

全微分方程式の特異点.

神戸大 理 高野 恭一

§1 序

M を n dim. complex manifold, $V (\subset M)$ を codim. 1 の nonsingular とは限らない variety とする。 $M - V$ 上で一価正則で V 上には高々極をもつ関数を係数とする完全積分可能な線形微分方程式を考える。この方程式が Fuchs 型であるというのは、任意の 経が V 上には高々確定特異点をもつことと定義する。ここで、 $M - V$ 上で多価正則な関数が V 上には高々確定特異点をもつとは、 f が V の任意の nonsingular な点の近傍で確定特異であることである。頭においているのは、 $M = \mathbb{P}^n$, $V = \{ \text{hyperplane} \}$ で方程式は 1 個の未知関数に関するもの (単独型ということにする) である。

先ずやうねばならないことは、局所理論をきちんと作ることである。以下局所理論に関するいくつかの結果を述べる。単独型方程式は連立全微分方程式になおせるかう局所理論の一部は連立方程式において展開する。

§2 確走、不確走の判定

local theory とはじめるにあたり、特異点集合 V において可べ2の解が確走かどうかと判定する手段があることといつておいた方が気が済む。単独常微分方程式における、'Fuchsの定理' に相当するものを得たいのであるがまだ成功してはいない。この節の主題は連立常微分方程式に関するものであるのであまり役に立たない。次の方程式と考える。記号の都合で $n+1$ 次元にしておく。

$$(1) \quad dX = \left(\sum_{i=1}^{n+1} P_i(x, x_{n+1}) dx_i \right) X$$

X : unknown $m \times m$ matrix, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$

$P_i(x, x_{n+1})$: $m \times m$ matrix, 成分は $|x_1|, \dots, |x_n| < r, 0 < |x_{n+1}| < r$ で hol. $x_{n+1} = 0$ に pole をもつ。

(1) の解を原点の近傍で構成する方法を与え、同時に $x_{n+1} = 0$ が確走特異点かどうかと判定するアルゴリズムを与える。

この目的のために次の system と考える。その parameter に関する正則性について2の定理を与える。

$$(2) \quad dX = \left(\sum_{i=1}^n P_i(x, \lambda) dx_i \right) X$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, λ : parameter

$$P_i(x, \lambda) = \sum_{k \geq e_i} P_{ik}(\lambda) x^{k - e_i}, \quad e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

$P_i(x, \lambda) : \text{hol. in } D_x(r) \times E_\lambda, \quad i = 1, \dots, n$

$D_x(r) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x_i| < r, i = 1, \dots, n\}, E_\lambda$ は simply connected とは必ずしも $\mathbb{C}$ のある domain.

(2) の積分可能条件は

$$(3) \quad k_j P_{i,k}(\lambda) - k_i P_{j,k}(\lambda) + \sum_{\substack{k'+k''=k \\ k' \geq e_i, k'' \geq e_j}} [P_{i,k'}(\lambda), P_{j,k''}(\lambda)] = 0$$

for any $k = (k_1, \dots, k_n), i, j$.

であることが確かめられる。 $i = 1, \dots, n$ $[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$

次の形式的解の存在定理がえられる。

定理 1 (2) は次の形の形式的巾級数解をもつ。

$$(4) \quad X = I + \sum_{k \geq 0} U_k(\lambda) x^k.$$

$i = 1, \dots, n$ $U_k(\lambda)$ は次の recursion formula によって与えられる

$$(5) \quad k_i U_k(\lambda) = P_{i,k}(\lambda) + \sum_{e_i + e \leq k} P_{i,e}(\lambda) U_{k-e}(\lambda), \quad i = 1, \dots, n$$

従って $U_k(\lambda)$ は E_λ 上で hol.

注意: (5) において与えられるように $U_k(\lambda)$ は n 個の関係式と同時に満たすように定めなければならない。これを保証するのが積分可能条件 (3) である。

formal sol. (4) の解の存在は 優級数 の方法で示せる。

定理 2 (2) の形式解 (4) は、 $D_x(r) \times E_\lambda$ の任意の compact set 上で一様絶対収束する。従ってそれは $D_x(r) \times E_\lambda$ で hol. な (2) の解を表す。

次の事実に注意しておく。

Prop. 1 (2) の解 $X(x, \lambda)$ とし $\det X(x, \lambda) = \Delta(x, \lambda)$ とすると

$$\Delta(x, \lambda) = \Delta(x_0, \lambda) \exp \left(\int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n \text{Tr } P_i(\xi, \lambda) d\xi_i \right)$$

本題の方程式 (1) にもどる。次の方程式を考える。

$$(6) \quad dU = \left(\sum_{i=1}^n P_i(x, x_{n+1}) dx_i \right) U,$$

ここで x_{n+1} は parameter と考える。(6) は明らかに積分可能な方程式であるので、定理 1, 2 より、

$$(7) \quad U(x, x_{n+1}) = I + \sum_{k \geq 0} U_k(x_{n+1}) x^k$$

なる形の収束解をもつ。ここで $U_k(x_{n+1})$ は recursion

formula によって四則演算により表わされ、 $0 < |x_{n+1}| < r$ で hol. $x_{n+1} = 0$ は pole である。

$\det U(0, x_{n+1}) = 1 \neq 0$ であるから prop. 1 により

$\det U(x, x_{n+1}) \neq 0$ for $\forall (x_1, \dots, x_n) < r, 0 < |x_{n+1}| < r$ である。

この $U(x, x_{n+1})$ を用いて (4) と

$$X = U(x, x_{n+1}) Y$$

で変換すると、 U が (6) の解であるので Y に関する方程式は x_{n+1} に関する 常微分方程式

$$\frac{dY}{dx_{n+1}} = U(x, x_{n+1})^{-1} P_{n+1}(x, x_{n+1}) U(x, x_{n+1}) Y$$

となる。さらに右辺の係数は x に関して independent であることが確かであるので特に $x=0$ とおくと

$$(8) \quad \frac{dY}{dx_{n+1}} = P_{n+1}(0, x_{n+1}) Y.$$

(8) は x_{n+1} に関する常微分方程式であり、 $P_{n+1}(0, x_{n+1})$ は $x_{n+1}=0$ に一般に pole をもつものだから、解の構成方法が知られてゐる。

こうして (1) の解 $(x, x_{n+1}) = (0, 0)$ の近傍で解を構成することができた。さらに、巾級数 (7) の係数 $U_k(x)$ の $x_{n+1}=0$ における pole の位数を d_k とするとこの節の目的である次の定理がえられる。

定理 3 $x_{n+1}=0$ が (1) の離散特異点

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \sup_k d_k < \infty \\ \text{かつ 常微分方程式 (8) におい} \end{array} \right. \quad x_{n+1}=0 \text{ が離散特異点.}$$

この証明は簡単である。

こうして、 V の nonsingular point の近傍で解を構成す

ることができ、 α の local theory の次は、 V の singular point の近傍で解をどう表現するかということである。

§3 Normal crossing の場合

V の singular point の中で α は normal crossing の場合を考える。確走特異点型の最も典型的でよく知られるものとして

$$(9) \quad dX = \left(\sum_{i=1}^n P_i(x) \frac{dx_i}{x_i} \right) X, \quad P_i(x): \text{hol. at } x=0$$

がある。これについて既に当研究所において吉田正章氏(神戸大)が報告しているので、結果が述べると、

(9) の基本解は

$$X = U(x) x_1^{L_1} \cdots x_n^{L_n} x_1^{B_1} \cdots x_n^{B_n}$$

の形で構成できる。 L_i は整数と整数とする対角行列、 B_i は定数行列であり、 L_i, B_i は有限回の代数的演算で計算できる。

(9) は確走特異点型として代表的なものであるが、不確走特異点型の場合については別の機会に報告する。

§4. Normal crossing でない場合

normal crossing でない場合その点の近傍で解を構成することは一般に接続問題を解くことと同じである。この節で

はこの接続問題が常微分方程式の接続問題に帰着されることが示す。後者も一般には解けていないので結局何も解けなことになる。簡単のために $n=2$ で述べる。

原点の近傍で V は r 重 ($r \geq n+1=3$) の irreducible components (各 component は直線である) をもつとしよう。
それと

$$l_i = a_i x - b_i y \quad i=1, \dots, r$$

とする。 $b_i \neq 0$ ($i=1, \dots, r$) とし一般性を失わずに。

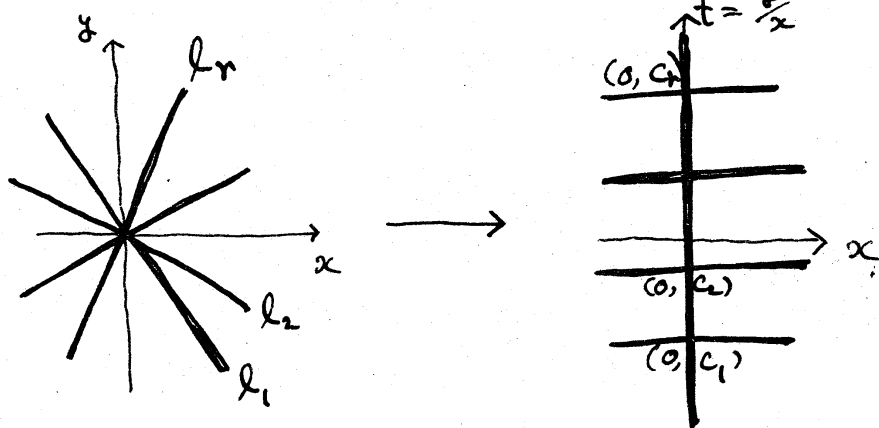
次の方程式を考える。

$$(10) \quad dX = \left(\sum_{i=1}^r P_i(x, y) \frac{dl_i}{l_i} \right) X,$$

原点を blow up する。 i.e. $t = y/x$ とする。

$$(11) \quad dX = \left(S(x, xt) \frac{dx}{x} + \sum_{i=1}^r P_i(x, xt) \frac{dt}{t - c_i} \right) X$$

$$\text{そこで } S(x, xt) = \sum_{i=1}^r P_i(x, xt), \quad c_i = a_i/b_i.$$



$(x, t) = (0, c_i)$ の近傍において (11) の基本解を構成できることはすでに示した。従って、各 $(0, c_i)$ の近傍での基本解の接続ができれば、 $(x, y) = 0$ の近傍における (10) の解が得られることになる。

$$S(0, 0) = S_0, \quad P_i(0, 0) = P_{i,0} \quad (i=1, \dots, n)$$

とすると、 $[S_0, P_{i,0}] = 0 \quad (i=1, \dots, n)$ となる。

簡単のため S_0 の固有値の差は整数である としておこう。

次の方程式

$$(12) \quad \frac{dU}{dx} = \frac{S(x, xt)}{x} U \quad t \text{ is parameter}$$

を考えよう。 $S(x, xt)|_{x=0} = S_0$ に注意すると、(12) は

$$(13) \quad U(x, t) = V(x, t) x^{S_0}$$

$$V(x, t) = I + \sum_{k \geq 0} V_k(t) x^k$$

なる形の解をもつ。この $U(x, t)$ を用いて、

$$(14) \quad X = U(x, t) Y$$

なる変換をすると、 Y に関する方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} = & \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t-c_i} x^{-S_0} V(x, t)^{-1} P_i(x, xt) V(x, t) x^{S_0} \right. \\ & \left. - x^{-S_0} V(x, t)^{-1} V_t(x, t) x^{S_0} \right) Y \end{aligned}$$

となる。右辺の係数は x に independent であることが確かめられるので、 Y に関する方程式は

$$(15) \quad \frac{dY}{dt} = \left(\sum_{l=1}^r \frac{P_{l,0}}{t-c_l} \right) Y$$

であることがわかる。 $P_{l,0}$ が定数行列であることに注意。

こうして、 $(x, y) = (0, 0)$ の近傍における解は (10) の

$$X = V(x, t) x^{S_0} Y(t)$$

として求まることがわかった。i.e., 非常に簡単な常微分方程式(15)を解けばよい。大域解の(15)は一般には求まらないが、normal crossing である場合にのみ(15)の大域解を求まることができるといえることがわかったと記述されている。

References

T. Kimura: Hypergeometric functions of two variables,

Seminar Note, 1973.

Sappo-Danilevsky, Mémoire sur la théorie des systèmes des équations différentielle linéaire, Chelsea Publ. Co. 1953

M. Yoshida, K. Takano, Local theory of Fuchsian systems I,

Proc. Japan Acad. 51 (1975), 219-223