

渦と乱流

桑原 真二

名古屋大学 工学部 応用物理学科

1 まえおきと基礎方程式

我々は縮まない、粘性なしの流体の 3 次元渦運動を議論する。離散渦法またはポーション法はこの様な流れを計算するのに大変有用である。この流れの基礎方程式は次のように書かれる。

$$\nabla^2 \vec{v} = -\text{rot} \vec{\omega}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} = 0, \quad (2)$$

ここで、 $\vec{v}, \vec{\omega}$ は流速、渦度ベクトルである。これらは、渦度の定義式及び Euler 方程式に各々 rot をほどこして得られる。(2) は渦の発展方程式と呼ぶ。(2) の最後の項は次のように書き直すことができる。

$$(\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} \equiv \vec{e}_\alpha \omega_\lambda \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\lambda} = \vec{e}_\alpha \omega_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\alpha} \equiv (\vec{\omega} \cdot \text{grad}^T) \vec{v}, \quad (3)$$

ここで、和の略記号が用いられている。(3) の後の 2 つの表現はその前のものに対する adjoint な表現とよばれる。

2 ソフト・ボートン

x_1 の方向を向いた単位ボートン及び単位 Novikov ボートンの渦度を次のように定義する。

$$\vec{\omega}^V(\vec{x}) = \vec{e}_1 \delta^3(\vec{x}), \quad (4)$$

$$\vec{\omega}^{NV}(\vec{x}) = \vec{e}_1 \delta^3(\vec{x}) - \frac{1}{4\pi r^3} (\vec{e}_1 - \frac{3}{r^3} (\vec{e}_1 \cdot \vec{x}) \vec{x}). \quad (5)$$

ここで、 $\vec{e}_1$ は x_1 方向の単位ベクトルである。ここで、注意すべきは

$$\text{div} \vec{\omega}^V \neq 0, \quad \text{div} \vec{\omega}^{NV} = 0, \quad (6)$$

である。

さて、

$$F(r) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad (7)$$

は Laplacian の基本解であり、

$$\nabla^2 F(r) = \delta^3(\vec{x}), \quad r = |\vec{x}| \quad (8)$$

を満たす。ここで、約 $1/\sqrt{\alpha}$ の半径の広がりをもつ 3 次元の釣鐘形のスカラー関数、ソフトなデルタ関数

$$\delta^3(\vec{x}, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha r^2}, \quad (9)$$

を導入すれば、勿論

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \delta^3(\vec{x}, \alpha) = \delta^3(\vec{x}) \quad (10)$$

となる。ここで、ソフトなデルタ関数に対応する「基本解」 $F(r, \alpha)$ が

$$\nabla^2 F(r, \alpha) = \delta^3(\vec{x}, \alpha), \quad (11)$$

を満たすとする、その解は

$$F(r, \alpha) = -\frac{1}{4\pi r} \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha} r), \quad (12)$$

で表わされる。ここで

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad (13)$$

である。勿論 α を ∞ にすると、(12) は (7) に収束する ($r \neq 0$)。

さて、ソフト・ボートン、ソフト Novikov ボートンを考え、それらの渦度を各々

$$\vec{\omega}^V(\vec{x}, \alpha) = \vec{e}_1 \delta^3(\vec{x}, \alpha), \quad (14)$$

$$\vec{\omega}^{NV}(\vec{x}, \alpha) = \vec{e}_1 \delta^3(\vec{x}, \alpha) - \operatorname{grad}(\vec{e}_1 \cdot \operatorname{grad} F(r, \alpha)), \quad (15)$$

で定義する。(14), (15) についても (6) が成り立つ。これらを

(1) の右辺の $\vec{\omega}$ に代入し、積分すると

$$\vec{v}^V(\vec{x}, \alpha) = V(r, \alpha) \sin \theta \vec{e}_\varphi, \quad (16)$$

$$\vec{v}^{NV}(\vec{x}, \alpha) = V(r, \alpha) \sin \theta \vec{e}_\varphi, \quad (17)$$

$$V(r, \alpha) = \frac{1}{4\pi r^2} (\text{erf} \sqrt{\alpha} r - 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} r e^{-\alpha r^2}) \quad (18)$$

となり、両者の誘導速度は一致する。ここで、 (r, θ, φ) は x_1 軸を回転軸とする球座標である。 α を ∞ にした極限は

$$\vec{v}^V(\vec{x}) = \vec{v}^{NV}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \sin \theta \vec{e}_\varphi, \quad (19)$$

となる。以上の事をまとめると、次の様になる。(14)、(15) でソフト・ボートン、ソフト Novikov ボートンの渦度を定義するとし、前者はソレノイダルでなく、後者はソレノイダルである。これらの渦度を(1)の右辺に代入して積分すると、全く同じ誘導速度が得られる。

次に、ボートンまたは Novikov ボートンの渦の発展方程式の非線形項に対する特異性を議論する。それを試すために、それらの通常および adjoint な形式の非線形項にソフトな $\vec{v}$ 及び $\vec{\omega}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} & (\vec{v}^V \cdot \text{grad}) \vec{\omega}^V - (\vec{\omega}^V \cdot \text{grad}) \vec{v}^V \\ &= \delta^3(\vec{x}, \alpha) \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (20)$$

$$(\vec{v}^V \cdot \text{grad}) \vec{\omega}^V - (\vec{\omega}^V \cdot \text{grad}^T) \vec{v}^V = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & (\vec{v}^{NV} \cdot \text{grad}) \vec{\omega}^{NV} - (\vec{\omega}^{NV} \cdot \text{grad}) \vec{v}^{NV} = \\ & (\vec{v}^{NV} \cdot \text{grad}) \vec{\omega}^{NV} - (\vec{\omega}^{NV} \cdot \text{grad}^T) \vec{v}^{NV} = \frac{V}{r} \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (22)$$

となる。すなわち、ボートンに対する非線形項は通常形式と adjoint な形式では異なる。これは $\text{div} \omega^V \neq 0$ のためである。ここで、(20) によいベクトル関数 $\vec{f}(\vec{x})$ (何回でも微分可能、無限遠で 0) をスカラー積して、全空間で積分すると、

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{-\infty}^{\infty} [(\vec{v}^V \cdot \text{grad}) \vec{\omega}^V - (\vec{\omega}^V \cdot \text{grad}) \vec{v}^V] \cdot \vec{f}(\vec{x}) d^3 \vec{x} \\ & = \text{const.} \frac{\partial}{\partial x_1} f_\varphi \big|_{\vec{x}=0} \alpha \longrightarrow_{\alpha \rightarrow \infty} \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

となり、ボートンに対する渦の発展方程式の非線形項は発散することになる。Novikov ボートンに対しては通常形式でも、adjoint な形式でもその項は発散する。しかし、ボートンの adjoint な非線形項は 0 となり、したがって発散しない。これは Greengard & Thomann によって注意された事である。

3 フーリエ変換とエネルギー・スペクトル

ここで、速度及び渦度のフーリエ変換およびフーリエ逆変換を

$$\vec{u}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \vec{v}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x} \equiv \mathcal{F}\vec{v}(\vec{x}), \quad (24)$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \int \int \int \vec{u}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k} \equiv \mathcal{F}^{-1}\vec{u}(\vec{k}), \quad (25)$$

$$\vec{\omega}(\vec{k}) = \mathcal{F}\vec{\omega}(\vec{x}), \quad (26)$$

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}\vec{\omega}(\vec{k}), \quad (27)$$

と定義する。(1) をフーリエ変換し、 $\vec{u}(\vec{k})$ について解けば、

$$\vec{u}(\vec{k}) = \frac{i}{k^2} \vec{k} \times \vec{\omega}(\vec{k}), \quad (28)$$

となる。今、波数空間におけるエネルギー密度を

$$\Phi(\vec{k}) = \frac{1}{2} \vec{u}(\vec{k}) \cdot \vec{u}(-\vec{k}) = \frac{1}{2k^4} |\vec{k} \times \vec{\omega}(\vec{k})|^2, \quad (29)$$

とおけば、エネルギー・スペクトル $E(k)$ は

$$E(k) = k^2 \int \int \Phi(\vec{k}) |_{|\vec{k}|=k} d^2\Omega(\vec{k}), \quad (30)$$

となる。ここで、 $d^2\Omega(\vec{k})$ は $\vec{k}$ 方向の微分立体角である。

渦場をソフト・ボートンの集まりで表わし

$$\vec{\omega}(\vec{x}) = \sum_l \vec{\Omega}(l) \vec{e}(l) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_l, \alpha_l), \quad (31)$$

とおけば、

$$E(k) = \frac{1}{(2\pi)^5} \left[\sum_l \Omega(l)^2 e^{-k^2/2\alpha_l} V(l)^2 + \sum_{l,l'} \frac{1}{k |\vec{x}_l - \vec{x}_{l'}|} \vec{\Omega}(l) \cdot \vec{\Omega}(l') \right. \\ \left. \sinh |\vec{x}_l - \vec{x}_{l'}| e^{-k^2/2\alpha_{ll'}} V(l) V(l') \right], \quad (32)$$

となる。ここで、

$$\frac{2}{\alpha_{ll'}} = \frac{1}{\alpha_l} + \frac{1}{\alpha_{l'}}, \quad \alpha_l^{-3/2} \doteq V(l), \quad (33)$$

である。

4 2つの渦輪

ボートンの方法で、2つの渦輪の運動を解析する。ボートンの方程式は今まで行なってきたものと同じである。また、前と同様にボートン分裂、時間メッシュの分割をおこなった。初期の渦輪は共に半径が1で、渦糸の太さは0.1である。速度等は、渦輪の循環が共に1になるように、規格化してある。エネルギー・スペクトル(32)の計算において、 $\alpha_l^{-1/2}$ が $V(l)$ の球の相当半径になる様に $(4\pi/3V(l))^{2/3}$ とおいた。

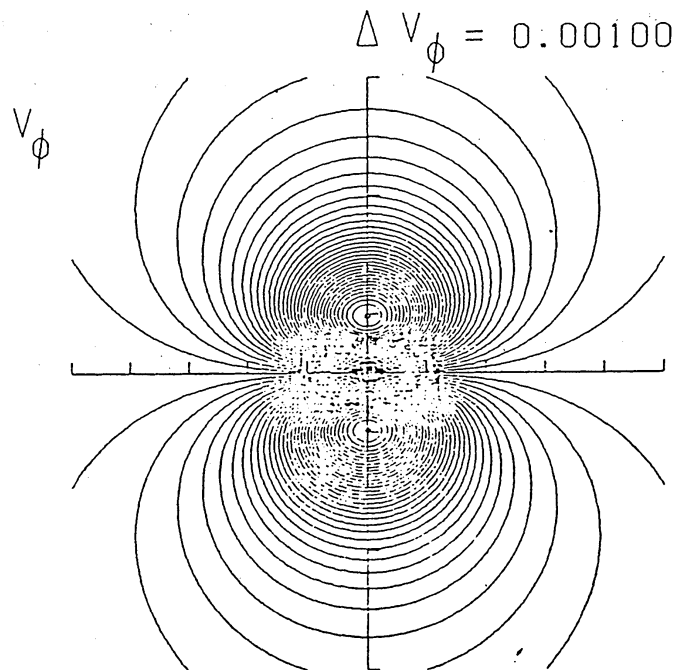
1 図は $V(r) \sin \theta$ ((16)、(18) を参照) によって描いたソフト・ボートの等 v_ϕ 曲線である。2 図以下は、色々の初期条件に対応する 2 つの渦輪の運動を 3 面図で示し、更に (32) で求めたエネルギー・スペクトルが描かれている。そこに点線で示されたものは初期のスペクトルである。

以上の計算において、渦輪の接近と共に渦糸の引き延ばしが起こり、ボートンが分裂し多数のボートンが発生した。これは乱流のカスケード機構に対応し、エネルギー・スペクトルを見ても、小さい波数から大きい波数へのエネルギー輸送がみられる。この現象は、数値解析に現われる渦粘性の最も原始的形態と思われる。なお、この場合にはボートンの分裂が加速的に起こり計算が進まなくなるが、数値的不安定性はない。また、初期のスペクトルの 2 つのこぶは、渦輪の半径と渦糸の太さに対応するものである。

参考文献：

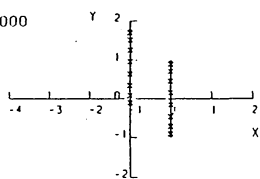
- 1) Aksman, M.J., E.A. Novikov & S.A. Orszarg: Phys. Rev. Lett. 54(1985)2410.
- 2) Beale, J.T., T. Kato & J. Majda: Comm. Math. Phys. 94(1984)553.
- 3) Beale, J.T. & J. Majda: Comm. Math. Computation 39(1983)1.
- 4) Beale, J.T. & J. Majda: Comm. Math. Computation 39(1983)29.
- 5) Chorin, A.J.: Comm. Math. Phys. 83(1982)517.
- 6) Greengard, C. & E. Thomann: Phys. Fluids 31(1988)2810.
- 7) Kuwabara, S.: Inst. Space and Aeron. Sci. Rep. SP2(1984)15.
- 8) Kuwabara, S.: Inst. Space and Aeron. Sci. Rep. SP3(1985)31.
- 9) 桑原真二： 第 17 回乱流シンポジウム講演論文集 (1985)145.

- 10) Kuwabara, S.: Inst. Space and Aeron. Sci. Rep. SP4(1986)11.
- 11) Kuwabara, S.: Inst. Space and Aeron. Sci. Rep. SP5(1987)23.
- 12) 桑原真二 : 数理研講究録 601(1986)99.
- 13) 桑原真二 : 第18回乱流シンポジウム講演論文集 (1986)145.
- 14) Kuwabara, S.: Fluid Dynam. Res. 3(1988)163.
- 15) 桑原真二 : 数理研講究録 677(1989)11.
- 16) Novikov, E.A.: Soviet Phys. JETP 57(1983)566.
- 17) Saffman, P.G.: in Transition and Turbulence (Academic Press, 1981)149.
- 18) Winckelmans, G. & A. Leonard: Phys. Fluids 31(1988)1838.

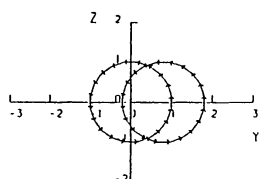
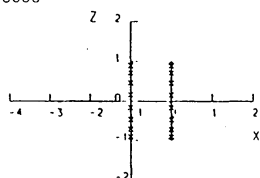


1 図

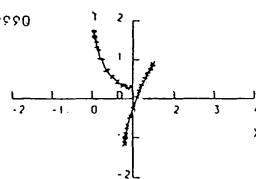
$T = 0.0000000$
 $NV1 = 20$
 $NV2 = 20$



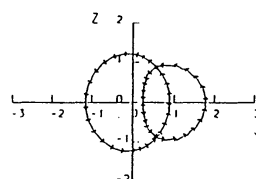
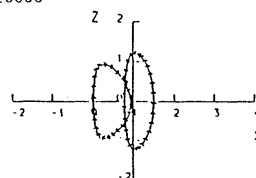
$DT = 0.0020000$



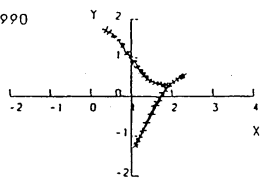
$T = 3.9999990$
 $NV1 = 27$
 $NV2 = 24$



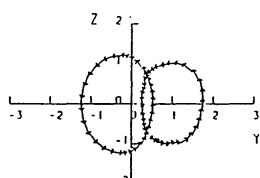
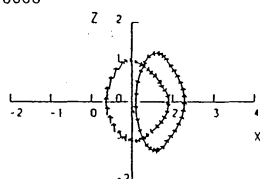
$DT = 0.0020000$



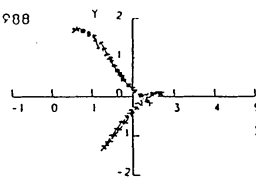
$T = 5.9999990$
 $NV1 = 33$
 $NV2 = 35$



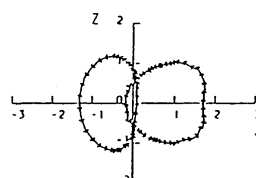
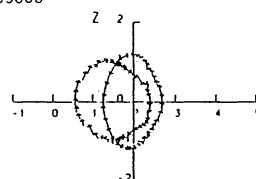
$DT = 0.0010000$



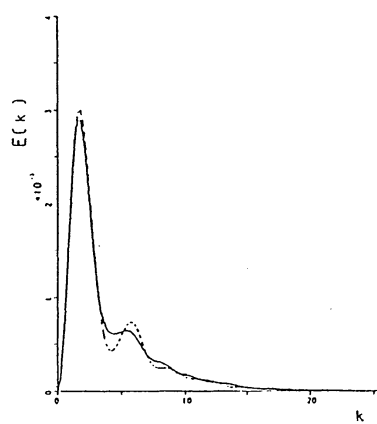
$T = 7.1999988$
 $NV1 = 38$
 $NV2 = 48$



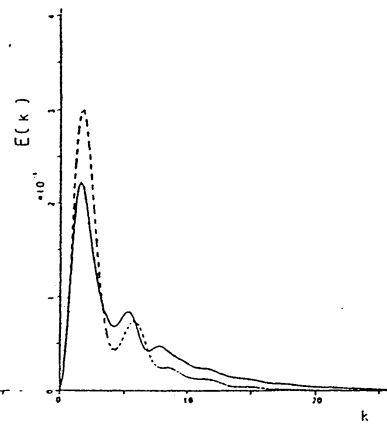
$DT = 0.0005000$



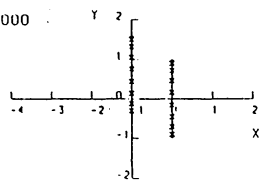
$T = 1.9999990$



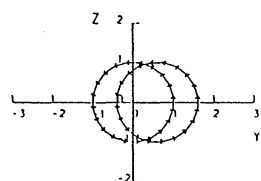
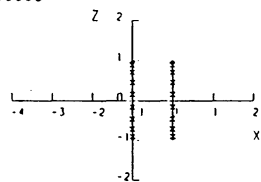
$T = 7.1999988$



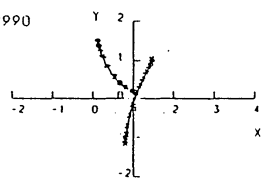
$T = 0.0000000$
 $NV1 = 20$
 $NV2 = 20$



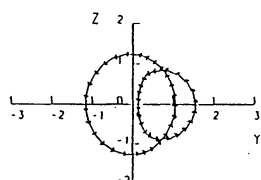
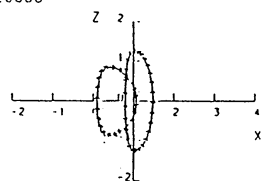
$DT = 0.0020000$



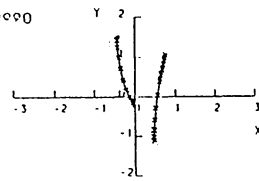
$T = 3.9999990$
 $NV1 = 27$
 $NV2 = 22$



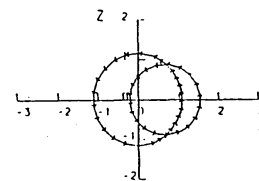
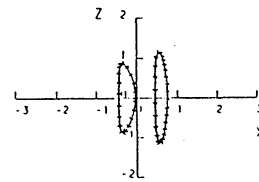
$DT = 0.0020000$



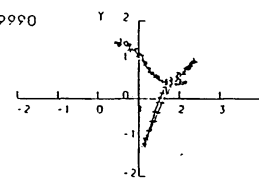
$T = 1.0000000$
 $NV1 = 27$
 $NV2 = 20$



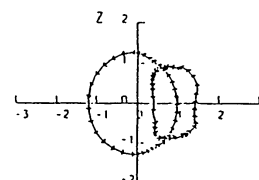
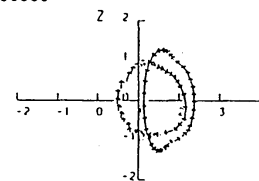
$DT = 0.0020000$



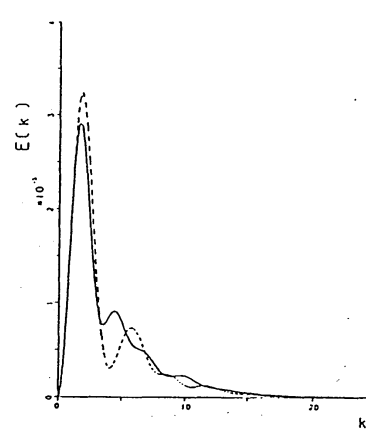
$T = 5.9999990$
 $NV1 = 36$
 $NV2 = 38$



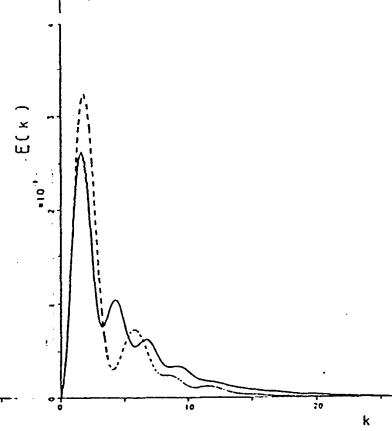
$DT = 0.0005000$



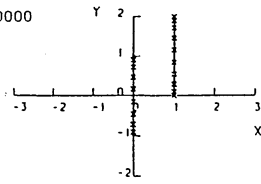
$T = 3.9999990$



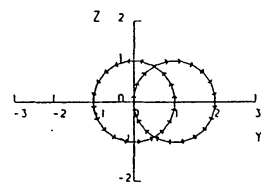
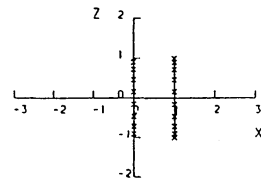
$T = 5.9999990$



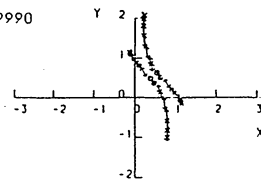
$T = 0.0000000$
 $NV1 = 20$
 $NV2 = 20$



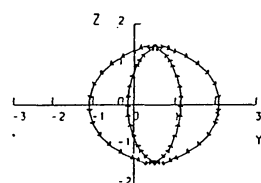
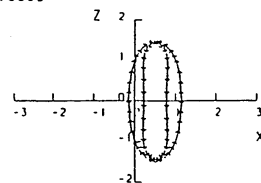
$DT = 0.0020000$



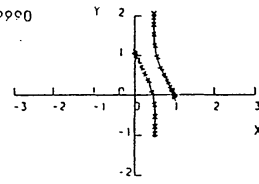
$T = 2.9999990$
 $NV1 = 33$
 $NV2 = 33$



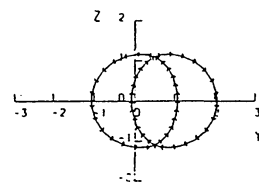
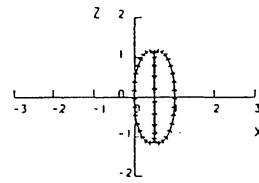
$DT = 0.0010000$



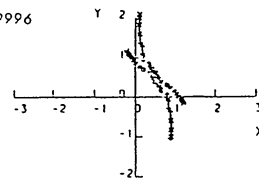
$T = 1.9999990$
 $NV1 = 27$
 $NV2 = 27$



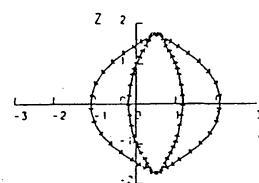
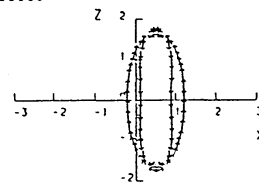
$DT = 0.0020000$



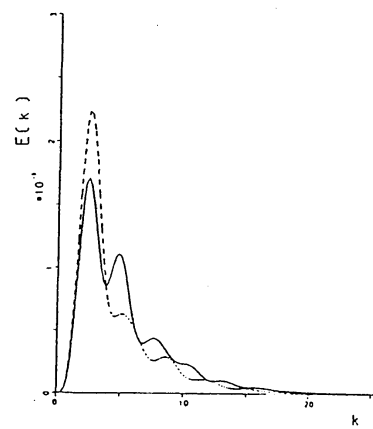
$T = 3.3999996$
 $NV1 = 43$
 $NV2 = 43$



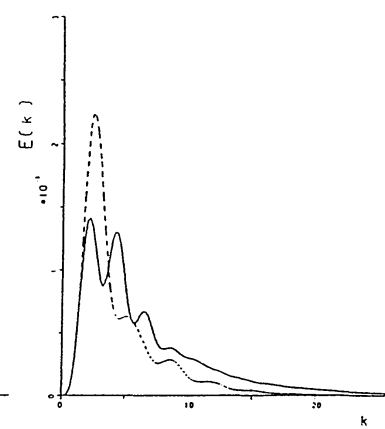
$DT = 0.0005000$



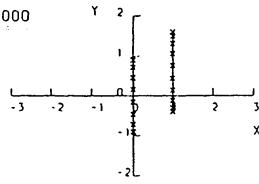
$T = 1.9999990$



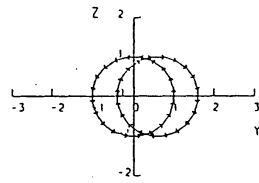
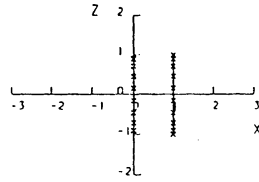
$T = 3.3999996$



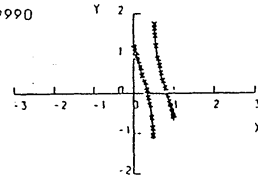
T = 0.000000
NV1 = 20
NV2 = 20



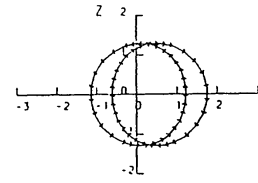
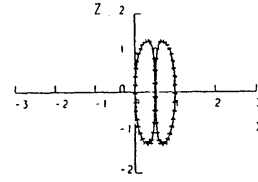
DT = 0.0020000



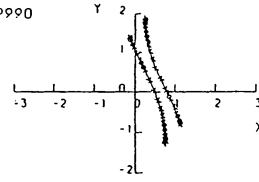
T = 1.9999990
NV1 = 31
NV2 = 31



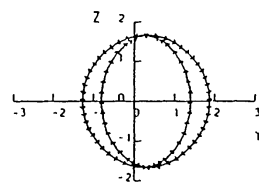
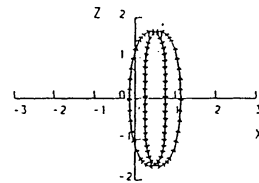
DT = 0.0020000



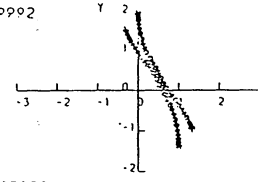
T = 2.9999990
NV1 = 42
NV2 = 42



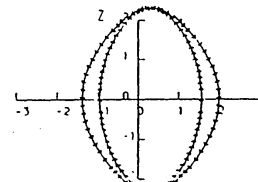
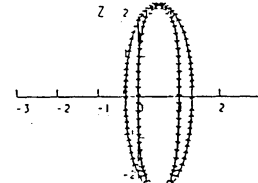
DT = 0.0020000



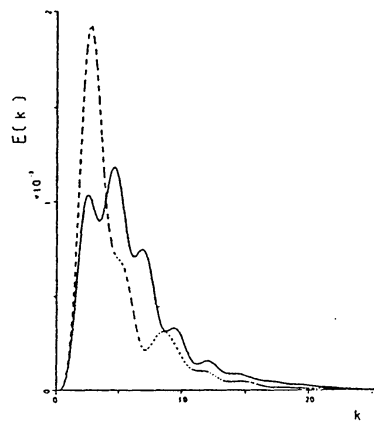
T = 3.7999992
NV1 = 68
NV2 = 68



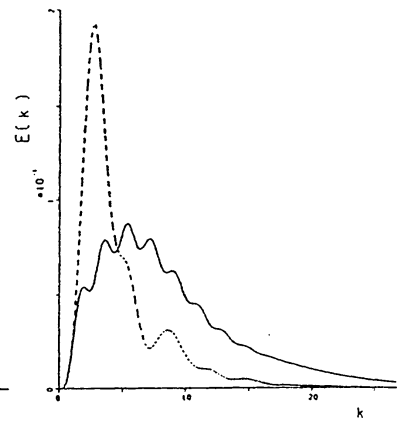
DT = 0.0005000



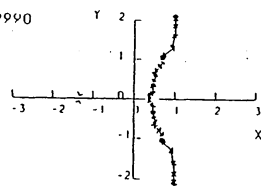
T = 1.9999990



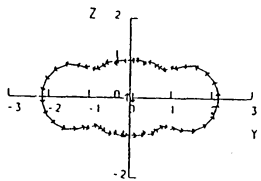
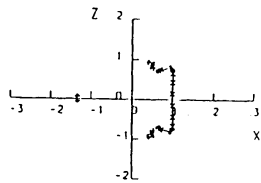
T = 3.7999992



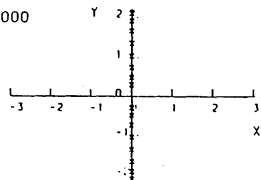
$T = 3.9999990$
 $NV1 = 28$
 $NV2 = 28$



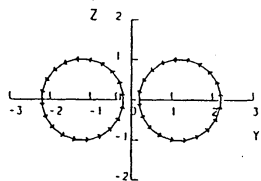
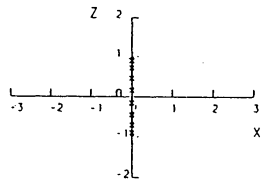
$DT = 0.0050000$



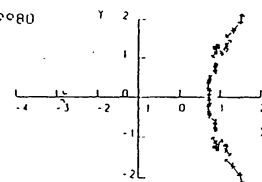
$T = 0.0000000$
 $NV1 = 20$
 $NV2 = 20$



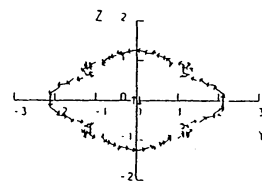
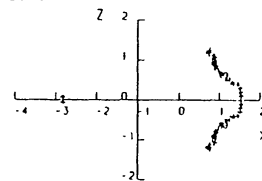
$DT = 0.0050000$



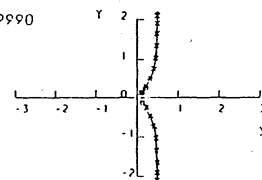
$T = 5.4000080$
 $NV1 = 40$
 $NV2 = 40$



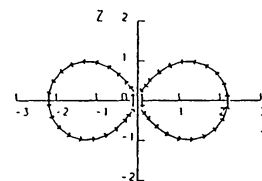
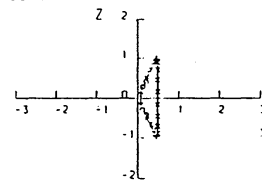
$DT = 0.0012500$



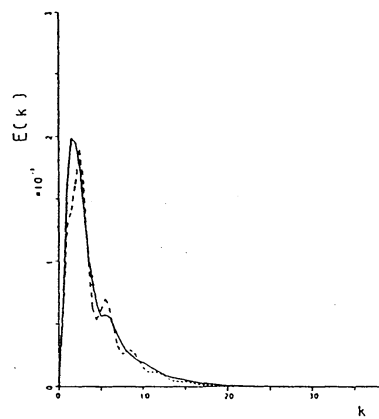
$T = 1.9999990$
 $NV1 = 22$
 $NV2 = 22$



$DT = 0.0050000$



$T = 3.9999990$



$T = 5.4999980$

