daß $R^{-1}\langle\xi\rangle = \infty$ ist. Die Zahlen

$$1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_{\eta(q,g)} \tag{54}$$

bilden ein "Hauptsystem" zum Vektorraum $\Upsilon(q,g)$ und zum Punkt ξ, wenn es $\eta(q,g)$ Funktionen $f_1,\ldots,f_{\eta(q,g)} \in \Upsilon(q,g)$ gibt,so daß

$$Det\begin{pmatrix} a(f_1 \mid [R,g],n_1) & \ldots & a(f_{\eta(q,g)} \mid [R,g],n_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a(f_1 \mid [R,g],n_{\eta(q)}) & \ldots & a(f_{\eta(q,g)} \mid [R,g],n_{\eta(q,g)}) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{55}$$

ist. Dabei sind die $a(\ldots)$ durch (12) erklärt. Solche Hauptsysteme gibt es. Ist $n_1,\ldots,n_{\eta(q,g)}$ ein Hauptsystem zu $\Upsilon(q,g)$ und ξ, so gilt (55) genau dann, wenn die $f_1,\ldots,f_{\eta(q,g)}$ eine Basis von $\Upsilon(q,g)$ bilden. Ein Hauptsystem $n_1,\ldots,n_{\eta(q,g)}$ heißt "größer" als das Hauptsystem $n_1^*,\ldots,n_{\eta(q,g)}^*$, wenn die von Null verschiedene Differenz $n_\kappa - n_\kappa^*$ mit kleinstem Index $\kappa = 1,\ldots,\eta(q,g)$ positiv ist. Das kleinste Hauptsystem zu $\Upsilon(q,g)$ und ξ heiße "Grundsystem". Es werde mit

$$1 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_{\eta(q,g)} \tag{56}$$

bezeichnet. $\Gamma(q,g)$ besitzt eine Basis $G_1, \ldots, G_{\eta(q,g)}$ mit

$$(G_\iota \mid [R,g])(z) = \sum_{\nu=m_\iota}^{\infty} a(G_\iota \mid [R,g],\nu) e^{\frac{2\pi i \nu z}{q}} \quad (\iota = 1, \ldots, \eta(q,g)), \tag{57}$$

$$a(G_\iota \mid [R,g], m_\iota) = 1 \qquad (\iota = 1, \ldots, \eta(q,g)). \tag{58}$$

Für eine Basis $f_1, \ldots, f_{\eta(q,g)}$ von $\Gamma(q,g)$ gilt

$$\mathfrak{M}(f_1 \mid [R,g], \ldots, f_{\eta(q,g)} \mid [R,g]; z) = v(R)\mathfrak{M}(f_1, \ldots, f_{\eta(q,g)}; z) \tag{59}$$
$$(R \in \mathcal{M}(1))$$

$$\mathfrak{M}(f_1 \mid [R,g], \ldots, f_{\eta(q,g)} \mid [R,g]; z) = \sum_{\nu=\frac{\eta(q,g)(\eta(q,g)+1)}{2}} d(q,R,\nu) e^{\frac{2\pi i \nu z}{q}} \tag{60}$$
$$(R \in \mathcal{M}(1)),$$

$$d(q,R,\nu) = v(R) d(q,I,\nu) \quad (R \in \mathcal{M}(1);\ \nu \in \mathbb{N}). \tag{61}$$

Die Funktion $W(q,z)$ hat bei ξ eine Nullstelle der Ordnung

$$\sum_{\iota=1}^{\eta(q,g)} m_\iota = \beta(q,g,\xi) + \frac{\eta(q,g)(\eta(q,g)+1)}{2}, \tag{62}$$

wobei $\beta(q,g,\xi)$ durch die Gleichung (62) definiert ist.

Es seien $R \in \mathcal{M}(1)$ und $z_0 \in \mathfrak{z}(1) \cup \mathbb{Q} \cup \infty$. Dann gehört zu z_0 und $R\langle z_0 \rangle$ dasselbe Grundsystem $m_1, \ldots, m_{\eta(q,g)}$. Ferner gilt

$$\beta(q,g,R\langle z \rangle) = \beta(q,g,z) \quad (z \in \mathfrak{z}(1) \cup \mathbb{Q} \cup \infty;\ R \in \mathcal{M}(1)). \tag{63}$$

Für $\xi \in \mathbb{Q} \cup \infty$ gehören zu ξ und $R\langle \xi \rangle$ sogar dieselben Hauptsysteme. Es bezeichne $\mathfrak{f}_0(1)$ einen Bereich in $\mathfrak{z}(1)$, der keinen der Punkte $R\langle i \rangle$ und $R\langle \rho \rangle$ $(R \in \mathcal{M}(1))$, $\rho = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ enthält; zu jedem anderen Punkt aus $\mathfrak{z}(1)$ liege in $\mathfrak{f}_0(1)$ je ein Repräsentant jeder Restklasse mod $\mathcal{M}(1)$. Man setze

$$B(q,g) = \sum_{z \in \mathfrak{f}_0(1)} \beta(q,g,z) + \frac{1}{2}\beta(q,g,i) + \frac{1}{3}\beta(q,g,\rho) + \frac{1}{q}\beta(q,g,\infty). \tag{64}$$

Für $z \in \mathfrak{z}(1) \cup \mathbb{Q} \cup \infty$ heißt $\beta(q,g,z)$ die "Weierstraßordnung" von z. Ist $\beta(q,g,z) > 0$, so heißt z ein "Weierstraßpunkt" von $\Gamma(q,g)$.

Es sei $\beta(q,g,z_0) = 0$. Für $z_0 \in \mathfrak{z}(1)$ ist das Grundsystem zu z_0 dann durch $0,1,\ldots,\eta(q,g)-1$ gegeben. Ist $z_0 \in \mathbb{Q} \cup \infty$, so lautet das Grundsystem $1,\ldots,\eta(q,g)$.

Die Zahl $B(q,g)$ heißt die "Weierstraßordnung von $\mathfrak{r}(q,g)$". Es gilt

$$B(q,g) = \frac{1}{2}(\frac{1}{6} - \frac{1}{q})\eta^2(q,g) + \frac{1}{2}\left(\frac{g-1}{6} - \frac{1}{q}\right)\eta(q,g), \tag{65}$$

also

$$B(q,2) = \frac{q^2p^2(q)}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{q}\right)^3 + \frac{3qp(q)}{4}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{q}\right) \quad (q \geq 2,\ g = 2), \tag{66}$$

$$B(q,g) = \left(\frac{g-1}{6} - \frac{1}{q}\right)^2 \left\{\frac{q^2p^2(q)}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{q}\right) + \frac{qp(q)}{4}\right\} \quad (q \geq 2,\ g \geq 3). \tag{67}$$

Beweis: Wie im Beweis von Christian [6], Satz 6. Die Formel Christian [6], (56) muß durch

$$f^{(\nu)}(R(z)) = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} a_{\nu\lambda}(z) f_R^{(\lambda)}(z) + (R\{z\})^{2\nu+g} f_R^{(\nu)}(z) \ (\nu \in 0 \cup \mathbb{N}). \tag{68}$$

ersetzt werden. Statt Christian [6], (40) bekommt man dann (51). Die Gleichung (65) beweist man genauso, wie Christian [6], (68). Aus (17), (19), (65) folgen (66), (67). Man siehe auch Petersson [16], §1.

Satz 6: Es seien $q,g \in \mathbb{N}$,

$$qg = 12. \tag{69}$$

Dann ist $\eta(q,g) = 1$ und

$$B(q,g) = 0, \tag{70}$$

d.h., $\mathfrak{r}(q,g)$ besitzt keine Weierstraßpunkte.

Beweis: Aus (22), (69) folgt $\eta(q,g) = 1$, wegen (65) also (70). Satz 6 ist bewiesen.

Satz 7: Es seien $q,g \in \mathbb{N}$,

$$q,g \geq 2, \tag{71}$$

$$qg \geq 12. \tag{72}$$

Dann ist

$$\eta(q,g) \geq 1 \tag{73}$$

und

$$B(q,g) = 0 \qquad (2 \leq q \leq 5;\ q = 6,\ g = 2), \tag{74}$$

d.h., $\Gamma(q,g)$ hat keine Weierstraßpunkte, sowie

$$B(q,g) > 0 \qquad (q \geq 7;\ q = 6,\ g \geq 3), \tag{75}$$

d.h., $\Gamma(q,g)$ besitzt Weierstraßpunkte.

Beweis: Aus (22), (23) folgt (73). Für $q \geq 7$ und $q = 6,\ g \geq 3$ folgt (75) aus (65) und (73). Für $q = 6,\ g = 2$ erhält man (74) aus Satz 6. Aus

$$2 \leq q \leq 5 \tag{76}$$

und (72) folgt

$$g \geq 3. \tag{77}$$

Die Formeln (19), (65) liefern

$$B(q,g) = \frac{\eta(q,g)}{2}\left(\frac{g-1}{6} - \frac{1}{q}\right) C(q) \tag{78}$$

mit

$$C(q) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{q}\right)\frac{qp(q)}{2} + 1. \tag{79}$$

Die Aussage (74) ist dann gleichbedeutend mit

$$C(q) = 0 \qquad (q = 2,3,4,5), \tag{80}$$

und dieses ist äquivalent zu

$$p(q) = \frac{12}{6-q} \qquad (q = 2,3,4,5). \tag{81}$$

Wegen (4) ist dieses richtig. Satz 7 ist bewiesen.

2. FOURIERREIHEN

Die folgenden Hilfssätze wurden in Christian [6], Hilfssätze 3 und 4 ohne Beweis hingeschrieben. Daher wollen wir sie hier beweisen.

Hilfssatz 4: Es sei $F(s,x)$ eine Funktion der komplexen Variablen s und der reellen Variablen x. Bezüglich x sei $F(s,x)$ in $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar, und es gebe ein $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ mit

$$F(s,x+r) = F(s,x). \tag{82}$$

Bezüglich s sei $F(s,x)$ in $\mathcal{G}-\{b_\nu\}$ holomorph. Dabei sei $\mathcal{G}$ eine offene Menge in $\mathbb{C}$; die b_ν seien isoliert liegende Punkte in $\mathcal{G}$. Bei den isolierten Punkten b_ν kann $F(s,x)$ Pole aber auch wesentliche Singularitäten haben.

Für $s \in \mathcal{G}-\{b_\nu\}$ läßt sich dann $F(s,x)$ in eine Fourierreihe

$$F(s,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(s,m) e^{\frac{2\pi i m x}{r}} \tag{83}$$

entwickeln. Die $f(s,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$ sind in $\mathcal{G}-\{b_\nu\}$ holomorph. Bei den b_ν liegen isolierte Singularitäten. Es seien

$$F(s,x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} C(\mu,x)(s-b_\nu)^\mu, \tag{84}$$

$$f(s,m) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c(\mu,m)(s-b_\nu)^\mu \quad (m \in \mathbb{Z}) \tag{85}$$

die Laurententwicklungen von $F(s,x)$und $f(s,m)$ in einem der Punkte b_ν. Dann gilt

$$C(\mu,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(\mu,m) e^{\frac{2\pi i m x}{r}} \quad (\mu \in \mathbb{Z}). \tag{86}$$

Genau dann ist $F(s,x)$ in einem Punkt $s_0 \in \mathcal{G}$ holomorph, wenn es alle $f(s,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$ sind.

Hat $F(s,x)$ bei $s_0 \in \mathcal{G}$ einen Pol genau l-ter Ordnung, so haben die $f(s,m)$ $(m \in \mathbb{Z})$ bei s_0 Pole höchstens l-ter Ordnung; es gibt aber ein m_0, so daß $f(s,m_0)$ bei s_0 einen Pol genau l-ter Ordnung besitzt. Für die k-ten Ableitungen nach s gilt

$$\frac{\partial^k}{\partial s^k} F(s,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^k}{ds^k} f(s,m) \right) e^{\frac{2\pi i m x}{r}}. \tag{87}$$

Beweis: Es genügt, die Aussagen des Hilfssatzes vom Anfang bis (86) zu beweisen. Der Rest ist dann klar. Aus den Voraussetzungen über $F(s,x)$ folgt, daß die Fourierentwicklung (83) existiert und die Funktion darstellt. Es gilt

$$f(s,m) = \frac{1}{r}\int_0^r F(s,x)e^{-\frac{2\pi imx}{r}}dx \quad (m \in \mathbb{Z}). \tag{88}$$

Also sind die $f(s,m)$ in $\mathfrak{G} - \{b_\nu\}$ holomorph. Bei den b_ν liegen isolierte Singularitäten. Man kann also die Laurentreihen (84), (85) bilden. Es sei K ein positiv orientierter Kreis mit dem Mittelpunkt b_ν. Die Kreislinie K und das Innere des Kreises mögen in $\mathfrak{G} - \{b_1, \ldots, b_{\nu-1}, b_{\nu+1}, \ldots\}$ enthalten sein. Dann ist

$$C(\mu,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F(s,x)}{(s-b_\nu)^{\mu+1}}ds \quad (\mu \in \mathbb{Z}), \tag{89}$$

$$c(\mu,m) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(s,m)}{(s-b_\nu)^{\mu+1}}ds \quad (\mu,m \in \mathbb{Z}). \tag{90}$$

Wegen (89) ist $C(\mu,x)$ eine in $\mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion in x mit der Periode r. Es besteht also eine Fourierentwicklung

$$C(\mu,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c^*(\mu,m)e^{\frac{2\pi imx}{r}} \quad (\mu \in \mathbb{Z}). \tag{91}$$

Dabei ist

$$c^*(\mu,m) = \frac{1}{r}\int_0^r C(\mu,x)e^{-\frac{2\pi imx}{r}}dx \quad (\mu,m \in \mathbb{Z}). \tag{92}$$

Aus (88), (90), (92) folgt

$$\begin{aligned} c(\mu,m) &= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(m,s)}{(s-b_\nu)^{\mu+1}}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_K \left(\frac{1}{r}\int_0^r \frac{F(s,x)}{(s-b_\nu)^{\mu+1}}e^{-\frac{2\pi imx}{r}}dx\right)ds \\ &= \frac{1}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F(s,x)}{(s-b_\nu)^{\mu+1}}ds\right)e^{-\frac{2\pi imx}{r}}dr \\ &= \frac{1}{r}\int_0^r C(\mu,x)e^{-\frac{2\pi imx}{r}}dx = c^*(\mu,m). \end{aligned}$$

Also $c^*(\mu,m) = c(\mu,m)$ $(\mu,m \in \mathbb{Z})$. Hieraus und aus (91) folgt (86). Die beiden Integrale durften vertauscht werden, da beide Male stetige Funktionen über kompakte Strecken integriert wurden. Hilfssatz 4 ist bewiesen.

Hilfssatz 5: Die Funktionen $f_\nu(x)$ $(\nu \in \mathbb{N})$ seien auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Für $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ gelte

$$f_\nu(x+r) = f_\nu(x) \qquad (\nu \in \mathbb{N}). \tag{93}$$

Die Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) \tag{94}$$

sei absolut gleichmäßig konvergent und $f(x)$ differenzierbar. Offenbar hat $f(x)$ auch die Periode r. Es sei

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m) e^{\frac{2\pi i m x}{r}}, \tag{95}$$

$$f_\nu(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(\nu, m) e^{\frac{2\pi i m x}{r}} \quad (\nu \in \mathbb{N}). \tag{96}$$

Dann gilt

$$c(m) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c(\nu, m) \qquad (m \in \mathbb{Z}). \tag{97}$$

Die Reihe (97) ist absolut konvergent.

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt, daß die Fourierreihen (95), (96) die jeweiligen Funktionen darstellen. Es ist

$$c(m) = \frac{1}{r} \int_0^r f(x) e^{-\frac{2\pi i m x}{r}} dx, \tag{98}$$

$$c(\nu, m) = \frac{1}{r} \int_0^r f_\nu(x) e^{-\frac{2\pi i m x}{r}} dx. \tag{99}$$

Aus (99) folgt

$$|c(\nu, m)| \leq \frac{1}{r} \int_0^r |f_\nu(x)| dx, \tag{100}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |c(\nu, m)| \leq \frac{1}{r} \int_0^r |f_\nu(x)| dx < \infty. \tag{101}$$

Also konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von (97) absolut. Setzt man in (98) für $f(x)$ die Reihe (94) ein, vertauscht Integration und Summation und benutzt (99), so folgt (97). Hilfssatz 5 ist bewiesen.

3. POINCARÉREIHEN

Satz 8: Es seien s^*, s komplexe Variable, $w, z \in \mathfrak{z}(1)$ und $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$.

Die Poincaréreihe

$$K(q,g,w,z,s^*,s) = \sum_{N \in \mathcal{M}(q)} (-\bar{w} + N\langle z\rangle)^{-g}(N\{z\})^{-g}|-\bar{w} + N\langle z\rangle|^{-s^*}|N\{z\}|^{-s} \tag{102}$$

konvergiert für $\operatorname{Re} s^* > 1-g$, $\operatorname{Re} s > 2-g$ absolut und stellt eine holomorphe Funktion in s^*, s dar. Sie läßt sich meromorph auf den s^*, s-Raum fortsetzen. Für $\operatorname{Re} s^* > 1-g$ ist sie bei $s = 0$ holomorph.

Für $n \in \mathbb{N}$ setze man

$$P(q,g,n,z,s) = \sum_{N \in \mathcal{M}_\infty(q)\backslash \mathcal{M}(q)} (N\{z\})^{-g}|N\{z\}|^{-s} e^{\frac{2\pi i n}{q} N\langle z\rangle}. \tag{103}$$

Dann ist

$$K(q,g,w,z,0,s) = \left(\frac{-2\pi i}{q}\right)^g \frac{1}{(g-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{g-1} P(q,g,n,z,s) e^{-\frac{2\pi i n \Phi}{q}}, \tag{104}$$

$$P(q,g,n,z,s) = \left(\frac{-2\pi i}{q}\right)^{-g} (g-1)! n^{1-g} \frac{1}{q} \int_0^q K(q,g,w,z,0,s) e^{\frac{2\pi i n \Phi}{q}} du \tag{105}$$

$$(n \in \mathbb{N})$$

mit $w = u + iv$.

Die Reihen $P(q,g,n,z,s)$ $(n \in \mathbb{N})$ sind in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 2-g$ absolut konvergent und holomorph. Sie lassen sich meromorph auf die s-Ebene fortsetzen; bei $s = 0$ sind sie holomorph. Es gilt

$$P(q,g,n,z,0) \in \mathfrak{r}(q,g) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{106}$$

Weiter ist

$$K(q,g,w,z,0,0) = (-1)^g \overline{K(q,g,z,w,0,0)}. \tag{107}$$

Beweis: Christian [3].

Für $T \in SL(2,\mathbb{R})$ setze man

$$P_T(q,g,n,z,s) = (T\{z\})^{-g}|T\{z\}|^{-s} P(q,g,n,T\langle z\rangle,s) \ (n \in \mathbb{N}), \tag{108}$$

$$P_R(q,g,n,N\langle z\rangle,s) = (N\{z\})^{-g}|N\{z\}|^{-s}P_R(q,g,n,z,s) \qquad (109)$$
$$(n \in \mathbb{N};\ R \in \mathcal{M}(1);\ M \in \mathcal{M}(q)).$$

Für $N \in \mathcal{M}_\infty(q)$ also

$$P_R(q,g,n,z+q,s) = P_R(q,g,n,z,s) \qquad (n \in \mathbb{N}). \qquad (110)$$

Also existiert eine Fourierentwicklung

$$P_R(q,g,n,z,s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(q,g,R,n,m,y,s)e^{-\frac{2\pi imx}{q}}dx \ (n \in \mathbb{N}), \qquad (111)$$

$$h(q,g,R,n,m,y,s) = \frac{1}{q}\int_0^q P_R(q,g,n,z,s)e^{-\frac{2\pi imx}{q}}dx \ (m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N}). \qquad (112)$$

Satz 9: Die Fourierkoeffizienten $h(q,g,R,n,m,y,s)$ sind in der s-Ebene meromorph. Polstellen liegen nur dort, wo $P_R(q,g,n,z,s)$ Pole hat. Gibt es ein $m_0 \in \mathbb{Z}$, so daß $h(q,R,n,m_0,y,s)$ bei s_0 einen Pol hat, so besitzt auch $P_R(q,g,n,z,s)$ einen Pol bei s_0. Die Polordnung von $P_R(q,g,n,z,s)$ bei s_0 ist gleich der maximalen Polordnung aller $h(q,g,R,n,m,y,s)$ $(m \in \mathbb{Z})$ bei s_0.

In der Halbebene $\mathrm{Re}\, s > 2-g$ sind die $P_R(q,g,n,z,s)$ und $h(q,R,n,m,y,s)$ holomorph. Ferner sind diese Funktionen bei $s=0$ holomorph $(n \in \mathbb{N};\ m \in \mathbb{Z})$. Schließlich gilt

$$h(q,g,R,n,m,y,0) = 0 \qquad (m \leq 0). \qquad (113)$$

Beweis: Hilfssätze 4, 5, Satz 8. Schließlich folgt (113) aus (106), da die Fourierkoeffizienten einer Spitzenform für $m \leq 0$ verschwinden.

Satz 10: Es seien $\mathrm{Re}\, s > 2-g$, $n \in \mathbb{N}$, $R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(1)$ und

$$S(q,R,c,n,m) = \frac{1}{q}\sum_{\substack{d \bmod qc \\ \langle d,c\rangle = 1 \\ d \equiv r_4 \bmod q}} e^{2\pi i\frac{na+md}{qc}} \qquad (114)$$

die Kloostermannsche Summe. Dabei läuft d über alle Restklassen mod qc mit $\langle d,c\rangle = 1$ und $d = r_4 \bmod q$. $a \bmod qc$ ist die dem Paar (cd) vermöge Christian [6], Hilfssatz 5 eindeutig zugeordnete Restklasse.

Für $\alpha, \beta > 0$ sei weiter

$$f(g,\alpha,\beta,y,s) = \int_{-\infty}^{\infty}(x+iy)^{-g}|x+iy|^{-s}e^{-2\pi i\left(\frac{\alpha}{x+iy}+\beta(x+iy)\right)}dx. \qquad (115)$$

Dann gilt für $g \geq 2$

$$f(g,\alpha,\beta,y,0) = 2\pi \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{g-1}{2}} i^{-g} J_{g-1}(4\pi\sqrt{\alpha\beta}). \tag{116}$$

Dabei ist $J_{g-1}(...)$ die bekannte Besselsche Funktion.

Es sei

$$\mathcal{M}(q)R \cap \mathcal{M}_\infty(1) = \emptyset. \tag{117}$$

$$h(q,g,R,n,m,y,s) = e^{-\frac{2\pi}{q}my} \cdot \{ \sum_{\substack{c=1 \\ c\equiv r_3 \bmod q}}^{\infty} c^{-g-s} f(g, \frac{n}{qc^2}, \frac{m}{q}, y, s) S(q,R,c,n,m) \tag{118}$$

$$+(-1)^g \sum_{\substack{c=1 \\ c\equiv -r_3 \bmod q}}^{\infty} c^{-g-s} f(g, \frac{n}{qc^2}, \frac{m}{q}, y, s) S(q,-R,c,n,m)\},$$

$$h(q,g,R,n,m,y,0) = e^{-\frac{2\pi}{q}my} \cdot 2\pi i^{-g} (\frac{m}{n})^{\frac{g-1}{2}} \cdot \tag{119}$$

$$\{ \sum_{\substack{c=1 \\ c\equiv r_3 \bmod q}}^{\infty} c^{-1} J_{g-1}(4\pi \frac{1}{qc}\sqrt{mn}) S(q,R,c,n,m)$$

$$+(-1)^g \sum_{\substack{c=1 \\ c\equiv -r_3 \bmod q}}^{\infty} c^{-1} J_{g-1}(4\pi \frac{1}{qc}\sqrt{mn}) S(q,-R,c,n,m)\}.$$

Nun sei

$$\mathcal{M}(q)R \cap \mathcal{M}_\infty(1) \neq \emptyset. \tag{120}$$

Wie in Christian [6], (130) folgt

$$R = \delta \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\delta = \pm 1,\ r \in \mathbb{Z}). \tag{121}$$

Dann bekommt man

$$P_R(q,g,n,z,s) = \delta^g P(q,g,n,z+r,s) \tag{122}$$

$$h(q,g,R,n,m,y,s) = \delta^g h(q,g,I,n,m,y,s) e^{\frac{2\pi i m r}{q}}. \tag{123}$$

Dann ist

$$h(q,g,I,n,m,y,s) = e^{-2\pi n\frac{m}{q}y}\cdot$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1+\sum\limits_{\substack{c=1\\ c\equiv 0 \bmod q}}^{\infty} c^{-g-s} f(g,\frac{n}{qc^2},\frac{n}{q},y,s)(S(q,I,c,n,n)+(-1)^g\overline{S(q,I,c,n,n)}\,(m=n) \\ \\ \sum\limits_{\substack{c=1\\ c\equiv 0 \bmod q}}^{\infty} c^{-g-s} f(g,\frac{n}{qc^2},\frac{m}{q},y,s)(S(q,I,c,n,m)+(-1)^g\overline{S(q,I,c,n,m)}\,(m\neq n) \end{array}\right\}. \tag{124}$$

$$h(q,g,R,n,m,y,0) = e^{-\frac{2\pi}{q}my}\cdot 2\pi i^{-g}(\frac{m}{n})^{\frac{g-1}{2}}\cdot$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1+\sum\limits_{\substack{c=1\\ c\equiv 0 \bmod q}}^{\infty} c^{-1} J_{g-1}(4\pi\frac{n}{qc})\left(S(q,I,c,n,n)+(-1)^g\overline{S(q,I,c,n,n)}\right)\,(m=n) \\ \\ \sum\limits_{\substack{c=1\\ c\equiv 0 \bmod q}}^{\infty} c^{-1} J_{g-1}(4\pi\frac{\sqrt{mn}}{qc})\left(S(q,I,c,n,m)+(-1)^g\overline{S(q,I,c,n,m)}\right)\,(m\neq n). \end{array}\right\} \tag{125}$$

Beweis: Wie Christian [6], §3. Die Formel (116) folgt aus Rankin [21], Seite 156, (5.3.5).

4. PETERSSONSCHE METRISIERUNGSTHEORIE

Satz 11: Jede Spitzenform $F(z) \in \mathcal{T}(q,g)$ genügt der Integralgleichung

$$F(z) = 2^{g-2}\frac{(-i)^g}{\pi}(g-1)\int\limits_{\mathcal{F}(q)} \overline{K(q,g,z,w,0,0)}v^g F(w)d\omega_w. \tag{126}$$

Weiter gilt

$$a(F,n) = (4\pi n)^{g-1}q^{-g}\frac{1}{(g-2)!}\int\limits_{\mathcal{F}(q)} \overline{P(q,g,n,z,0)}y^g F(z)d\omega_z. \tag{127}$$

Beweis: (126) folgt aus Christian [3], (24), (25). Aus (12), (104), (126) bekommt man (127).

Hilfssatz 6: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Genau dann ist $P(q,g,n,z,0)$ nicht identisch 0 in z, wenn es ein $F \in \mathcal{T}(q,g)$ mit $a(F,n) \neq 0$ gibt.

Beweis: Angenommen, es gibt ein $F \in \mathcal{T}(q,g)$ mit $a(F,n) \neq 0$. Wegen (127) ist dann $P(q,g,n,z,0)$ nicht identisch 0. Nun sei $a(F,n) = 0$ für alle $F \in \mathcal{T}(q,g)$. Dann ist auch $a(P(q,g,n,z,0),n) = 0$, vermöge (127) also

$$\int\limits_{\mathcal{F}(q)} |P(q,g,n,z,0)|^2 y^g d\omega_z = 0. \tag{128}$$

Also verschwindet $P(q,g,n,z,0)$ identisch.

Satz 12: Es seien $q,g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$

$$qg = 12. \tag{129}$$

Dann ist $P(q,g,1,z,0)$ nicht identisch 0 und spannt den Raum $\mathcal{T}(q,g)$ auf.

Beweis: Sätze 2, 3 und Hilfssatz 6.

LITERATUR

1. Christian, U.: Some remarks on symplectic groups, modular groups and Poincarés series. Amer. Math. Soc. 89, 319-362 (1967).

2. Christian, U.: Über die analytische Fortsetzung gewisser Poincaré scher Reihen zu elliptischen Modulgruppen. Tôhoku Math. J. 40, 549-590 (1988).

3. Christian, U.: Über gewisse Poincarésche Reihen zu elliptischen Modulgruppen. Manuscripta Math. 59, 423-440 (1987).

4. Christian, U.: Untersuchung Selbergscher Zetafunktionen. J. Math. Soc. Japan 41, 503-537 (1989).

5. Christian, U.: Zur Berechnung des Ranges der Schar der elliptischen Spitzenformen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 59 (1989).

6. Christian, U.: Über elliptische Spitzenformen vom Gewicht 1. Comm. Math. Universitatis Sancti Pauli 38, 169-197 (1989).

7. Esterman, T.: Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 7, 82-89 (1930).

8. Gundlach, K.-B.: Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourierkoeffizienten. Acta math. 92, 309-345 (1954).

9. Gunning, R.C.: Lectures on modular forms. Princeton Univ. Press 1962.

10. Hecke, E.: Math Werke, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1959.

11. Lehner, J.: Discontinuous groups and automorphic functions. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1964.

12. Lehner, H.: On the multipliers of the Dedekind modular function. J. of Research of the national Bureau of Standards. B. Mathematical Sciences 72B, 253-261 (1968).

13. Lint, J.H.,van: On the multipliersystem of the Riemann-Dedekind function η. Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen Ser. A. 61 No 5 and Indag. Math. 20. No 5, 522-527 (1958).

14. Maaß , H.: Lectures on modular functions of one complex vaariable. Lecture notes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1964 (Revised 1983).

15. Petersson, H.: Darstellung der eigentlich-automorphen Formen −2-ter Dimension durch eine Art Poincaréscher Reihen bei gewissen Grenzkreisgruppen. Math. Ann. 105, 206-239 (1931).

16. Petersson, H.: Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen. Math. Ann. 117, 453-537 (1940).

17. Petersson, H.: Über Modulfunktione und Partitionenprobleme. Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Techn. 1954, 6-59.

18. Rademacher, H.: Collected papers I, II. The MIT press. Cambridge Mass. and London.

19. Rademacher, H.: Topics in analytic number theory. Springer Verlag.

20. Rademacher, H.; E. Großwald: Dedekind sums. The Carus Math. Monographs. Math. Asso. of America.

21. Rankin, R.A.: Modular forms and functions. Cambridge Univ. Press, Cambridge, London, New York, Melbourne.

22. Salié, H.: Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v, q)$. Math. Z. 34, 91-109 (1932).

23. Salié, H.: Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen. Math. Z. 36, 263-278 (1932).

24. Schoeneberg, B.: Elliptic modular functions, Springer Verlag 1974.

25. Selberg, A.: Collected papers. Springer Verlag 1989.

26. Weil, A.: On some exponential sums. Collected papers, vol I, 386-389.