

拡張された $su(2)$ 代数とブロッホ電子問題¹

高エネルギー加速器研究機構 素粒子原子核研究所 久保 晴信²

一様磁場中の電子系に周期ポテンシャルを加えた問題に対する、拡張された $su(2)$ 代数を用いた解析について解説する。これはブロッホ電子の問題に対して、Wiegmann と Zabrodin が行った解析を一般化するものである。拡張された $su(2)$ 代数の表現論を用いてベーテ仮設方程式を立てる。また、ゼロエネルギー波動関数が、Askey Wilson 多項式で与えられることも示す。

1 拡張された $su(2)$ 代数

まず始めに、拡張された $su(2)$ について説明する [1, 2, 3]。この代数は、Biedenharn[4] と Macfarlane[5] が $U_q(sl_2)$ [6] をホップ構造 [7] を持つ変形調和振動子 [8, 9] から構成した方法を、拡張することにより構成されている [10]。そして、光子の負ノルムの問題 [11, 12] をインデックスの概念を用いて考察するのに応用されている [13]。

その交換関係は、

$$\begin{aligned} [S_{\pm}, S_3] &= \mp S_{\pm}, \\ [S_+, S_-] &= [2S_3] + 4[n_0] \sin \pi \theta \sin 2\pi \theta [S_3] [C + \frac{1}{2}]. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$ とする。演算子 C は他の全ての演算子と交換し、 $2j + 1$ 次元表現に対しては $2C + 1 = 2j + 1 - 2n_0$ と選ぶ。代数 (1) は、任意の実 θ を用いてパラメータ q を

$$q = e^{2\pi i \theta}, \quad (2)$$

と表した場合に、任意の n_0 に対して $2j + 1$ 次元最高の重み表現を持つ。また、 $2j + 1$ 次元最高の重み表現を q -差分方程式として表すことが出来る。

$$\begin{aligned} \tilde{S}_+ \psi(z) &= (q - q^{-1})^{-1} z (q^{2j-n_0} \psi(q^{-1}z) - q^{-2j+n_0} \psi(qz)) + z[n_0] \psi(z), \\ \tilde{S}_- \psi(z) &= -(q - q^{-1})^{-1} z^{-1} (q^{n_0} \psi(q^{-1}z) - q^{-n_0} \psi(qz)) + z^{-1}[n_0] \psi(z), \\ q^{\tilde{S}_3} \psi(z) &= q^{-j} \psi(qz). \end{aligned} \quad (3)$$

¹ この原稿は、藤川和男教授との共同研究 [3] に基づいている。

² E-mail: harunobu.kubo@kek.jp

ここで、 $\psi(z)$ は $2j$ 次の多項式である。つまり、表現空間は一般形として $\Psi(z) = \prod_{m=1}^{2j} (z - z_m)$ と表せている。この表現が最高（最低）の重み状態を持つことは $\tilde{S}_+ z^{2j} = 0$ ($\tilde{S}_- \cdot 1 = 0$) により分かる。

パラメータ q が 1 の巾根の時には、互いに素な整数 P と Q を用いて $q = \exp[\pi i P/Q]$ と表すことにする。この時にサイクリック表現を以下のように構成することが出来る。（サイクリック表現とは、最高の重み状態も最低の重み状態も持たない表現のことである。）(3) 式の z に $z = q^k$, ($k = 1, 2, \dots, 2Q$) を代入し、 $2Q$ 個の基底を $\psi_k \equiv \psi(q^k)$ のように作る。この基底は周期的性質 $\psi_{k+2Q} = \psi_k$ 持つ。(3) 式は、

$$\begin{aligned} \rho(S_+) \psi_k &= (q - q^{-1})^{-1} (-q^{k-2j+n_0} \psi_{k+1} + q^{k+2j-n_0} \psi_{k-1}) + q^k [n_0] \psi_k, \\ \rho(S_-) \psi_k &= (q - q^{-1})^{-1} (q^{-k-n_0} \psi_{k+1} - q^{-k+n_0} \psi_{k-1}) + q^{-k} [n_0] \psi_k, \\ q^{\rho(S_3)} \psi_k &= q^{-j} \psi_{k+1}, \end{aligned} \quad (4)$$

となり、これがサイクリック表現である。交換関係が (1) 式となることは、直接の計算により確かめられる。もともと、この代数が定義された [1] では、 n_0 を (5) 式のように選んでいた。

$$[n_0] = \frac{\sin \pi n_0 \frac{P}{Q}}{\sin \pi \frac{P}{Q}} = \frac{1}{|\sin \pi \frac{P}{Q}|}. \quad (5)$$

この様に n_0 を選ぶと、標準的な $2j + 1$ 次元表現において負のノルムを取り除くことが出来ることが示されている。

2 ブロッホ電子問題

一様磁場中の、格子に乗った電子に周期的ポテンシャルをかけた系を考える。これは、Hofstadter 問題 [14, 15, 16, 17] の拡張と見なせる。

$$H = V_1 T_x + V_1 T_x^\dagger + V_2 T_y + V_2 T_y^\dagger + V_3 U + V_3^* U^\dagger, \quad (6)$$

V_1 と V_2 は実で、 V_3 は複素数である。

$$T_x = \sum_{m,n} c_{m+1,n}^\dagger c_{m,n} e^{i\theta_{m,n}^x}, \quad T_y = \sum_{m,n} c_{m,n+1}^\dagger c_{m,n} e^{i\theta_{m,n}^y}, \quad U = \sum_{m,n} q^{m+n} c_{m,n}^\dagger c_{m,n}. \quad (7)$$

$c_{m,n}$ はサイト (m, n) にいる電子の消滅演算子である。 U は便利のために特別なものを選んでいる。以下では、各格子あたりの磁場 ϕ は一様で有理数に値をとるとする。つまり、互いに素な整数 P と Q を用いて $\phi = P/Q$ と表す。ハミルトニアンは、ゲージ普遍性を持っているので、ゲージポテンシャルを $\theta_{m,n}^x = \pi \phi(m+n)$, $\theta_{m,n}^y = -\pi \phi(m+n+1)$ と選ぶ。また、パラメータ q も $q^{2Q} = 1$, $q = e^{i\pi \frac{P}{Q}}$, $P, Q \in \mathbb{Z}$, と 1 の巾根に選ぶ。

(1, 1) と (1, -1) 方向に対して系が周期的になるので、ブロッホの定理を用いて（運動量を p_+ と p_- とする）1 粒子波動関数は、

$$|\Phi(p_+, p_-)\rangle = \sum_{m,n} \Psi_{m,n}(p_+, p_-) c_{m,n}^\dagger |0\rangle, \quad (8)$$

で、 $\Psi_{m,n}(\mathbf{p}) = e^{ip_-(m-n)+ip_+(m+n)}\psi_{m+n}(\mathbf{p})$, $\psi_{k+2Q}(\mathbf{p}) = \psi_k(\mathbf{p})$, $k = 1, \dots, 2Q$ となる。
シュレディンガー方程式 $H|\Phi(\mathbf{p})\rangle = E|\Phi(\mathbf{p})\rangle$ は、

$$(V_1 q^{k-1} e^{-i(p_-+p_+)} + V_2 q^{-k} e^{i(p_-+p_+)})\psi_{k-1} + (V_1 q^{-k} e^{i(p_-+p_+)} + V_2 q^{k+1} e^{-i(p_-+p_+)})\psi_{k+1} \\ + (V_3 q^k + V_3^* q^{-k})\psi_k = E\psi_k. \quad (9)$$

この方程式と変形された $su(2)$ 代数のサイクリック表現 (4) を比較すると、パラメータ $a > 0$ と実 θ_α を用いて、

$$H = i(q - q^{-1})a(e^{-i\theta_\alpha}\rho(S_-) + e^{i\theta_\alpha}\rho(S_+)), \quad (10)$$

とまとめられることが読み取れる。この時の可能なパラメータの値の例として、 $V_1 = V_2 = a$, $p_+ = \pi m_1$, $p_- = -\theta_\alpha + \pi m_2$, $V_3 \equiv 2ae^{i\theta_\alpha} = -2ae^{i\theta_\alpha} \sin(\pi n_0 P/Q)$; $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ 等がある。このハミルトニアン表現の仕方は、 $U_q(sl_2)$ を用いた Wiegmann と Zabrodin の表現 [15] の一般化となっている。

変形された $su(2)$ 代数の $2j+1$ 次元差分表示 (3) からサイクリック表現 (4) を構成した手続きを逆にたどることにより、ブロッホ電子の波動関数を多項式関数空間上 $\psi(z)$ 上で表すことが出来る。 $q^{2j+1} = 1$ を満たすような特別の表現を選ぶことにより、

$$ia(-e^{i\theta_\alpha} q^{1+n_0} z + e^{-i\theta_\alpha} q^{-n_0} z^{-1})\psi(qz) + ia(e^{i\theta_\alpha} q^{-1-n_0} z - e^{-i\theta_\alpha} q^{n_0} z^{-1})\psi(q^{-1}z) \\ + ia(e^{-i\theta_\alpha} z^{-1} + e^{i\theta_\alpha} z)(q^{n_0} - q^{-n_0})\psi(z) = E\psi(z), \quad (11)$$

と多項式上で表すことが出来る。

3 ベーテ仮設方程式

拡張された $su(2)$ 代数の表現空間が $\psi(z) = \prod_{m=1}^{2j} (z - z_m)$ となるので (11) 式は、

$$ia(-e^{i\theta_\alpha} q^{1+n_0} z + e^{-i\theta_\alpha} q^{-n_0} z^{-1}) \prod_{m=1}^{2j} \frac{qz - z_m}{z - z_m} \\ + ia(e^{i\theta_\alpha} q^{-1-n_0} z - e^{-i\theta_\alpha} q^{n_0} z^{-1}) \prod_{m=1}^{2j} \frac{q^{-1}z - z_m}{z - z_m} \\ + ia(e^{-i\theta_\alpha} z^{-1} + e^{i\theta_\alpha} z)(q^{n_0} - q^{-n_0}) = E. \quad (12)$$

と与えられることがわかるが、(12) 式の右辺がポールを持たないので左辺もポールを持つてはならない。この条件からベーテ仮設方程式が以下のように得られる。

$$\frac{e^{2i\theta_\alpha} z_l^2 - q^{2n_0+1}}{q^{2n_0+1} e^{2i\theta_\alpha} z_l^2 + 1} = - \prod_{m=1}^{2j} \frac{qz_l - z_m}{z_l - qz_m}, \quad l = 1, \dots, 2j. \quad (13)$$

エネルギー固有値は

$$E = -iae^{i\theta_\alpha}(q^{n_0} - q^{-n_0} - q^{n_0-1} + q^{-n_0+1}) \sum_{m=1}^{2j} z_m, \quad (14)$$

と与えられる。 $E = 0$ の時の波動関数は、Askey Wilson 多項式 [18] を用いて与えられることが示せる。Askey Wilson 多項式 $P_m(w)$ とは、 $(w + w^{-1})$ の次数 m の多項式で、パラメータ a, b, c, d を含むような、

$$\begin{aligned} & A(w)P_m(qw) + A(w^{-1})P_m(qw) - (A(w) + A(w^{-1}))P_m(w) \\ &= (q^{-m} - 1)(1 - abcdq^{m-1})P_m(w), \end{aligned} \quad (15)$$

を満たすものである。 $A(w)$ は $A(w) = (1 - aw)(1 - bw)(1 - cw)(1 - dw)/(1 - w^2)(1 - qw^2)$ である。 $E = 0$ の解 $\psi(z)$ は、 $a = -b = q^{1/2}$ 、 $c = -d$ 、 $w = \xi z$ として

$$\psi(z) = (\xi z)^m P_m(\xi z); \quad \xi^2 = -e^{2i\theta_\alpha}, c^2 = -q^{1+2n_0}, q^m = q^{-1}, \quad (16)$$

と Askey Wilson 多項式で与えられる。

演算子 T_x, T_y, U と新たな演算子 $C = T_y T_x U^2$ を導入して、その交換関係を考える³。

$$T_x T_y = q^2 T_y T_x, \quad U^2 T_x = q^2 T_x U^2, \quad U^2 T_y = q^2 T_y U^2, \quad (17)$$

$$[C, T_x] = 0, \quad [C, T_y] = 0, \quad [C, U^2] = 0 \quad (18)$$

これらの関係より、半分の格子間隔を持った演算子 $\tau_x^2 = T_x$ と $\tau_y^2 = T_y$ (交換関係は $\tau_x \tau_y = q \tau_y \tau_x$) を用いて演算子 U を $U = \tau_x \tau_y$ と表すことが出来る。そうするとブロッホ電子のハミルトニアン $H \sim T_x + T_y + U + h.c$ は、 $H \sim (\tau_x + \tau_y)^2 + h.c$ となる。演算子 C が他の演算子と可換であることより、 τ_x と τ_y は薄い3次元三角格子に乗っていると見なせることも分かる。

謝辞

共同研究での有益な議論と絶え間ない激励に対して藤川和男氏に感謝致します。ハミルトニアンと三角格子との関係について、Wiegmann 氏の適切なコメントに感謝致します。

参考文献

- [1] K. Fujikawa, H. Kubo and C. H. Oh, Mod. Phys. Lett. A **12**(1997), 403.
- [2] H. Kubo, Mod. Phys. Lett. A **12**(1997), 1335.
- [3] K. Fujikawa and H. Kubo Phys. Lett. A **239**(1998), 21.
- [4] L. C. Biedenharn, J. Phys. A: Math. Gen. **22**(1989), L873.
- [5] A. J. Macfarlane, J. Phys. A: Math. Gen. **22**(1989), 4581.

³ 京都大学基礎物理学研究所での Wiegmann 氏との議論による。

- [6] E. K. Sklyanin, *Usp. Mat. Nauk* **40**(1985), 214.
V. G. Drinfeld, *Dokl. Acad. Nauk* **283**(1985), 1060.
M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.* **10**(1985), 63.
- [7] L. D. Faddeev, *Les Houches Lectures 1982*(Elsevier, Amsterdam, 1984).
P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Lecture Note in Physics* Vol. 151(Springer, Berlin, 1982).
- [8] Hong Yan, *J. Phys. A:Math. Gen.* **23**(1990), L1150.
- [9] C. H. Oh and K. Singh, *J. Phys A:Math. Gen.* **27**(1994), 5907.
- [10] K. Fujikawa, L. C. Kwek, and C. H. Oh, *Mod. Phys. Lett. A***10**(1995), 2543.
- [11] S. H. Chiu, R. W. Gray and C. Nelson, *Phys. Lett. A***164**(1992), 237.
- [12] D. Ellinas, *Phys. Rev. A***45**(1992), 3358.
- [13] K. Fujikawa, *Phys. Rev. A***52**(1995), 3299.
- [14] D. R. Hofstadter, *Phys. Rev. B* **14**(1976), 2239.
- [15] P. B. Wiegmann and A. V. Zabrodin, *Phys. Rev. Lett.* **72**(1994), 1890; *Nucl.Phys. B***422**[FS](1994), 495.
- [16] Y. Hatsugai, M. Kohmoto, and Y. S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **73**(1994), 1134; *Phys. Rev. B* **53**(1996), 9697.
- [17] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *Comm. Math. Phys.* **169**(1995), 181.
- [18] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series* , (Cambridge Univ. Press, 1990).