

Moodle 2 と STACK 3 を用いた線形代数の問題作成例

北里大学・一般教育部 谷口 哲也 (Tetsuya Taniguchi)¹

College of Liberal Arts and Sciences,

Kitasato University

名古屋大学大学院・情報科学研究科 中村 泰之 (Yasuyuki Nakamura)²

Graduate School of Information Science,

Nagoya University

三玄舎 中原 敬広 (Takahiro Nakahara)³

Consolidated Company, Sangensya

日本大学・生物資源学部 五十嵐 正夫 (Masao Igarashi)⁴

根本 洋明 (Hiroaki Nemoto)⁵

College of Bioresource Sciences,

Nihon University

1 はじめに

STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel) の version 3 と moodle 2 を用いた, 線形代数の問題の作成例を紹介する. 今回は行列式や固有値と固有ベクトルの問題を題材にし, ポテンシャルレスポンスツリーを用いた問題受験者へのフィードバックの作成例を紹介する. また, そのような問題例の利用方法 (問題バンク等) については [1] を参照されたい.

2 STACK3.1 における問題作成例

STACK 2 のインストールは少々煩雑であったが, STACK 3 以降は Moodle のプラグインとして実現されており, インストールは比較的簡単になり, 実行速度もかなり改善された. ここでは, [1] のようにサーバに Moodle 2.5 以降がインストールされ, STACK 用のプラグインがインストールされた環境を仮定する. [1] では簡単な足し算の問題を例に STACK における編集画面の操作を説明した. Moodle と STACK のインストールについては, [1] を参照してもらいたい.

¹tetsuya@kitasato-u.ac.jp

²nakamura@nagoya-u.jp

³nakahara@3strings.co.jp

⁴igarashi.masao@nihon-u.ac.jp

⁵nemoto.hiroaki@nihon-u.ac.jp

この章では、線形代数の問題、とくに行列式の問題とその構成法を紹介する。最後の章では、固有値と固有ベクトルの問題の設定例を紹介したい。

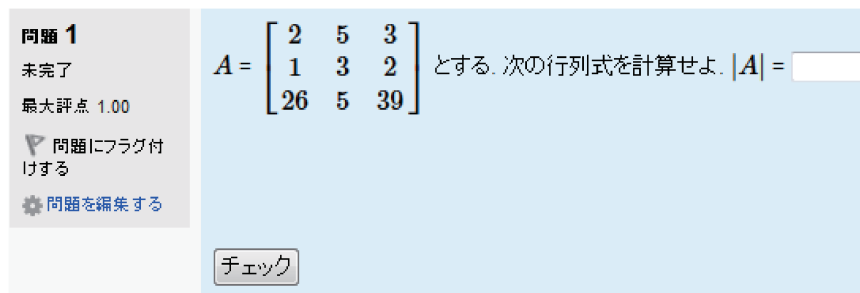


図1 行列式

ここでは、3 次の正方行列の行列式の値を求める問題を構成してみる。学生の符号だけ違う解答には何らかの部分点を与え、符号のミスを学生に伝えるような問題を構成してみる。さらに、学生が問題を解き終えたとき、学生に解答の道筋を提示するようにしてみる。まず、Moodle にて、管理 - 問題バンク にて新しい問題を作成するをクリックすると、図2の画面が出力される。STACK を選択して“次へ”をクリックすると図3の問題編集初期画面がでてくる。

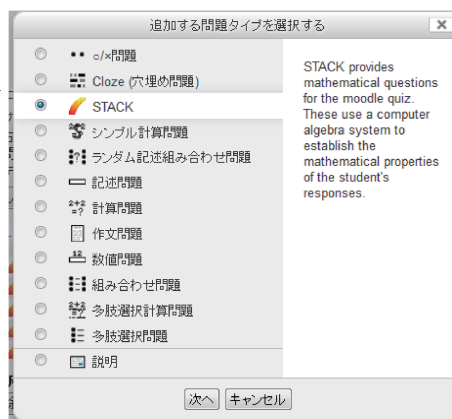


図2 問題種類選択

おもに編集する箇所は「一般」、「Input」、「Potential response tree」、「Options」、「タグ」の5項目に分かれていて、さらに、それぞれの項目はいくつかの欄に分かれている。例として、項目「一般」は、「カテゴリ」、「問題名」、「Question variables」、「Random group」、「問題テキスト」、「デフォルト評点」、「特定フィードバック」、「Penalty」、「全般に対するフィードバック」、「Question note」の合計10個の欄に分かれている。Random groupは通常は空欄のままでよい。Penaltyは一回の誤入力に対する減点を設定する箇所となる。Question noteについては[1]を参照されたい。

2.1 項目「一般」の入力作業

まず、項目一般のカテゴリ欄にてカテゴリを選択する。カテゴリは Moodle にて編集追加することができる。問題名欄には各自が自由に名前を決めることができる。例えば、「行列式の問題」等と名前を付けることができる。

当初の目的である 3×3 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2(2a+1) & b+5 & 3(2a+1) \end{pmatrix}$$

の行列式の値を学生に計算させたい。ただし、 a と b には 0 から 9 の値がランダムに変化させるようにしたい。それを実現するためには、Questions variables と問題テキストの欄において、図 4 の様に入力すればよい。

ここでは、 $a:\text{rand}(10)$ とすることで、 a には 0 から 9 までのいずれかがランダムに代入される。 b についても同様である。

また、Questions variables の 3 行目の入力により 3×3 行列 A が設定される。問題テキスト欄の $\backslash(A\backslash) = @A@$ は問題実行時は、

The screenshot shows the 'Question editing' interface. At the top, there's a 'Category' dropdown set to 'rims2014 デフォルト (5)'. Below it is a 'Question name' field. The 'Question variables' section is empty. The 'Random group' section is also empty. The 'Default score' is set to 1. The 'Penalty' is set to 0.1. The 'Question text' area contains the following code:
`[[input:ans1]]`
`[[validation:ans1]]`
 Below this is a 'Feedback' section with a 'Default feedback' field containing `[[feedback:prt1]]`. At the bottom, there's a 'Question note' field and a 'Verify the question text and update the form' button. On the left side, there are links for 'Input: ans1', 'Potential response tree: prt1', 'Options', and 'Tags'. At the very bottom, there's a checkbox for 'Fix dollars' and a note about replacing dollar signs with yen symbols.

図 3 問題編集初期画面

This screenshot focuses on the 'Question variables' and 'Question text' sections. The 'Question variables' section contains the following code:
`a:rand(10);`
`b:rand(10);`
`A:matrix([2,5,3],[1,3,2],[2*(2*a+1), b+5, 3*(2*a+1)]);`
 The 'Random group' section is empty. The 'Question text' section has a rich text editor with the following text:
 $\backslash(A\backslash) = @A@$ とする。次の行列式を計算せよ。 $\backslash(A\backslash) = [[input:ans1]]$
`[[validation:ans1]]`

図 4 Question variables と 問題テキスト

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 26 & 5 & 39 \end{bmatrix}$$

と表示される. すなわち, $\backslash(A\backslash)$ の箇所は TeX で処理された結果 A が表示され, QAQ の箇所は $a = 6, b = 0$ のときは図 1 のように

$A:\text{matrix}([2,5,3],[1,3,2],[2*(2*a+1), b+5, 3*(2*a+1)]);$

が CAS によって処理された結果が出力される. $\backslash(|A|\backslash) = [[\text{input:ans1}]]$ の箇所は問題実行時には図 5 のように表示される. 空欄に学生

は解答を入力することになる. 今の場合, 解答欄は 1 つの長方形の空欄であるが, 後述する項目 **Input** の

$|A| =$

図 5 解答欄

ans1 の欄で **Input type** の箇所を **Matrix** に変更すれば行列形式に変更することができる. さらに, 問題テキストの欄の $[[\text{validation:ans1}]]$ の箇所は図 6 のように **ans1** に学生が入力した解答が再表示される. ここでは数値 60 が表示されているが, もし, x^2+2*x と入力された場合は, $x^2 + 2x$ と CAS によって処理されたものが出力されることに注意されたい.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 26 & 5 & 39 \end{bmatrix}$ とする. 次の行列式を計算せよ. $|A| =$

Your last answer was interpreted as follows:

60

図 6 validation

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 26 & 5 & 39 \end{bmatrix}$ とする. 次の行列式を計算せよ. $|A| =$

Your last answer was interpreted as follows:

60

チェック

よくできました。正解です！
この送信の評点: 1.00/1.00

図 7 正解

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 26 & 5 & 39 \end{bmatrix}$ とする. 次の行列式を計算せよ. $|A| =$

Your last answer was interpreted as follows:

-60

チェック

惜しい！部分的に正解です。
符号が違います。
この送信の評点: 0.50/1.00 この解答のペナルティ: 0.10

図 8 部分点

図 10 の特定フィードバックの欄の

$[[\text{feedback:prt1}]]$

の箇所には学生の入力した解答に対して図 7, 8, 9 のように, フィードバックが表示される場所となる. **Options** の欄の「Standard feedback for correct」の箇所は学生が満点を取ったときに表示される標準的なフィードバックとなる. また, 「Standard feedback for partially correct」と「Standard feedback for incorrect」はそれぞれ, 部分点がある場合と全くない場合のときに表示さ

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 26 & 5 & 39 \end{bmatrix}$ とする. 次の行列式を計算せよ. $|A| =$

Your last answer was interpreted as follows:

59

チェック

残念間違いです。
この送信の評点: 0.00/1.00 この解答のペナルティ: 0.10

図 9 不正解

れるフィードバックになる。また、図8の「符号が違います」のように、いま紹介した3種類のフィードバック以外に、様々な学生の解答状況に対して、より詳細なフィードバックを与えることができるが、その設定は後述する **Pontential response tree** の欄で行うことが出来る。

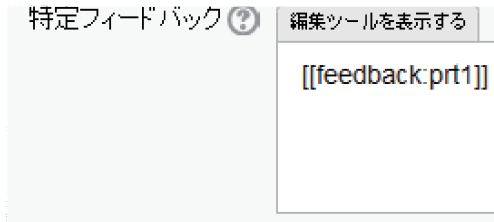


図10 特定フィードバック

図12の全般に対するフィードバックの欄は学生が受験を終了した後に表示されるフィードバックである。実際には図13のように表示される。

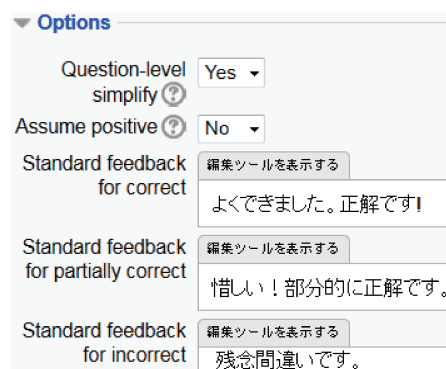


図11 標準的なフィードバック

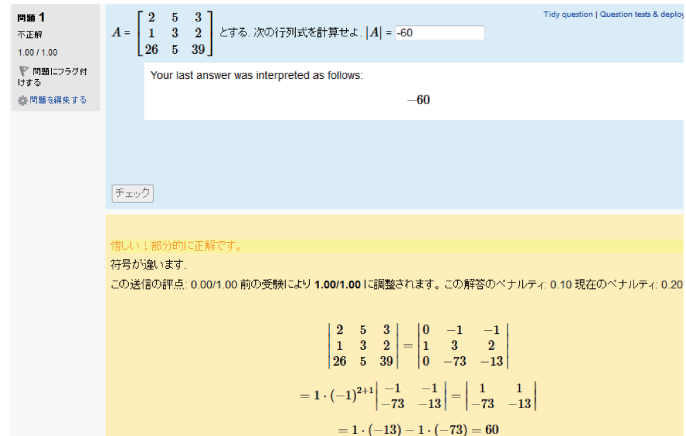


図13 表示結果

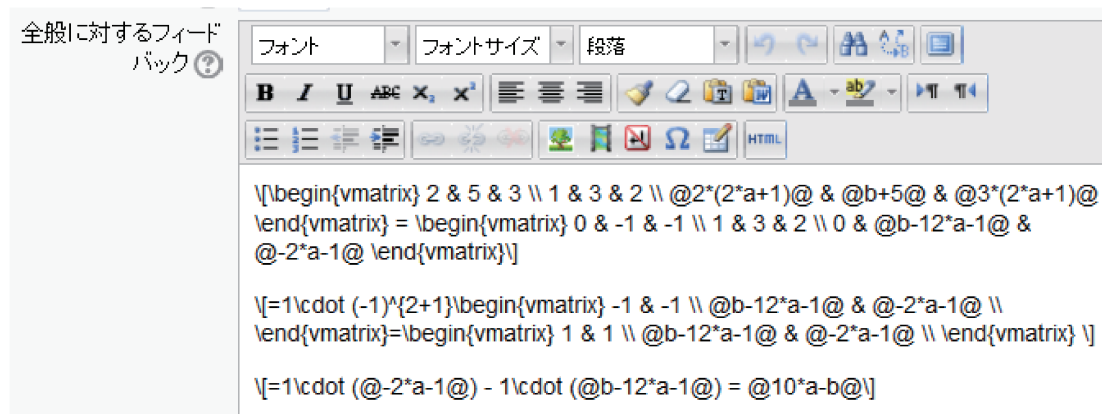


図12 全般に対するフィードバック

2.2 項目「Input」の入力作業

Input の項目では、図5で述べた解答欄の入力形式を指定する。図14の場合は Algebraic input になっているが、他に、Matrix, Single character, Text area, True/False 等がある。ちなみに、Input type を Matrix に、Model answer に (2,3) 行列を指定すると解答欄は図5から図15のように表示が変化する。



図15 行列形式の解答欄

2.3 項目「Potential response tree」の入力作業

図3の“Potential response tree:prt1”の箇所をクリックすると、図16と図17が連なって表示される。図16のFeedback variablesの欄は、この行列式の問題では利用していないので空欄であるが、利用した例は図21の固有値・固有ベクトルの問題を参照されたい。

ここに表れる項目「Potential response tree」は、学生が問題の解答を入力したとき、どのようなフィードバックを学生に与えるかを指示したり、得点を制御する箇所となる。

この問題において、学生の解答によってフィードバックが図7～9の3通りに分かれるが、これがどのように振り分けられるかを説明する。まず、この問題では[[input:ans1]]によって表示された図5の解答欄に入力された内容は変数ans1に代入される。

▼ Input: ans1

Input type ?	Algebraic input
Model answer ?	determinant(A)
Input box size ?	15
Strict syntax ?	Yes
Insert stars ?	No
Syntax hint ?	
Forbidden words ?	
Forbid float ?	Yes
Require lowest terms ?	Yes
Check the type of the response ?	Yes
Student must verify ?	Yes
Show the validation ?	No
Extra options ?	

図14 項目 Input

▼ Potential response tree: prt1

Question value	1
Auto-simplify ?	Yes
Feedback variables ?	

This potential response tree will become active when the student has answered: ans1

図16 Potential response tree その1

(ケース 1) ans1 に正解である A の行列式の値が入力されたとき

図17のNode 1でSansのans1とTansのdeterminant(A)が等しいので、“Node 1 when true”の箇所の処理が実行される。その箇所をみると、Modの欄が=、Scoreの欄が1であるので、点数は1点に設定される。次に“Node 1 true feed back”の欄が表示されるが、

Node 1 ?	Answer test	AlgEquiv	SAns	ans1	TAns	determinant(A)	Test
	options		Quiet	No			
Node 1 when true	Mod	=	Score	1	Penalty		Next [stop] Answer note prt1-1-T
Node 1 true feedback	編集ツールを表示する						
Node 1 when false	Mod	=	Score	0	Penalty		Next Node 2 Answer note prt1-1-F
Node 1 false feedback	編集ツールを表示する						
Delete node 1							
Node 2 ?	Answer test	AlgEquiv	SAns	ans1	TAns	-determinant(A)	Test
	options		Quiet	No			
Node 2 when true	Mod	+	Score	0.5	Penalty		Next [stop] Answer note prt1-2-T
Node 2 true feedback	編集ツールを表示する						
	符号が違います.						
Node 2 when false	Mod	-	Score	0	Penalty		Next [stop] Answer note prt1-2-F
Node 2 false feedback	編集ツールを表示する						
Delete node 2							
Add another node							

図 17 Potential response tree その 2

この場合は空欄であるので、何も表示されない。Next の欄をみると Stop となっているので、判定終了となる。結局得点は 1 点で、これは図 3 のデフォルト評点の 1 点と一致、すなわち満点となる。最後は、図 11 で設定されたデフォルトのフィードバックの “Standard feedback for correct” の欄で設定された 「よくできました。正解です!」 が表示される。よって、この場合の最終的な表示は図 7 となる。

(ケース 2) ans1 に正解である A の行列式の値の逆符号の値が入力されたとき

図 17 の Node 1 で Sans の ans1 と Tans の determinant(A) が異なるので、“Node 1 when false” の箇所の処理が実行される。その箇所をみると、Mod の欄が =, Score の欄が 0 であるので、点数は 0 点に設定される。次に “Node 1 false feed back” の欄が表示されるが、この場合は空欄であるので、何も表示されない。Next の欄をみると Node 2 となっているので、Node 2 に進む。Node 2 で Sans の ans1 と Tans の $-\text{determinant}(A)$ が等しいので、“Node 2 when true” の箇所の処理が実行される。その箇所をみると、Mod の欄が +, Score の欄が 0.5 であるので、Node 1 で設定された 0 点に加点され、点数は $0 + 0.5 = 0.5$ 点に設定される。次に “Node 2 true feed back” の欄が表示されるが、この場合、「符号が違います。」が表示される。Next の欄をみると Stop となっているので、判定終了となる。

結局得点は 0.5 点で、これは 図 3 のデフォルト評点の 1 点には及ばないが部分点とみなされる。最後は、図 11 で設定されたデフォルトのフィードバックの “Standard feedback for partially correct” の欄で設定された「惜しい!部分的に正解です。」が表示される。よって、この場合の最終的な表示は図 8 となる。

(ケース 3) (ケース 1) でも (ケース 2) でもない場合

図 17 の Node 1 で Sans の ans1 と Tans の determinant(A) が等しくないので、“Node 1 when false” の箇所の処理が実行される。その箇所をみると、Mod の欄が =、Score の欄が 0 であるので、点数は 0 点に設定される。次に “Node 1 false feed back” の欄が表示されるが、この場合は空欄であるので、何も表示されない。Next の欄をみると Node 2 となっているので、Node 2 に進む。Node 2 で Sans の ans1 と Tans の $-\text{determinant}(A)$ が等しくないので、“Node 2 when false” の箇所の処理が実行される。その箇所をみると、Mod の欄が -、Score の欄が 0 であるので、Node 1 で設定された 0 点から 0 点減点され、点数は $0 - 0 = 0$ 点に設定される。次に “Node 2 false feed back” の欄が表示されるが、この場合は空欄であるので、何も表示されない。Next の欄をみると Stop となっているので、判定終了となる。結局得点は 0 点となる。最後は、図 11 で設定されたデフォルトのフィードバックの “Standard feedback for incorrect” の欄で設定された「残念間違いです。」が表示される。よって、この場合の最終的な表示は図 9 となる。

さて、この問題の Potential response tree では、Node の数が 2 個であったが、一般に問題を作成するときは、Node をもっとたくさん増やして、いろいろなフィードバックを用意したいときがある。しかし、Node を増やすと編集が大変になる。そこで STACK は、教員が Potential response tree の編集欄を更新するたびに、全ノードの大まかな構造を図 16 のような二分木によって視覚化してくれる。このことは編集作業の効率化に役立っている。

3 固有値、固有ベクトルの問題

最後に、次のような固有値と固有ベクトルを求める問題の設定例を紹介する。

この章では、 2×2 行列の固有値と固有ベクトルを学生に求めさせる問題を挙げた。フィードバックとして、固有値の組が間違っている場合は「固有値が違います」を返し、固有値の組はあっているが、固有ベクトルが違う場合は、図 18 のように、どの固有値に対応する固有ベクトルが違うのかを示すようなフィードバックを返すようにしてある。

次の行列 $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$ となる。

また、 λ_1 に対応する固有ベクトルは

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, λ_2 に対応する固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる。♣

チェック

部分的にあっています!

λ_1 に対応する固有ベクトルは OK, λ_2 に対応する固有ベクトルは No です!

この送信の評点: 0.50/1.00 この解答のペナルティ: 0.10

図 18 固有値と固有ベクトルの問題

まず, **Question variables** と **問題テキスト** ならびに **Input** の設定を示す。

Question variables ?

```
p:rand(5);
q:rand(5);
m:rand(5);
n:rand(5);
n:H;if n = m then n+1 else n;
Zero:matrix([0],[0]);
Se:{m, n};
C:matrix([p*q+1,p],[q,1]);
A:C.matrix([m,0],[0,n]).invert(C);
V1:col(C, 1);
V2:col(C, 2);
```

Random group ?

問題テキスト *

フォント フォントサイズ 段落

B *I* U ABC x₁ x₂

次の行列 @A@ の固有値は $\lambda_1 = \lambda_1$ [[input:ans1]], $\lambda_2 = \lambda_2$ [[input:ans2]] となる。
 [[validation:ans1]][[validation:ans2]]

また, λ_1 に対応する固有ベクトルは [[input:ans3]], λ_2 に対応する固有ベクトルは
 [[input:ans4]] となる。 λ_1 となる。 λ_2

[[validation:ans3]][[validation:ans4]]

パス: p

デフォルト評点 * 1

特定フィードバック ? 編集ツールを表示する

[[feedback:prt1]]

図 19 Question variables と 問題テキストの設定

Input: ans1

Input type ? Algebraic input

Model answer ? m

Input box size ? 3

Strict syntax ? Yes

Insert stars ? No

Syntax hint ?

Forbidden words ?

Forbid float ? Yes

Require lowest terms ? Yes

Check the type of the response ? Yes

Student must verify ? Yes

Show the validation ? No

Extra options ?

Input: ans3

Input type ? Matrix

Model answer ? V1

Input box size ? 3

Strict syntax ? Yes

Insert stars ? No

Syntax hint ?

Forbidden words ?

Forbid float ? Yes

Require lowest terms ? No

Check the type of the response ? No

Student must verify ? Yes

Show the validation ? No

Extra options ?

図 20 Input の設定

同様に, ans1 で m を n にしたものを ans2 に, ans3 で V1 を V2 にしたものを ans4 に設定する。ここで, m, n は正しい固有値で, それぞれに対応する固有ベクトルの正解例を V1, V2 としている。

次に, **Potential response tree** の設定を示す。Feedback variables の欄で, 学生が固

有値として入力した ans1 と ans2 の組を Ko に設定している。また, $m1$ と $m2$ はフィードバックに表れる一部の文言を設定している。また, fm1 は, 学生が固有ベクトルとして入力した ans3 が正しい場合に, 1 になるように設定されている。 fm2 と ans4 の関係も同様である。 Node 1 では Ko と図 19 の Question variables で設定された正しい固有値の組 Se を比較して, 違っていたらその旨をフィードバックに返している。 Node 2 では fm1 と fm2 の積 $\text{fm1} \cdot \text{fm2}$ が 1 であったら正解とし, そうでない場合はどの固有ベクトルが違っているかをフィードバックとして返している。

▼ Potential response tree: prt1

Question value

Auto-simplify

Feedback variables m2:if A.ans4-ans2*ans4 = Zero then if ans4 = Zero then "No" else "OK" else "No";
fm1:if A.ans3-ans1*ans3 = Zero then if ans3 = Zero then 0 else 1 else 0;
fm2:if A.ans4-ans2*ans4 = Zero then if ans4 = Zero then 0 else 1 else 0;"/>

This potential response tree will become active when the student has answered: **ans1, ans2, ans3, ans4**

Node	Answer test	AlgEquiv	SAns	TAns	Test options	Quiet
Node 1	Answer test	AlgEquiv	SAns Ko	TAns Se	Test options	Quiet Yes
Node 1 when true	Mod =	Score 0.5	Penalty	Next Node 2	Answer note prt1-1-T	
Node 1 true feedback	編集ツールを表示する					
Node 1 when false	Mod =	Score 0	Penalty	Next [stop]	Answer note prt1-1-F	
Node 1 false feedback	編集ツールを表示する					
固有値が違います!						
Delete node 1						
Node 2	Answer test	AlgEquiv	SAns fm1*fm2	TAns 1	Test options	Quiet No
Node 2 when true	Mod +	Score 0.5	Penalty	Next [stop]	Answer note prt1-2-T	
Node 2 true feedback	編集ツールを表示する					
Node 2 when false	Mod -	Score 0	Penalty	Next [stop]	Answer note prt1-2-F	
Node 2 false feedback	編集ツールを表示する					
\lambda_1)に対応する固有ベクトルは @m1@, \lambda_2)に対応する固有ベクトルは @m2@です!						
Delete node 2						

図 21 Potential response tree の設定

参考文献

- [1] 数理解析研究所講究録 谷口 哲也, 中村 泰之, 中原 敬広:「STACK をもちいた数学 e ラーニングの実践例と STACK 用の問題バンクの構築」, 数理解析研究所講究録 1909 巻, 165-175, 2014.