

パウルベ方程式のタイプと反自己双対方程式

奥村昌司 (OKUMURA, Shoji)

大阪大学大学院理学研究科
(Graduate School of Science, Osaka University)

概要

$SU(2)$ 不変な反自己双対計量を考察する. 場の方程式は自励的な常微分方程式系となり, (実計量, 複素計量どちらの場合でも) パウルベ方程式に帰着させることができることが知られている.

ここでは, 計量が実計量である場合に制限し, 正定値な符合 $(+, +, +, +)$ を持つ場合と, $(+, +, -, -)$ の split した符合を持つ場合とを考察する [11, 12].

1 はじめに

$SU(2)$ 対称な 4 次元リーマン計量についての反自己双対方程式を考察する. 考えている空間は局所的には $M = S^3 \times \mathbb{R}$ であり, ここで群 $SU(2)$ による等長的な作用の軌道が S^3 となっている.

ヒッチン [5] は $SU(2)$ 不変な反自己双対計量は (generic には), 2 つのパラメータを持つ $P_{II}((\theta_0 - 1)^2/2, \bar{\theta}_0^2/2, -\theta_1^2/2, (1 + \bar{\theta}_1^2)/2)$ の解によって特徴づけられることを示した (パラメータについては Appendix を参照).

この対応はツイスター対応 [2, 14] を用いて説明される. ツイスター空間上に持ち上げられた群 $SU(2)$ の作用が (複素化されて) $SL(2, \mathbb{C})$ の pre-homogeneous な作用を定める. そして, この作用が $\mathbb{CP}^1$ 上のモノドロミー不変な接続の族を定める. こうして, パウルベ方程式が得られる.

この枠組みの中で, ヒッチン [5] は (対角的な) 反自己双対計量を分類し, ダンサー [4] は対角的な scalar-flat Kähler 計量が $P_{III}(0, 4, 4, -4)$ の解によって特徴づけられることを示した. 対角的計量とは第 2 章 (1) の形をした特別な計量である. 反自己双対アインシュタイン計量が対角的であることから, ヒッチンらの目的のためには対角的な場合だけを考察すれば十分であった. しかし, 非対角的な場合も含めた generic な計量について考察することも重要である. この場合について, ヒッチンは $P_{II}((\theta_0 - 1)^2/2, \bar{\theta}_0^2/2, -\theta_1^2/2, (1 + \bar{\theta}_1^2)/2)$ の解によって特徴づけられることを示したが, 具体的な計算は行っていない. ここでは, 対角的な計量のみならず, 非対角的な場合も考察する.

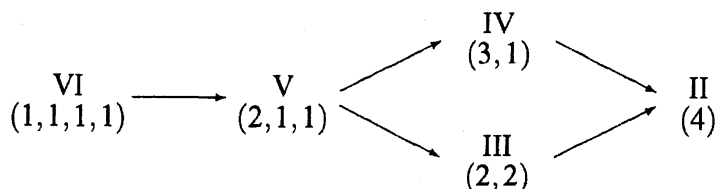
まずは正定値計量について, 反自己双対方程式は P_{VI} または P_{III} に帰着し, scalar-flat Kähler 計量が P_{III} の解によって特徴づけられることを示す [10, 11].

これに対し, split した符合 $(+, +, -, -)$ を持つ場合には, P_{VI} や P_{III} のみならず, P_V や P_{II} も現れることを見る. ここで, パンルベ方程式の型の違いはツイスター空間上の実構造の違いから現れる.

パンルベ VI 型方程式は, 線形問題

$$\left(\frac{d}{dz} - B_1\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

の変形方程式として現れる [6]. ここで B_1 は $\mathbb{CP}^1$ 上に 1 位の極を 4 つもつ. そして, パンルベ方程式の V, IV, III, II 型は VI 型からの退化として現れる.



これは B_1 の極の合流図式であり, ローマ数字はパンルベ方程式の型を表し, 括弧内の数字は極の位数を表す.

複素化された計量については, I 型から VI 型までの全てのパンルベ方程式が (パラメータの条件もなしで) 現れる [9, 8]. しかしながら, 実計量についてどのようなパンルベ方程式が現れるのか調べることは重要である.

2 対角的な反自己双対方程式

ここでは対角的な計量についての反自己双対方程式を復習する.

対角的な計量とは以下のような形をしたものを言う:

$$g = w_1 w_2 w_3 dt^2 + \frac{w_2 w_3}{w_1} \sigma_1^2 + \frac{w_3 w_1}{w_2} \sigma_2^2 + \frac{w_1 w_2}{w_3} \sigma_3^2. \quad (1)$$

ここで, w_i たちは t の関数であり, σ_i たちは $SU(2)$ 軌道上の左不変な 1-form で, 以下を満たす:

$$d\sigma_1 = \sigma_2 \wedge \sigma_3, \quad d\sigma_2 = \sigma_3 \wedge \sigma_1, \quad d\sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2. \quad (2)$$

σ_i たちは t に依存しないことを注意する.

このような対角型計量についての (scalar 曲率零の) 反自己双対方程式は以下の

自励的な常微分方程式系になる [15] :

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1 &= -w_2 w_3 + w_1 (\alpha_2 + \alpha_3), \\
 \dot{w}_2 &= -w_3 w_1 + w_2 (\alpha_3 + \alpha_1), \\
 \dot{w}_3 &= -w_1 w_2 + w_3 (\alpha_1 + \alpha_2), \\
 \dot{\alpha}_1 &= -\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3), \\
 \dot{\alpha}_2 &= -\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_2 (\alpha_3 + \alpha_1), \\
 \dot{\alpha}_3 &= -\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2),
 \end{aligned} \tag{3}$$

ここで α_i たちは補助的に導入した関数であり, $\dot{} = d/dt$ であるとする. 反自己双対方程式 (3) は次のような第一積分を持つ:

$$k = \frac{\alpha_1(w_2^2 - w_3^2) + \alpha_2(w_3^2 - w_1^2) + \alpha_3(w_1^2 - w_2^2)}{8(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

さらに,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3}, \\
 q &= \frac{w_2(\alpha_1 - \alpha_2)(w_2(w_1^2 - w_3^2) + 2\sqrt{2k}w_1w_3(\alpha_1 - \alpha_3))}{w_1^2(w_2^2 - w_3^2)\alpha_1 + w_2^2(w_3^2 - w_1^2)\alpha_2 + w_3^2(w_1^2 - w_2^2)\alpha_3},
 \end{aligned}$$

とおくと, $q(x)$ は $P_V((\sqrt{2k}-1)^2/2, k, -k, (1+2k)/2)$ の解である.

3 非対角的な反自己双対方程式

$SU(2)$ 不変な計量は以下の形で表される:

$$g = f(\tau)d\tau^2 + \sum_{l,m=1}^3 h_{lm}(\tau) \sigma_l \sigma_m. \tag{4}$$

このままの形で反自己双対方程式を考えると, 計算が膨大になってしまうので以下の形に書き換える [12]:

$$g = (abc)^2 dt^2 + a^2 d\hat{\sigma}_1^2 + b^2 d\hat{\sigma}_2^2 + c^2 d\hat{\sigma}_3^2,$$

ここで $t = t(\tau)$, $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ であり,

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix},$$

ここで, $R(t)$ は $SO(3)$ 値である.

$\dot{R}R^{-1} \in \mathfrak{so}(3)$ であることから,

$$\begin{aligned} d \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix} &= R(t) \begin{pmatrix} \sigma_2 \wedge \sigma_3 \\ \sigma_3 \wedge \sigma_1 \\ \sigma_2 \wedge \sigma_2 \end{pmatrix} + \dot{R} dt \wedge \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_2 \wedge \hat{\sigma}_3 \\ \hat{\sigma}_3 \wedge \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_1 \wedge \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix} dt \wedge \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

と書ける ($\xi_1 = \xi_1(t)$, $\xi_2 = \xi_2(t)$, $\xi_3 = \xi_3(t)$).

$\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ の場合は計量は対角的となる.

以下では主に非対角な場合を扱う.

まず, 対角な場合と同様に, $w_1 = bc$, $w_2 = ca$, $w_3 = ab$ とおき, α_i たちを

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -w_2 w_3 + w_1(\alpha_2 + \alpha_3), \\ \dot{w}_2 &= -w_3 w_1 + w_2(\alpha_3 + \alpha_1), \\ \dot{w}_3 &= -w_1 w_2 + w_3(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \tag{5}$$

で定める. すると, (スカラー曲率零の) 反自己双対方程式は以下の常微分方程式系となる [10, 11, 12]:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= -\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{1}{4}(w_2^2 - w_3^2)^2 \left(\frac{\xi_1}{w_2 w_3} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(w_3^2 - w_1^2)(3w_1^2 + w_3^2) \left(\frac{\xi_2}{w_3 w_1} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(w_2^2 - w_1^2)(3w_1^2 + w_2^2) \left(\frac{\xi_3}{w_1 w_2} \right)^2, \\ \dot{\alpha}_2 &= -\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_2(\alpha_3 + \alpha_1) + \frac{1}{4}(w_3^2 - w_1^2)^2 \left(\frac{\xi_2}{w_3 w_1} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(w_1^2 - w_2^2)(3w_2^2 + w_1^2) \left(\frac{\xi_3}{w_1 w_2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(w_3^2 - w_2^2)(3w_2^2 + w_3^2) \left(\frac{\xi_1}{w_2 w_3} \right)^2, \\ \dot{\alpha}_3 &= -\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{4}(w_1^2 - w_2^2)^2 \left(\frac{\xi_3}{w_1 w_2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(w_2^2 - w_3^2)(3w_3^2 + w_2^2) \left(\frac{\xi_1}{w_2 w_3} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(w_1^2 - w_3^2)(3w_3^2 + w_1^2) \left(\frac{\xi_2}{w_3 w_1} \right)^2, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
(w_2^2 - w_3^2) \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi_1}{w_2 w_3} \right) &= \frac{\xi_2}{w_3 w_1} \frac{\xi_3}{w_1 w_2} (-2w_2^2 w_3^2 + w_3^2 w_1^2 + w_1^2 w_2^2) \\
&\quad + \frac{\xi_1}{w_2 w_3} (\alpha_2 w_2^2 - \alpha_3 w_3^2 + 3\alpha_2 w_3^2 - 3\alpha_3 w_2^2), \\
(w_3^2 - w_1^2) \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi_2}{w_3 w_1} \right) &= \frac{\xi_3}{w_1 w_2} \frac{\xi_1}{w_2 w_3} (-2w_3^2 w_1^2 + w_1^2 w_2^2 + w_2^2 w_3^2) \\
&\quad + \frac{\xi_2}{w_3 w_1} (\alpha_3 w_3^2 - \alpha_1 w_1^2 + 3\alpha_3 w_1^2 - 3\alpha_1 w_3^2), \\
(w_1^2 - w_2^2) \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi_3}{w_1 w_2} \right) &= \frac{\xi_1}{w_2 w_3} \frac{\xi_2}{w_3 w_1} (-2w_1^2 w_2^2 + w_2^2 w_3^2 + w_3^2 w_1^2) \\
&\quad + \frac{\xi_3}{w_1 w_2} (\alpha_1 w_1^2 - \alpha_2 w_2^2 + 3\alpha_1 w_2^2 - 3\alpha_2 w_1^2).
\end{aligned} \tag{7}$$

REMARK 3.1 $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ と仮定すると, (5), (6), (7) は (3) となる. さらに, $\alpha_1 = w_1, \alpha_2 = w_2, \alpha_3 = w_3$ とすると, Atiyah-Hitchin 計量 [1] の場合に帰着する. また, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ とすると, オイラーのコマの方程式となり, BGPP 計量 [3] の場合になる.

REMARK 3.2 例えば $w_2 = w_3$ を仮定すると, フレームの取り直しによって $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ とすることができ, 対角型計量の一種と考えられる. したがって, 以下では $(w_2 - w_3)(w_3 - w_1)(w_1 - w_2) \neq 0$ を仮定する.

4 モノドロミー保存変形

(M, g) を向き付けられた 4 次元リーマン多様体とする. Z を M 上の $\mathbb{CP}^1$ 束とし, Z 上に複素構造を次の (1, 0) 形式によって定める:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= z(e^1 + \sqrt{-1}e^2) - (e^0 + \sqrt{-1}e^3), \\
\Theta_2 &= z(e^0 - \sqrt{-1}e^3) + (e^1 - \sqrt{-1}e^2), \\
\Theta_3 &= dz + \frac{1}{2}z^2(\omega_1^0 - \omega_3^2 + \sqrt{-1}(\omega_2^0 - \omega_1^3)) \\
&\quad - \sqrt{-1}z(\omega_3^0 - \omega_2^1) + \frac{1}{2}(\omega_1^0 - \omega_3^2 - \sqrt{-1}(\omega_2^0 - \omega_1^3)).
\end{aligned}$$

ここで

$$g = (e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2$$

であり, ω_j^i は $de^i + \omega_j^i \wedge e^j = 0$ と $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$ で定められるリーマン接続である. すると (M, g) が反自己双対的であることと以下とが同値になる [2, 14]:

$$d\Theta_1 \equiv 0, \quad d\Theta_2 \equiv 0, \quad d\Theta_3 \equiv 0 \quad (\text{mod } \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3).$$

Theorem 4.1 計量が正定値なら, Pfaff系

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Theta_3 = 0$$

は複素共役の作用と $z \mapsto -1/\bar{z}$ によって不変である [2]. 計量の符号が $(+, +, -, -)$ なら, Pfaff系は複素共役の作用と $z \mapsto \bar{z}$ によって不変である.

REMARK 4.2 $TM^{\mathbb{C}}$ を M の接空間の複素化とする. $\mathcal{C} = \{a \in TM^{\mathbb{C}} \mid g(a, a) = 0\}$ を null cone という. null cone の元 $a \in TM^{\mathbb{C}}$ に対し,

$$\Theta_1(a + \lambda \frac{\partial}{\partial z}) = 0, \quad \Theta_2(a + \lambda \frac{\partial}{\partial z}) = 0, \quad \Theta_3(a + \lambda \frac{\partial}{\partial z}) = 0, \quad (8)$$

を λ, z についての代数的方程式と考えよう. すると方程式 (8) が解 $\lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{CP}^1$ をもつ必要十分条件は $a \in \mathcal{C}$ である.

計量が $SU(2)$ 不変であるとき, 以下のように表すことができる:

$$\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} dt + A \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$v_i = v_i(z, t), A = (a_{ij}(z, t))$ (それぞれ z に関して有理式).

ここで, $\det A \equiv 0$ の場合には, 計量是对角型になり, BGPP 計量 [3] となる.

以下では $\det A \neq 0$ の場合を考える. すると,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \equiv -A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} dt \right), \quad (\text{mod } \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \quad (10)$$

と表せる. 右辺を

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} := -A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} dt \right), \quad (11)$$

とおくと,

$$d \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} s_2 \wedge s_3 \\ s_3 \wedge s_1 \\ s_1 \wedge s_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{mod } \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \quad (12)$$

であるが, s_1, s_2, s_3 が (z, t) 平面上の 1 形式であることから, 合同式であった (12) が単なる等式になる:

$$d \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 \wedge s_3 \\ s_3 \wedge s_1 \\ s_1 \wedge s_2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

ここで,

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{-1}s_2 & -s_1 + \sqrt{-1}s_3 \\ s_1 + \sqrt{-1}s_3 & -\sqrt{-1}s_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$=: -B_1 dz - B_2 dt, \quad (15)$$

と置くと,

$$d\Sigma + \Sigma \wedge \Sigma = 0 \quad (16)$$

が成り立つ. これは以下の線形問題のモノドロミー保存条件である [6]:

$$\left(\frac{d}{dz} - B_1 \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (17)$$

Lemma 4.3 B_1 の成分は z の有理関数であり,

$$B_1 = \frac{F(z)}{G(z)},$$

分子の $F(z)$ は 2 次で, 分母の $G(z)$ は 4 次となる. さらに, 計量が正定値の場合は, 複素共役の作用と $z \mapsto -1/\bar{z}$ によって, $B_1 \mapsto -{}^t B_1$ となる. また符号が $(+, +, -, -)$ の場合は, 複素共役の作用と $z \mapsto \bar{z}$ によって, $B_1 \mapsto -{}^t B_1$ となる.

こうして B_1 は (generic には) 4 つの 1 位の極を持ち, 線形問題 (17) の変形方程式はパンルベ VI 型方程式となる.

まずは, 正定値の場合を考える. lemma 4.3 より, B_1 の極は対蹠点のペアをなす: $\zeta_0, -1/\bar{\zeta}_0, \zeta_1, -1/\bar{\zeta}_1 \in \mathbb{CP}^1$.

従って, B_1 の極の配置によって以下のように分類される:

(a) B_1 が 4 つの 1 位の極 $\zeta_0, -1/\bar{\zeta}_0, \zeta_1, -1/\bar{\zeta}_1$ を持つ場合.

$$B_1 = \frac{A_0}{z - \zeta_0} + \frac{{}^t \bar{A}_0}{z + 1/\bar{\zeta}_0} + \frac{A_1}{z - \zeta_1} + \frac{{}^t \bar{A}_1}{z + 1/\bar{\zeta}_1},$$

変形方程式は

$$P_{VI} \left(\frac{1}{2}(\theta_0 - 1)^2, \frac{1}{2}\bar{\theta}_0^2, -\frac{1}{2}\theta_1^2, \frac{1}{2}(1 + \bar{\theta}_1^2) \right),$$

となり, $\theta_0^2 = 2\text{tr}A_0^2, \theta_1^2 = 2\text{tr}A_1^2$.

(b) B_1 が 2 つの 2 位の極 $\zeta, -1/\bar{\zeta}$ を持つ場合.

$$B_1 = \frac{A_2}{(z - \zeta)^2} + \frac{\sqrt{-1}C}{z - \zeta} + \frac{-\sqrt{-1}C}{z + 1/\bar{\zeta}} + \frac{{}^t \bar{A}_2/\bar{\zeta}^2}{(z + 1/\bar{\zeta})^2},$$

ここで, $C = -{}^t \bar{C}$. 変形方程式は

$$P_{III}(4\theta, 4(1 + \bar{\theta}), 4, -4),$$

となり, $\theta^2 = 2(\text{tr}(A_2 C))^2 / \text{tr}C^2$.

REMARK 4.4 対角型の *scalar-flat Kähler* 計量が $P_{III}(0, 4, 4, -4)$ になることが知られていたが [4], 上記 (b) は, その一般化である.

ここからは, 符合 $(+, +, -, -)$ を持つ場合を考えよう. Lemma 4.3 より, B_1 の極は共役のペア $\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta_1, \bar{\zeta}_1$ をなす. したがって, 計量は B_1 の極の配置に応じて, 以下の5通りに分類される.

(a) B_1 は4つの1位の極 $\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta_1, \bar{\zeta}_1$ を持つ.

$$B_1 = \frac{A_0}{z - \zeta_0} + \frac{-{}^t\bar{A}_0}{z - \bar{\zeta}_0} + \frac{A_1}{z - \zeta_1} + \frac{-{}^t\bar{A}_1}{z - \bar{\zeta}_1}.$$

変形方程式は

$$P_{VI}\left(\frac{1}{2}(\theta_0 - 1)^2, \frac{1}{2}\bar{\theta}_0^2, -\frac{1}{2}\theta_1^2, \frac{1}{2}(1 + \bar{\theta}_1^2)\right),$$

となり, $\theta_0^2 = 2\text{tr}A_0^2$, $\theta_1^2 = 2\text{tr}A_1^2$.

(b) $\zeta_0 = \bar{\zeta}_0 (= \eta)$ と重なるとき, B_1 は1つの2位の極 $\eta \in \mathbb{R}$ と, 2つの1位の極 $\zeta_1, \bar{\zeta}_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ を持つ.

$$B_1 = \frac{C}{(z - \eta)^2} + \frac{-A_2 + {}^t\bar{A}_2}{z - \eta} + \frac{A_2}{z - \zeta_1} + \frac{-{}^t\bar{A}_2}{z - \bar{\zeta}_1},$$

ここで $C = -{}^t\bar{C}$ である. 変形方程式は

$$P_V\left(\frac{1}{2}(\theta_0 + \bar{\theta}_0 + \theta_\infty)^2, -\frac{1}{2}(\theta_0 + \bar{\theta}_0 - \theta_\infty)^2, 1 - \theta_0 + \bar{\theta}_0, \frac{1}{2}\right),$$

となり, $\theta_0^2 = 2\text{tr}A_2^2$, $\theta_\infty^2 = 2(\text{tr}(A_2 - {}^t\bar{A}_2)C)^2/\text{tr}C^2$.

(c) $\zeta_0 = \zeta_1 (= \zeta)$ と重なるとき, B_1 は2つの2位の極 $\zeta, \bar{\zeta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ を持つ.

$$B_1 = \frac{A_3}{(z - \zeta)^2} + \frac{\sqrt{-1}C}{z - \zeta} + \frac{-\sqrt{-1}C}{z - \bar{\zeta}} + \frac{-{}^t\bar{A}_3}{(z - \bar{\zeta})^2},$$

ここで $C = -{}^t\bar{C}$. 変形方程式は

$$P_{III}(4\theta, 4(1 + \bar{\theta}), 4, -4),$$

となり, $\theta^2 = 2(\text{tr}A_3C)^2/\text{tr}C^2$.

(d) $\zeta_0 = \bar{\zeta}_0 (= \eta_0), \zeta_1 = \bar{\zeta}_1 (= \eta_1)$ と重なるとき, B_1 は2つの2位の極 $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$ を持つ.

$$B_1 = \frac{C_1}{(z - \eta_0)^2} + \frac{C_2}{z - \eta_0} + \frac{-C_2}{z - \eta_1} + \frac{C_3}{(z - \eta_1)^2},$$

ここで $C_i = -{}^t\bar{C}_i$ ($i = 1, 2, 3$). 変形方程式は

$$P_{III}(4\theta_1, 4(1 + \theta_2), 4, -4),$$

となり, $\theta_1^2 = 2(\text{tr}C_1C_2)^2/\text{tr}C_2^2$, $\theta_2^2 = 2(\text{tr}C_2C_3)^2/\text{tr}C_2^2$.

(e) $\zeta_0 = \bar{\zeta}_0 = \zeta_1 = \bar{\zeta}_1 (= \eta)$ と重なるとき, B_1 は 1 つの 4 位の極 $\eta \in \mathbb{R}$ を持つ.

$$B_1 = \frac{C_1}{(z-\eta)^4} + \frac{C_2}{(z-\eta)^3} + \frac{C_3}{(z-\eta)^2},$$

ここで $C_i = -{}^t \bar{C}_i$ ($i=1,2,3$). $\det C_1 \neq 0$ のとき, 変形方程式は

$$P_{II} \left(\frac{1}{2} (1 + \text{tr} C_2 C_3) \right).$$

$\det C_1 = 0$ のとき, 変形方程式は P_I となるが, $C_1 = -{}^t \bar{C}_1$ より, そういうことは起こらない.

REMARK 4.5 自己双対方程式からパンルベ方程式を導くだけでなく, Remark 4.2 より, パンルベ方程式に対応する線形問題から計量を再構成することもできる.

5 パンルベ方程式の型の幾何学的意味

この章では, パンルベ方程式の型やパラメータの幾何学的意味について考察する.

Lemma 5.1 g を反自己双対計量とする. 対応する B_1 が $z = \zeta(t)$ において 2 位以上の極であるとき, Pfaff 系 $\Theta_1|_{z=\zeta(t)}, \Theta_2|_{z=\zeta(t)}$ は可積分である. また, 逆に Pfaff 系 $\Theta_1|_{z=\zeta(t)}, \Theta_2|_{z=\zeta(t)}$ が可積分なら, B_1 は 2 位以上の極を $z = \zeta(t)$ に持つ [11, 12].

B_1 の 2 位以上の極 $z = \zeta(t)$ が純虚数のとき, $\Theta_1|_{z=\zeta(t)}, \Theta_2|_{z=\zeta(t)}$ は M 上に $SU(2)$ 不変なエルミート構造を定める. さらに, 適当な共形変換によって, このエルミート構造はケーラー構造になる [11].

こうして次が得られる.

Theorem 5.2 反自己双対方程式が $P_{III}(4\theta, 4(1+\bar{\theta}), 4, -4)$ に帰着することと, $SU(2)$ 不変なエルミート構造が存在することとは, 同値である.

B_1 の 2 位以上の極 $z = \zeta(t)$ が実数である場合を考えたい.

DEFINITION 5.3 $g(X, X) = 0$ を満たす $X \in TM$ を零方向と呼ぶ.

Pfaff 系 $\Theta_1|_{z=\eta(t)}, \Theta_2|_{z=\eta(t)}$ ($\eta(t) \in \mathbb{R}$) は 2 次元の零方向を定義する事に注意しよう.

DEFINITION 5.4 N を M の 2 次元の部分空間とする. N の任意の接ベクトル X が $g(X, X) = 0$ を満たすとき, N を実ツイスター曲面と呼ぶ.

Lemma 5.1 より, もし $z = \eta(t) \in \mathbb{R}$ が B_1 の 2 位以上の極であった場合, M 上の Pfaff 系 $\Theta_1|_{z=\eta(t)}, \Theta_2|_{z=\eta(t)}$ は可積分となり, さらに, 任意の M の点 x に対し, x を通る実ツイスター曲面が存在する. また, この逆も言える.

こうして, $SU(2)$ 不変な反自己双対計量について, 次が得られた.

Theorem 5.5 (計量が対角的な場合)

(a) *generic* な場合, 反自己双対方程式は

$$P_{VI} \left(\frac{1}{2}(\theta_0 - 1)^2, \frac{1}{2}\bar{\theta}_0^2, -\frac{1}{2}\theta_1^2, \frac{1}{2}(1 + \bar{\theta}_1^2) \right),$$

に帰着する.

(b) (M, g) が $SU(2)$ 不変なエルミート構造を持つことと, 反自己双対方程式が

$$P_{III}(4\theta, 4(1 + \bar{\theta}), 4, -4),$$

に帰着することは同値である.

Theorem 5.6 (計量が $(+, +, -, -)$ の符号を持つ場合)

(a) *generic* な場合, 反自己双対方程式は

$$P_{VI} \left(\frac{1}{2}(\theta_0 - 1)^2, \frac{1}{2}\bar{\theta}_0^2, -\frac{1}{2}\theta_1^2, \frac{1}{2}(1 + \bar{\theta}_1^2) \right),$$

に帰着する.

(b) M の任意の点 x に対し, x を通る実ツイスター曲面が 1 つ存在することと, 反自己双対方程式が以下のいずれかのパウルベ方程式に帰着することは同値である:

$$P_V((\theta_0 + \bar{\theta}_0 + \theta_\infty)^2/2, -(\theta_0 + \bar{\theta}_0 - \theta_\infty)^2/2, 1 - \theta_0 + \bar{\theta}_0, 1/2),$$

$$\theta_\infty \in \mathbb{R}, \theta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

$$P_{II}(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}.$$

(c) M の任意の点 x に対し, x を通る実ツイスター曲面が 2 つ存在することと, 反自己双対方程式が

$$P_{II}(4\theta_1, 4(1 - \theta_2), 4, -4), \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$$

に帰着することは同値である.

(d) (M, g) が $SU(2)$ 不変なエルミート構造を持つことと, 反自己双対方程式が

$$P_{III}(4\theta, 4(1 + \bar{\theta}), 4, -4),$$

に帰着することは同値である.

Appendix

パンルベ方程式とは動く分岐点を持たない2階の非線形常微分方程式である。この章では Painlevé と Gambier によって分類された6つの方程式をリストする [13]. ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はパラメータである。

1. Painlevé I

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = 6q^2 + x.$$

2. Painlevé II

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = 2q^3 + xq + \alpha.$$

3. Painlevé III

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = \frac{1}{q} \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{dq}{dx} + \frac{1}{x} (\alpha q^2 + \beta) + \gamma q^3 + \frac{\delta}{q}.$$

4. Painlevé IV

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = \frac{1}{2q} \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 + \frac{3}{2} q^3 + 4xq^2 + 2(x^2 - \alpha)q + \frac{\beta}{q}.$$

5. Painlevé V

$$\frac{d^2 q}{dx^2} = \left(\frac{1}{2q} + \frac{1}{q-1} \right) \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{dq}{dx} + \frac{(q-1)^2}{x^2} \left(\alpha q + \frac{\beta}{q} \right) + \frac{\gamma q}{x} + \frac{\delta q(q+1)}{q-1}.$$

6. Painlevé VI

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{dx^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-x} \right) \left(\frac{dq}{dx} \right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{q-x} \right) \frac{dq}{dx} \\ & + \frac{q(q-1)(q-x)}{x^2(x-1)^2} \left\{ \alpha + \beta \frac{x}{q^2} + \gamma \frac{x-1}{(q-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(q-x)^2} \right\}. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Atiyah, M. F. and Hitchin, N. J.: Low energy scattering of non-Abelian monopoles, Phys. Lett. A **107** (1985), 21–25
- [2] Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. and Singer, I. M.: Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc, London Ser. A **362** (1978) 425–461

- [3] Belinski, V. A., Gibbons, G. W., Page, D. W. and Pope, C. N.: Asymptotically Euclidean Bianchi IX metrics in quantum gravity, *Phys. Lett. B* **76** (1978), 433–435
- [4] Dancer, A. S.: Scalar-flat Kähler metrics with $SU(2)$ symmetry, *J. reine. angew. Math.* **479** (1996), 99–120
- [5] Hitchin, N. J.: Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations, *J. Differential Geom.* **42** (1995), 30–112
- [6] Jimbo, M., Miwa, T. and Ueno, K.: Monodromy Preserving Deformation of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients. I, *Physica* **2D** (1981), 306–352
- [7] Jimbo, M. and Miwa, T.: Monodromy Preserving Deformation of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients. II, *Physica* **2D** (1981), 407–448
- [8] Maszczyk, R.: The symmetry transformation in self-duality, *Class. Quantum Grav.* **12** (1995), 421–433
- [9] Maszczyk, R., Mason, L. J. and Woodhouse, N. M. J.: Self-dual Bianchi metrics and the Painlevé transcendents, *Classical Quantum Gravity* **11** (1994), 65–71
- [10] Okumura, S.: Painlevé analysis on Self-dual equation (in Japanese), *RIMS Kokyuroku* **1212** (2001), 32–42
- [11] Okumura, S.: Anti-Self-Dual Hermitian Metrics and Painlevé III, *Osaka J. Math.* (to be published)
- [12] Okumura, S.: The indefinite anti-self-dual metrics and the Painlevé equations, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 4828–4838
- [13] Painlevé, P.: Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **143** (1906), 1111–1117
- [14] Penrose, R.: Nonlinear gravitons and curved twistor theory, *Gen. Rel. Grav.* **7** (1976), 31–52
- [15] Tod, K. P.: Self-dual Einstein metrics from the Painlevé VI equation, *Phys. Lett. A* **190** (1994), 221–224