

静電容量型超音波トランスデューサの最適構造設計法 (レベルセット法に基づく等断面形状制約付きトポロジー最適化)*

山田崇恭*¹, 泉井一浩*², 西脇真二*², 佐藤政司*³, 田畑修*³

An Optimum Design Method for Capacitive Micromachined Ultrasonic Transducers

(Level Set-Based Topology Optimization Method Incorporating Uniform Cross-Section Surface Constraints)

Takayuki YAMADA*¹, Kazuhiro IZUI*², Shinji NISHIWAKI*²,
Masashi SATO*³, and Osamu TABATA*³

*¹ Department of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Engineering, Kyoto University
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501, JAPAN

*² Department of Mechanical Engineering and Science, Graduate School of Engineering, Kyoto University
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501, JAPAN

*³ Department of Micro Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501, JAPAN

Capacitive micromachined ultrasonic transducers (cMUTs) are a new type of transducer with applications in medical ultrasound equipment. This paper presents a topology optimization method for the structural design of cMUTs, in which the outlines of target structures are implicitly represented using the level set method, and uniform cross-section surface constraints are taken into account. First, the optimization problem that addresses the design requirements of the cMUT is formulated. Second, basic details of the level set-based topology optimization method are briefly discussed. Based on the concept of the Tikhonov regularization method, the topology optimization method considering a uniform cross-section surface constraint is formulated. Next, based on this formulation and the level set method, a topology optimization algorithm is constructed where the Finite Element Method is used when solving the equilibrium equations and the level-set equation. Finally, two- and three-dimensional examples are provided to confirm the validity and utility of the proposed topology optimization method.

Key Words : MEMS, Finite Element Method, Optimum Design, Structural Design, Structural Analysis

1. 緒 言

静電容量型超音波トランスデューサ (以下, cMUT) は, 受圧部の幾何学的変形による静電容量変化, および電圧印加による受圧部の幾何学的変形を利用して超音波の送受信を行うデバイスであり, 医療用超音波診断装置の新しいデバイスとして注目を集めている⁽¹⁾. cMUT は, 近年の微細加工技術の発展により従来の圧電型振動子と同程度の電気-機械変換効率が実現でき

ようになり, さらに, 生体への超音波伝播効率が高く, 電子回路との集積化が容易である特徴を有する⁽²⁾⁽³⁾. しかしながら, デバイス構造の形状によっては, 振動子と基板間におけるギャップの不均一さにより変換効率が低下する問題を持つ. そのため, 振動子の受圧部が, 基板との平行度を保持しながら幾何学的変形をする構造を設計することが重要課題の一つとなっている.

このような課題を解決する一方法として, 振動子の受圧部に補強部材を配置する方法⁽⁴⁾が提案されているが, その補強部材の配置決定は, 設計者の勘や力学的考察と経験に基づく多くの試行錯誤を必要とする. さらに, cMUT の製造において用いられる, フォトリソグラフィを代表とする半導体加工技術は, 垂直方向の形状自由度が極めて低い準平面的な加工であるため,

* 原稿受付 2010 年 5 月 X 日

*¹ 京都大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻
京都府京都市左京区吉田本町

*² 京都大学大学院 工学研究科 機械理工学専攻
京都府京都市左京区吉田本町

*³ 京都大学大学院 工学研究科 マイクロエンジニアリング
工学専攻
京都府京都市左京区吉田本町

このような幾何学的制約をも考慮しながら、その補強部材の適切な配置を決定する必要もあり、十分な性能を持つ構造設計に至っていないのが現状である。

他方、力学的根拠に基づき、最適な形状と形状形態を創成設計する方法として、トポロジー最適化⁽⁵⁾が提案され、現在までに静電アクチュエータ⁽⁶⁾や熱アクチュエータ⁽⁷⁾、磁気アクチュエータ⁽⁸⁾などのMEMSデバイスへの適用も報告されている。この方法の基本的な考え方は、構造最適化問題の指定した領域内における材料分布問題への置き換えである。そのため、形状と形態の変更による構造最適化を可能にするが、多くの部分構造と穴で構成される幾何学的に極めて複雑な構造を最適構造として得る場合がある。このような構造は、物理的、数学的に最適な構造であっても、一般的には製造が困難で、必ずしも工学的には意味のある構造とは言えない。

このような問題を解決する方法として、ペリメータ制約を付加する方法⁽⁹⁾や、構造の幅の大きさを設定する方法⁽¹⁰⁾、構造の最小寸法を設定する方法⁽¹¹⁾が提案されている。しかし、これらの方法は、幾何学的制約が最適化過程を不安定にさせる問題を持ち、さらには、パラメータの設定を一意的に決定することができず、適切に最適化を行うためには多くの試行錯誤を必要とする。

これに対して、著者らのグループでは、安定的かつ、一意的に最適構造の幾何学的な複雑さを、定性的ではあるものの考慮可能な新しいトポロジー最適化の方法を提案している⁽¹²⁾⁽¹³⁾。この方法では、レベルセット法による形状表現を行いながら、レベルセット関数の勾配の大きさの和を陰的に設定することにより、過度に複雑な形状を排除し、より製造性の高い最適構造の創成を可能としている。しかしながら、この方法においても、3次元問題においては、物体領域中に空洞領域を創出する構造を許容するため、必ずしも製造が容易な最適構造が得られない場合がある。特に、前述のような幾何学的制約条件を必要とするcMUTの構造設計においては、本構造最適化手法をそのまま適用することが難しいため、垂直方向の形状を保持可能な等断面形状制約を考慮した最適設計法の構築が必要不可欠である。

そこで本研究では、従来までに構築したレベルセット法に基づくトポロジー最適化を拡張し、等断面形状制約を考慮可能な方法論を開発し、それに基づき、半導体加工を前提としたcMUTの構造設計を対象に、新しいトポロジー最適設計法を構築する。以下2章では、cMUTの設計要件を明確化し、目的関数の定式化をす

る。次に、等断面形状制約を考慮可能なレベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化の定式化を行う。3章では、最適化問題の定式化に基づき、有限要素法を用いた最適化アルゴリズムを構築する。最後に、4章においてcMUTの最適設計問題に適用し、本研究で提唱する方法の有効性を検証する。

2. 定式化

2.1 cMUTの最適設計問題 最初に、cMUTの設計要件を明確化するとともに、その設計要件を最大限満足する最適構造を得るための目的関数の定式化を行う。図1にcMUTの断面構造を示す。cMUTは、上

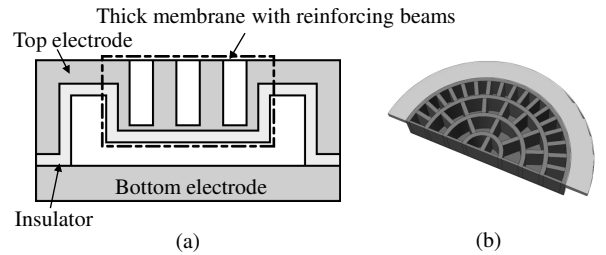


Fig. 1 A capacitive micromachined ultrasonic transducer; (a) cross-sectional view, (b) half perspective views of the beam geometry.

部電極をもつ振動子と下部電極となる基板で構成される。対向電極間にはバイアス電圧が印加され、入射超音波が引き起こす振動によって、電極間に流れる充放電電流から超音波を検出する。cMUTの重要な性能指標である空間分解能は、検出可能な超音波の周波数と反比例の関係にあることから、振動子の最低次の固有振動数は高い事が望ましい。また、振動子の中央部は、基板との平行度を保持しながら幾何学的変形する事が望ましいため、剛性を確保しかつ質量を低減できるリブ構造で構成される厚膜形状となっている。ここでは、振動子の最低次の固有振動数を最大化する問題として、cMUTの最適設計問題を定式化する。なお、本研究では、cMUTの性能を大きく左右する振動子の中央部を後述の固定設計領域 D とする。

2.2 固有振動数最大化問題 ここでは、まず、一般的な固有振動数最大化問題の定式化を行う。線形弾性体で構成される物体領域と空洞領域で構成される固定設計領域 D に対し、境界 Γ_u において変位固定が与えられている構造物の固有振動数最大化問題について考える。このとき、最低次から k 番目の固有振動数を ω_k 、固有振動モードを $\mathbf{u}_k$ とすると、 k 番目の固有値は $\lambda_k = \omega_k^2$ となり、最低次の固有振動数最大化問題は、

以下のように定式化される。

$$\inf F = -\omega_1^2 \quad (1)$$

しかし、上式のように、最低次の固有振動数のみを考慮した定式化の場合、最適化の過程において、固有振動モードの入れ替わりが生じ、目的汎関数が収束しないことが知られている。この問題を回避する方法として、最低次近傍の固有振動数を同時に最大化する方法⁽¹⁴⁾が提案されている。この方法では、次式に示すように、 q 番目までの固有振動数を考慮して固有振動数の最大化を図る。

$$\inf F = -\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\omega_k^2}\right)^{-1} = -\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-1} \quad (2)$$

本研究でも、この方法を用いて、目的汎関数を定式化することにより、固有モードの入れ替わりによる問題を回避しながら、固有振動数の最大化を図る。以上より、体積制約のもとでの最適化問題は、次式で定式化される。

$$\inf_{\phi} F = -\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-1} \quad (3)$$

$$\text{subject to } G \leq 0 \quad (4)$$

$$a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = \lambda_k b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) \quad (5)$$

$$\text{for } \forall \mathbf{v} \in U, \quad \mathbf{u}_k \in U, \quad k = 1, \dots, q \quad (6)$$

ここで、上式中の各表記は次式で定義される。

$$G = \int_{\Omega} d\Omega - V_{\max} \quad (7)$$

$$a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}_k) : \mathbf{E} : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega \quad (8)$$

$$b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (9)$$

さらに、 Ω は物体により占められている領域 (以下、物体領域)、 $V_{\max}$ は許容される体積の最大値、 ε はひずみテンソル、 $\mathbf{E}$ は弾性テンソル、 ρ は質量密度、 U は以下の式にて定義される変位関数空間である。

$$U = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(D) \text{ with } \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_u\} \quad (10)$$

2.3 レベルセット法に基づく等断面制約付きトポロジー最適化 cMUT などの MEMS デバイスは、通常、フォトリソグラフィをはじめとする半導体加工技術を利用して作製されており、これにより平面、垂直方向共に高い寸法精度での加工が実現できる。しかしながら、これらの技術はいずれも平面的な加工であり、垂直方向の形状自由度はほとんどない。したがって、このような製造工程の制約を考慮すると、等断面形状

の制約下で最適構造を創成設計する方法を構築する必要がある。

以下、等断面形状制約を考慮したトポロジー最適化法の定式化を行う。最初に、次式に示す、構造最適化問題について考える。

$$\inf_{\Omega} F = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (11)$$

$$\text{subject to } G = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\Omega - G_{\max} \leq 0 \quad (12)$$

ここで、 F は目的汎関数、 $f(\mathbf{x})$ は目的汎関数を与える分布関数、 G は制約汎関数、 $g(\mathbf{x})$ は制約汎関数を与える分布関数、 $G_{\max}$ は制約汎関数値が許容される上限値である。トポロジー最適化⁽⁵⁾の基本的な考え方は、次式に示すように、物体の存在が許容される固定領域 D (以下、固定設計領域) と特性関数 $\chi_{\Omega} \in L^{\infty}$ を導入し、上述の構造最適化問題の材料分布問題への置き換えである。

$$\inf_{\chi} F = \int_D f(\mathbf{x}) \chi_{\Omega}(\mathbf{x}) dD \quad (13)$$

$$\text{subject to } G = \int_D g(\mathbf{x}) \chi_{\Omega}(\mathbf{x}) dD - G_{\max} \leq 0 \quad (14)$$

ここで、特性関数 χ_{Ω} は次式に示すように、物体領域 Ω では 1、物体に占められていない領域 $D \setminus \Omega$ (以下、空洞領域) では 0 をとる分布関数である。

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (15)$$

次に、特性関数による形状表現からレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ による形状表現へと置き換えるために、特性関数をレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ の関数として表現すれば、最適化問題は次のように記述される。

$$\inf_{\phi} F = \int_D f(\mathbf{x}) \chi_{\phi}(\phi) dD \quad (16)$$

$$\text{subject to } G = \int_D g(\mathbf{x}) \chi_{\phi}(\phi) dD - G_{\max} \leq 0 \quad (17)$$

ここで、レベルセット関数 ϕ は次式に示すように、物体領域では正、境界においてゼロ、空洞領域では負の値を持つスカラー関数である。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (18)$$

なお、レベルセット関数値 ϕ には、上限値と下限値を設定することにより、後述の正則化の手続きにおいて、全境界近傍における正則化の度合いが一定となるように設定している。

次に、最適化問題の正則化を行う。通常のトポロジー最適化においては、均質化法に基づく設計空間の緩和法⁽⁵⁾もしくは、密度法による正則化⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾を適用するが、レベルセット法を用いた形状表現法を用いる場合、設計変数の相違により、これらの方法を適用することができない。この問題を解決する方法として、著者らは、チコノフの正則化法⁽¹⁷⁾に基づいて最適化問題を正則化する方法⁽¹²⁾⁽¹³⁾を提案している。この方法は、次式に示すように、目的汎関数を、目的汎関数とレベルセット関数の勾配の二乗和との和に置き換えることにより、最適化問題の正則化を行う方法である。

$$\inf_{\phi} F_R = \int_D f(\mathbf{x})\chi_{\phi}(\phi)dD + \int_D \frac{1}{2}\tau |\nabla\phi|^2 dD \quad (19)$$

$$\text{subject to } G = \int_D g(\mathbf{x})\chi_{\phi}(\phi)dD - G_{\max} \leq 0 \quad (20)$$

ここで、 F_R は正則化された目的汎関数、 $\tau > 0$ は正則化の度合いを決定し、正則化係数と呼ばれるパラメータである。正則化係数 τ は定数であるため、式(18)に示したように、レベルセット関数値の上下限に制約を設け、境界近傍で滑らかに分布するように設定することにより、境界近傍において、一様に正則化の効果が現れることになる。その結果、設定する正則化の度合いが全境界近傍で一定となり、最適構造の幾何学的な複雑さを定性的に設定することが可能になる。

さらに、正則化の度合いを与える正則化係数 τ を分布関数へと拡張すれば、領域ごとに、最適構造の幾何学的な複雑さを変化させることも可能になる。とくに、ある特定の方向の正則化の度合いを変化させることが可能となれば、方向ごとに、最適構造の複雑さを設定することも可能になる。その結果、ある特定の方向の正則化の度合いを十分に大きく設定すれば、その特定の方向と直行する面に対して等しい断面形状を持つ最適構造が創成されることになる。そこで、ここでは、正則化の度合いを方向成分ごとに設定できるように、正則化係数を二階のテンソルで表現し、ある特定の方向のテンソル成分を十分に大きな値に設定することにより、陰的に等断面形状制約を与えることが可能となるようにする。すなわち、まず最初に、正則化係数の定義を拡張し、正則化係数テンソル $\tilde{\tau}$ として再定義する。これにより、その二階のテンソル量の各方向成分が、各方向に対する正則化の度合いに対応することになる。そして、レベルセット関数の勾配の成分ごとに、正則化係数の寄与が増減されるように、正則化の項を設定することにより、正則化された最適化問

題は次式のように表される。

$$\inf_{\phi} F_R = \int_D f(\mathbf{x})\chi_{\phi}(\phi)dD + \int_D \frac{1}{2} |\tilde{\tau}\nabla\phi|^2 dD \quad (21)$$

$$\text{subject to } G = \int_D g(\mathbf{x})\chi_{\phi}(\phi)dD - G_{\max} \leq 0 \quad (22)$$

なお、正則化係数テンソルに対応する行列に対して、座標系の回転変換を適用することにより、任意の方向の境界面に対する等断面形状制約を考えることが可能となる。

2.4 時間発展問題への置き換え 上述の最適化問題(21), (22)を、ラグランジュ未定乗数法を用いて、無制約問題に置き換える。すなわち、ラグランジュアン $\bar{F}_R$ を導入し、制約汎関数 G に対するラグランジュ乗数を μ とすれば、最適化問題(21), (22)は次式となる。

$$\inf_{\phi} \bar{F}_R = \int_D f(\mathbf{x})\chi_{\Omega}(\phi)dD + \int_D \frac{1}{2} |\tilde{\tau}\nabla\phi|^2 dD + \mu \left(\int_D g(\mathbf{x})\chi_{\Omega}(\phi)dD - G_{\max} \right) \quad (23)$$

次に、上述の最適化問題に関する KKT 条件を導けば、次式となる。

$$\left\langle \frac{d\bar{F}}{d\phi}, \Phi \right\rangle = 0, \quad \mu G = 0, \quad \mu \geq 0, \quad G \leq 0 \quad (24)$$

ここで、 $\left\langle \frac{d\bar{F}}{d\phi}, \Phi \right\rangle$ は、正則化されたラグランジュアン $\bar{F}_R$ の ϕ に対する変分を表す。この KKT 条件を満たすレベルセット関数 ϕ が最適解の候補となる。しかしながら、これらを満たすレベルセット関数値を直接求めることは困難であるため、適当な初期値を与え、レベルセット関数を更新してゆくことにより、最適構造を示すレベルセット関数値を導く。ここでは、仮想的な時間 t を導入し、レベルセット関数を変動させる駆動力は、ラグランジュアンの勾配に比例するものと仮定し、最適化問題を、レベルセット関数の時間発展問題として考える。すなわち、次式に示す、時間発展方程式を用いて、レベルセット関数を更新してゆき、最適構造を示すレベルセット関数値を得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(\phi) \frac{d\bar{F}}{d\phi} \quad (25)$$

ここで、 $K(\phi) > 0$ は比例定数である。上式に、式(23)を代入し、非設計境界 ∂D_N に、ディレクレ境界条件、設計境界に流入流出ゼロのノイマン境界条件を与えることにより、固定設計領域外からの影響がないことを表現する。したがって、レベルセット関数の時間発展

方程式系は、次式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -K \left(\frac{dF}{d\phi} - \nabla(\bar{\tau} \nabla \phi) \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (26)$$

本研究では、上式を解くことにより、最適解の候補を得る。

2.5 感度解析 次に、レベルセット関数の時間発展方程式系を解くために必要となるラグランジュアンの感度を求める。目的汎関数 F の感度は、以下のようになる。

$$\frac{dF}{d\phi} = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k} \right)^{-2} \left(- \sum_{k=1}^q \frac{\delta \lambda_k}{\lambda_k^2} \right) \quad (27)$$

また、固有値 λ_k の感度については、以下の関係式が成り立つ⁽¹⁴⁾⁽¹⁸⁾。

$$\delta \lambda_k = \delta a(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k) - \lambda_k \delta b(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k) \quad (28)$$

したがって、式(27)に式(28)を代入すれば、目的汎関数の感度は次式で与えられる。

$$\frac{dF}{d\phi} = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k} \right)^{-2} \left(- \sum_{k=1}^q \frac{\varepsilon(\mathbf{u}_k) : \mathbf{E} : \varepsilon(\mathbf{u}_k) \chi_{\Omega}(\phi) - \lambda_k \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \chi_{\Omega}(\phi)}{\lambda_k^2} \right) \quad (29)$$

3. 最適化法の構築

3.1 最適化アルゴリズム 最適化のフローチャートを図2に示す。最初に、適当な初期構造を示すレベ

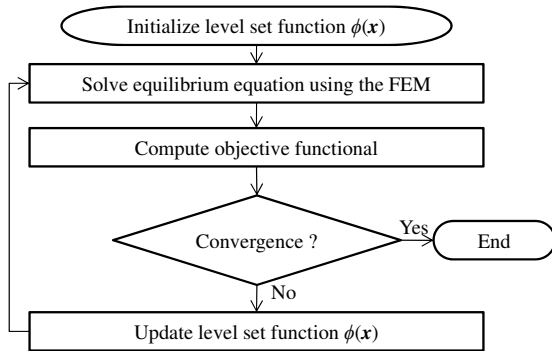


Fig. 2 Flowchart of optimization procedure

ルセット関数 ϕ を与える。次に、有限要素法を用いて、固有振動モード $\mathbf{u}_k$ 及び、固有振動数 ω_k を解析する。ここで、目的汎関数が収束していれば、最適解が得られたと判断して最適化を終了する。収束していなければ、式(26)を用いてレベルセット関数 ϕ を更新し、固

有振動モード $\mathbf{u}_k$ と固有振動数 ω_k を解析するステップに戻る。以上の手続きにより、最適構造を示す、レベルセット関数値を得る。

なお、本研究では、レベルセット関数に基づく形状表現を用いて、有限要素法による振動特性の解析を行う。そのため、逐次有限要素メッシュ分割を行う必要があるが、空洞領域を十分に小さな縦弾性係数と質量密度を持つ物体として近似する方法⁽¹⁹⁾を用いることにより、同一の有限要素を用いて解析を行う。すなわち、特性関数 χ_ϕ を次式に示す、連続関数への置き換えを行う。

$$\chi_\phi(\phi) \simeq H(\phi) = \begin{cases} d & (\phi < -w) \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\phi}{w} \left(\frac{15}{16} - \frac{\phi^2}{w^2} \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{16} \frac{\phi^2}{w^2} \right) \right) \right) (1-d) + d & (-w < \phi < w) \\ 1 & (w < \phi) \end{cases} \quad (30)$$

ここで、 w は連続関数 $H(\phi)$ の遷移幅、 $d > 0$ 十分に小さな正の値を持つパラメータである。なお、理論上は材料分布の不連続性を許容しているが、有限要素解析の数値不安定性を回避するために、境界近傍において連続的な材料分布を導入している。

また、本研究で提案する正則化手法の拡張に基づく等断面形状制約の考え方は、有限要素法による離散化とは独立した考え方であるため、有限要素の格子分割を等断面形状制約方向に依存せずに行うことができる。

3.2 時間発展方程式の数値解法 最初に、正則化係数 $\bar{\tau}$ などのパラメータの設定指針を統一的に扱えるようにするために、時間発展方程式(26)の無次元化をすれば次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -K \left(C \frac{dF}{d\phi} - L^2 \nabla(\bar{\tau} \nabla \phi) \right) & \text{in } D \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (31)$$

ここで、 L は代表長さであり、固定設計領域の代表長さを設定することにする。また、 C と c は目的汎関数を無次元化するために導入したパラメータであり、次式で与えられる。

$$C = \frac{c \int_D dD}{\int_D \left| \frac{dF}{d\phi} \right| dD} \quad (32)$$

次に、式 (31) を、時間方向に対して差分法による離散化を行えば、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} - KL^2 \nabla(\tau \nabla \phi(t+\Delta t)) \\ \phi = 1 \quad \text{on } \partial D_N \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial D / \partial D_N \end{array} \right. = -KC \frac{dF}{d\phi} + \frac{\phi(t)}{\Delta t} \quad (33)$$

ここで、 Δt 時間差分である。次に、有限要素法を用いて空間方向に離散化するために、強形式から弱形式へと置き換える。

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \frac{\phi(t+\Delta t) - \phi(t)}{\Delta t} \tilde{\phi} dD + \int_D \nabla^T \phi(t+\Delta t) (L^2 K \tau \nabla \tilde{\phi}) dD \\ = \int_D \left(-KC \frac{dF}{d\phi} + \frac{\phi(t)}{\Delta t} \right) \tilde{\phi} dD \\ \text{for } \forall \tilde{\phi} \in \tilde{\Phi} \\ \phi = 1 \quad \text{on } \partial D_N \end{array} \right. \quad (34)$$

ここで、 $\tilde{\Phi}$ は次式にて定義されるレベルセット関数に関する関数空間である。

$$\tilde{\Phi} = \{ \phi(\mathbf{x}) | \phi(\mathbf{x}) \in H^1(D) \text{ with } \phi = 1 \text{ on } \partial D_N \} \quad (35)$$

有限要素法を用いて、式 (34) を離散化すれば次式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} \Phi(t+\Delta t) = \mathbf{Y} \\ \phi = 1 \quad \text{on } \partial D_N \end{array} \right. \quad (36)$$

ここで、 $\Phi(t)$ は仮想的な時刻 t における各節点のレベルセット関数値により構成されるベクトルであり、マトリックス $\mathbf{T}$ 及び、ベクトル $\mathbf{Y}$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{T} = \bigcup_{j=i}^e \int_{V_e} \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{N}^T \mathbf{N} + \nabla^T \mathbf{N} K L^2 \tau \nabla \mathbf{N} \right) dV_e \quad (37)$$

$$\mathbf{Y} = \bigcup_{j=i}^e \int_{V_e} \left(-KC \frac{dF}{d\phi} + \frac{\phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \right) \mathbf{N} dV_e \quad (38)$$

ここで、 e は要素数、 $\bigcup_{j=i}^e$ は要素の重ね合わせ集合、 $\mathbf{N}$ はレベルセット関数の補間関数である。

また、上述の時間発展方程式に基づいてレベルセット関数を更新した場合、レベルセット関数の値域に対する制約が満たされない問題を持つ。したがって、レベルセット関数値の値域に対する制約を付加する方法として、レベルセット関数を更新する毎に、以下の規範に従ってレベルセット関数の修正を行う。

$$\phi = \text{sign}(\phi) \quad \text{if } \|\phi\| > 1 \quad (39)$$

4. 最適化解析例

4.1 最適化手法の検証 最初に、二次元の固有振動数最大化問題に適用し、最適化アルゴリズムの妥当性の検証を行う。なお、本設計問題では、正則化係数 τ はどの方向についても同一な値に設定している。図 3 に設計領域と境界条件を示す。図に示すように、固定設計領域 D の両端を変位拘束し、中央部に 1kg の集中質量を設定する。振動特性の解析及び、レベルセット関数場の更新には、四節点のアイソパラメトリック四角形要素を用い、要素長 $5 \times 10^{-3} \text{m}$ の構造格子を用いて要素分割する。構造を構成する線形弾性体の材料は、等方性材料を想定し、縦弾性係数を 210GPa、ポアソン比を 0.31、質量密度 7850kg/m³ とする。そして、特性関数を近似した連続関数 $H(\phi)$ が d から 1 へと遷移する際の幅 w を 0.1、微小値 d を 0.01 とする。また、代表長さ L は 1m、パラメータ c は 0.5、 K は 1、 q は 3 とし、許容される体積の上限値 $V_{\max}$ は固定設計領域の 50% とする。なお、振動特性の解析及び、レベルセット関数場の更新には、汎用有限要素解析ソフト COMSOL を使用している。図 4 に最適化解析によって得られた最適構造を示す。なお、Case 1 では $\tau = 1.0 \times 10^{-4}$ 、Case 2 では $\tau = 1.0 \times 10^{-5}$ 、Case 3 では $\tau = 1.0 \times 10^{-6}$ と設定した。ここで、固有振動モードは、集中質量の位置を中心とした腹をもつ、上下方向の一次曲モードである。そのため、中央の剛性が高くなることにより、最低次の固有振動数が高くなっていると考えられる。さらに、Ma らの結果⁽¹⁴⁾及び、Allaire と Jouve らの結果⁽²⁰⁾と比較すると、類似した傾向の形態が得られていることを確認することができる。これらより、得られた形状・形態が、物理的に妥当であることを確認することができる。さらに、正則化係数 τ を設定することにより、固有振動数問題においても、最適構造の幾何学的複雑さを変更することが可能であることもわかる。したがって、本研究で提唱する手法により、最適構造の複雑さを設定しながら、物理的に妥当な最適構造が得られることがわかった。なお、いずれの最適化解析においても、固有モードの入れ替りが生じておらず、 q の設定値は妥当であったことを注記しておく。

次に、初期構造が最適構造に与える影響を検討するため、2つの初期構造に対して最適化を図る。Case 1 では固定設計領域の全領域が物体により占められた構造、Case 2 では多くの穴が空いた非対称構造をそれぞれ初期構造とした。なお、初期構造以外の各パラメータは図 4 の Case 2 と同一である。図 5 に初期構造、最適化過程及び、最適構造を示す。図中の最適化過程に

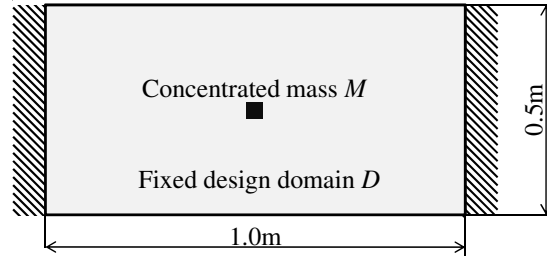


Fig. 3 Fixed design domain of the two-dimensional problem

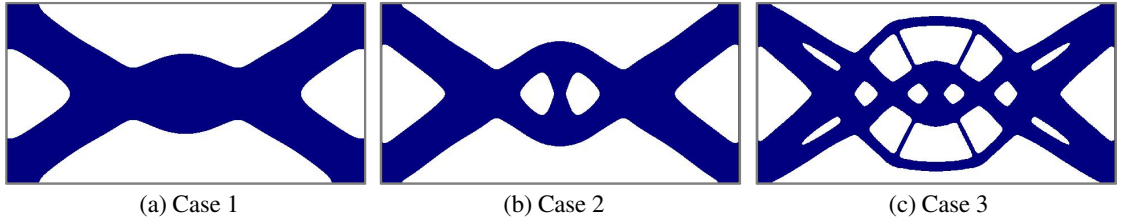


Fig. 4 Optimal configuration of the two-dimensional problem: (a) Regularization parameter τ is set 1.0×10^{-4} ; (b) Regularization parameter τ is set 1.0×10^{-5} ; (c) Regularization parameter τ is set 1.0×10^{-6} .

において、構造のトポロジーが変化していることから、本手法がトポロジー変化を許容した方法論であることを確認することができる。また、得られた最適構造は、ほぼ同一であることから、初期構造の設定の影響が小さいことがわかった。

4.2 cMUTの最適設計 次に、超音波トランスデューサーの設計問題へ適用する。

図6に超音波トランスデューサーの設計領域の断面図と境界条件を示す。図に示すように、振動子中央部の厚膜部を設計領域とし、振動子の周囲を変位拘束する。また、 $\mathbf{x}_3$ 軸方向に等断面形状制約を与える。すなわち、正則化係数テンソルの $\mathbf{x}_3$ 軸方向の成分を十分に大きな値に設定することにする。ここでは、正則化係数テンソルに対応する行列の対角成分を、それぞれ、 $1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-4}, 1 \times 10^{-2}$ と設定した。振動特性の解析及び、レベルセット関数場の更新には、八節点のアイソパラメトリック六面体要素及び、六節点のアイソパラメトリック五面体要素を用いて要素分割する。要素分割方法は、図6の断面を長方形に分割し、 $\mathbf{x}_3$ 軸周りに回転押出することにより要素分割を行う。なお、各要素長は、図6に示す節点数になるように均等に要素分割を行う。解析モデルの材料は、シリコン窒化膜を想定し、縦弾性係数を 320GPa、ポアソン比を 0.263、質量密度 3270kg/m^3 の線形弾性体で構成されているものとする。そして、特性関数を近似した連続関数 $H(\phi)$ が d から 1 へと遷移する際の幅 w を 0.1、

微小値 d を 0.01 とする。また、代表長さ L は $20\mu\text{m}$ 、パラメータ c は 0.5、 K は 1、 q は 5 とし、許容される体積の上限値 $V_{\max}$ は固定設計領域の 18.4% とする。

図7(a)に等断面形状制約を考慮した場合の最適構造、(b)に等断面形状制約を考慮しない場合の最適構造を示す。図に示すように、いずれの構造も明瞭かつ滑らかな形状が創成されていることがわかる。また、等断面形状制約を考慮した場合(a)においては、等断面を持つ形状が創成されていることもわかる。それに対し、等断面形状制約を考慮しなかった場合(b)においては、空洞領域と物体領域が交互に配置されるような形状を許容しているため、微細加工が困難であることを確認することができる。なお、いずれの最適化解析においても、固有モードの入れ替りが生じておらず、 q の設定値は妥当であった。したがって、本研究で提唱する方法により、等断面形状制約を考慮した最適構造設計が得られることがわかった。また、今後の課題として、得られた最適構造に基づいて振動子を製作し、その有効性を明確化していくことが考えられる。

5. 結 言

本研究では、従来までに構築したレベルセット法に基づくトポロジー最適化を拡張し、等断面形状制約を考慮可能な方法論を開発し、それに基づき、製造上の制約を考慮したcMUTの構造設計を対象に、新しいトポロジー最適設計法を構築した。結果を以下に示す。

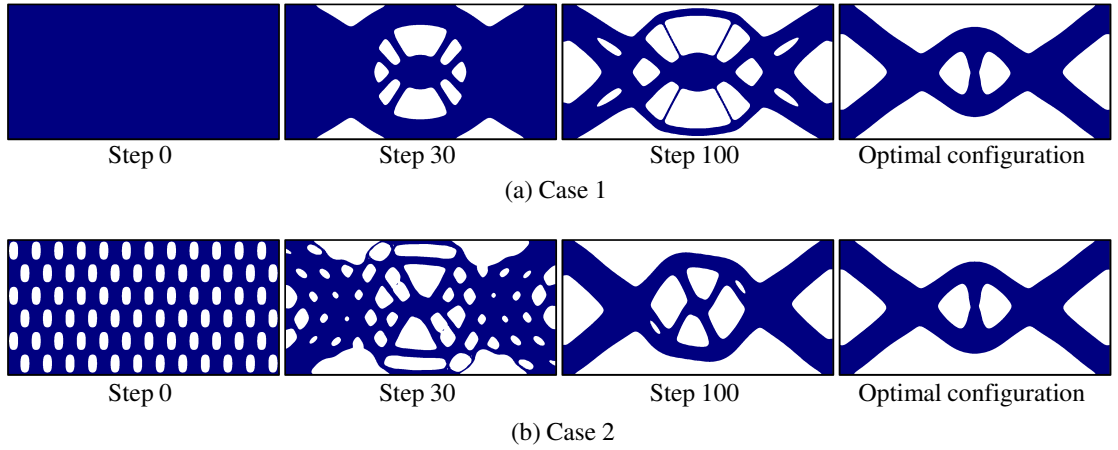


Fig. 5 Configurations of the two-dimensional problem changing of the initial configurations: (a) Initial configuration lacking a hole; (b) Initial configuration with a large number of holes.

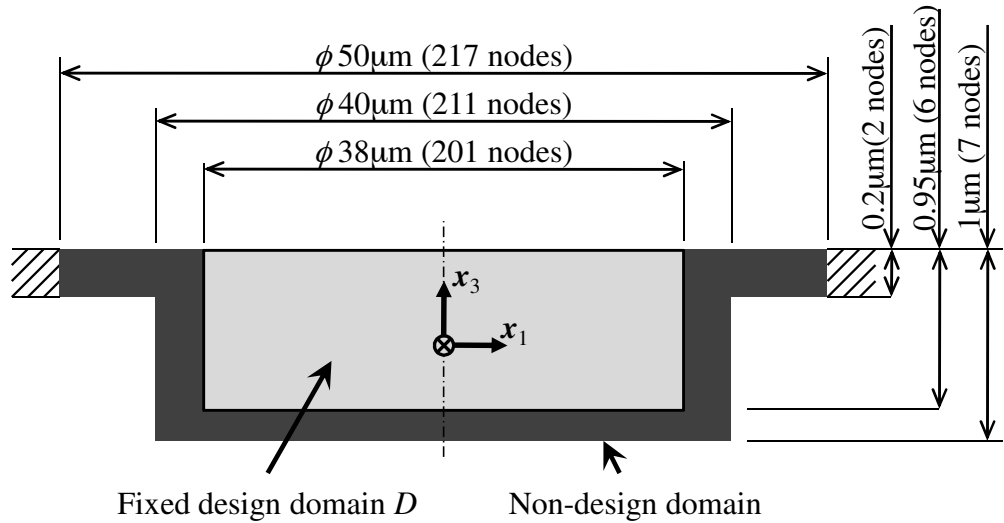


Fig. 6 Cross section of design domain of the capacitive micromachined ultrasonic transducer and boundary conditions

(1)cMUTの設計要件を明確化するとともに、固有振動モードの入れ替わりを考慮した最低次の固有振動数最大化を狙った目的関数の定式化を行った。

(2)トポロジー最適化問題の正則化に利用したチコノフの正則化法の考え方を拡張し、正則化係数のテンソル表現を行った新しい正則化の方法を提案した。さらにその定式化に基づき、等断面形状制約を容易に考慮可能なレベルセット法に基づくトポロジー最適化法の定式化を行った。

(3)簡単な数値例により、本研究で提唱する方法の妥当性を検証した。その結果、本研究で提案する方法により、物理的に妥当で、明瞭な最適構造が得られることがわかった。さらに正則化係数の設定により、最適構造の複雑度を定性的に設定可能であることもわ

かった。

(4)正則化係数のテンソル表現化を行った新しい正則化の方法に基づき、等断面制約を付加したcMUT構造のトポロジー最適設計を行った。その結果、垂直方向の形状変化のない最適構造が得られており、半導体加工においても製造が可能な最適構造を創成設計可能であることがわかった。

謝 辞

本研究は、第一著者が日本学術振興会特別研究員であった期間に行われ、特別研究員奨励費の援助により行われました。ここに記して感謝いたします。

文 献

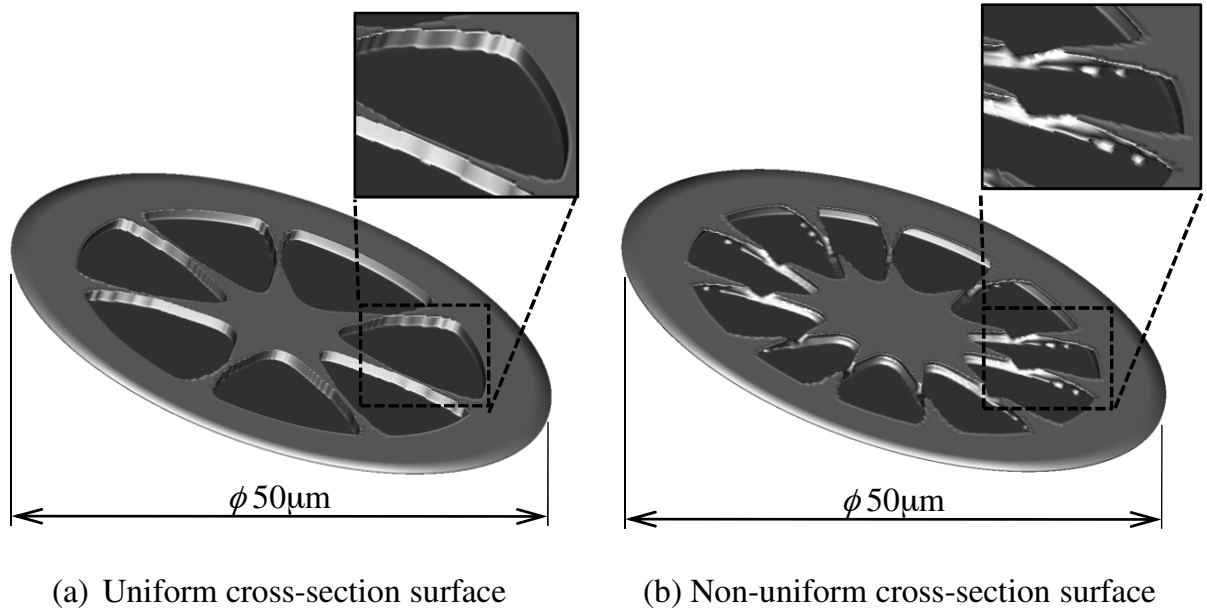


Fig. 7 Optimal configurations of the capacitive micromachined ultrasonic transducer: (a) Uniform cross-section surface; (b) Non-uniform cross-section surface.

- (1) Oralkan, Ö., Ergun, A. S., Johnson, J. A., Karaman, M., Demirci, U., Kaviani, K., Lee, T. H., and Khuri-Yakub, B. T., Capacitive micromachined ultrasonic transducers: Next-generation arrays for acoustic imaging, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol.49, No.11, (2002), pp.1596–1610.
- (2) Haller, M. I. and Khuri-Yakub, B. T., A surface micromachined ultrasonic air transducer, *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol.43, No.1, (1996), pp.1–6.
- (3) Khuri-Yakub, B. T., Degertekin, F. L., Jin, X.-C., Calmes, S., Ladabaum, I., Hansen, S., and Zhang, X. J., Silicon micromachined ultrasonic transducers, in *Proceedings of IEEE Ultrasonics Symposium*, (1998), pp.985–991.
- (4) Sato, M., Hirai, Y., Sugano, K., Tsuchiya, T., and Tabata, O., Capacitive micromachined ultrasonic transducers with novel membrane design, in *Proceedings of Eurosensors XXIII*, (2009), pp.389–392.
- (5) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, (1988), pp.891–909.
- (6) Yoon, G. H. and Sigmund, O., A monolithic approach for topology optimization of electrostatically actuated devices, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.197, (2008), pp.4062–4075.
- (7) Yamada, T., Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Izui, K., and Yoshimura, M., Design of compliant thermal actuator using structural optimization based on the level set method, *Transactions of the ASME, Journal of Computing And Information Science In Engineering*, (submitted).
- (8) Park, S. and Min, S., Magnetic actuator design for maximizing force using level set based topology optimization, *IEEE transactions on magnetics*, Vol.45, No.5, (2009), pp.2336–2339.
- (9) Haber, R. B., Jog, C. S., and Bendsøe, M. P., A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.11, (1996), pp.1–12.
- (10) Chen, S., Wang, M. Y., and Liu, A. Q., Shape feature control in structural topology optimization,

Computer Aided Design, Vol.40, (2008), pp.951–962.

- (11) Guest, J. K., Imposing maximum length scale in topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.37, (2009), pp.463–473.
- (12) Yamada, T., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M., and Takezawa, A., A structural optimization method incorporating level set boundary expressions based on the concept of the phase field method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.75, (2009), pp.550–558.
- (13) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., and Takezawa, A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (in press) doi:10.1016/j.cma.2010.05.013.
- (14) Ma, D. and Kikuchi, N., Topological design for vibrating structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.121, (1995), pp.259–280.
- (15) Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., Optimization of structural topology, shape and material, Springer, Berlin, (1997).
- (16) Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., Topology optimization: Theory, methods, and applications, Springer-Verlag, Berlin, (2003).
- (17) Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y., Solutions of ill-posed problems, Winston and Sons, Washington, D. C., (1997).
- (18) Ma, Z. D. and Hagiwara, I., Sensitivity analysis methods for coupled acoustic-structural systems part i: Modal sensitivities, *AIAA Journal*, Vol.29, (1991), pp.1787–1795.
- (19) Allaire, G., Jouve, F., and Toader, A., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, Vol.194, (2004), pp.363–393.
- (20) Allaire, G. and Jouve, F., A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.194, (2005), pp.3269–3290.