

同変デファイナブル s -コボルディズム定理

大阪大学大学院理学研究科 西村孝宏 (Takahiro Nishimura)
Graduate School of Science, Osaka University

1. 同変 s -コボルディズム定理

本稿では、S.Araki、K.Kawakubo によるコンパクト Lie 群に対する同変 s -コボルディズム定理 ([1]) をデファイナブルカテゴリーに拡張することを目的とする。

G をコンパクト Lie 群、 W を $\partial W = M \sqcup N$ (disjoint union) を満たすコンパクトな $C^\infty G$ -多様体とする。包含写像 $i_M : M \rightarrow W$, $i_N : N \rightarrow W$ が G -ホモトピー同値写像のとき、3 つ組 $(W; M, N)$ を G - h -コボルディズムという。さらに、 G - h -コボルディズム $(W; M, N)$ が $\tau_G(i_M) = 0 \in Wh_G(M)$ のときに、 $(W; M, N)$ を G - s -コボルディズムという。

G - s -コボルディズム定理が成り立つためには、次元の条件が必要になる。

H 、 K を W のアイソトロピー群として、

$$W^H = \bigsqcup_{\lambda} W_{\lambda}^H, W^K = \bigsqcup_{\mu} W_{\mu}^K$$

と W^H 、 W^K を連結成分に分解し、以下の 2 つの次元の条件を考える。

(*1) $W_{\mu}^K \supseteq W_{\lambda}^H$ ならば、任意の連結成分の組 W_{λ}^H 、 W_{μ}^K に対して、

$$\dim W_{\mu}^K - \dim W_{\lambda}^H \geq \dim G + 3$$

(*2) H がアイソトロピー群の最大元ならば、任意の連結成分 W_{λ}^H に対して、

$$\dim W_{\lambda}^H \geq \dim G + 6$$

この 2 つの次元の条件を使って G - s -コボルディズム定理が与えられている。

定理 1.1(同変 s -コボルディズム定理 [1]). G をコンパクト Lie 群、 $(W; M, N)$ を G - s -コボルディズムとする。 W が、次元の条件 (*1) と (*2) を満たすとする、 G -微分同相

$$W \cong_G M \times I \text{ rel. } M$$

が成り立つ。

特に、 M は N に G -微分同相である。

2. デファイナブルカテゴリーについて

デファイナブル集合はすべてパラメータつきで考えるものとする。

$K \subset \mathbb{R}^n$ 、 $L \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f : K \rightarrow L$ のグラフがデファイナブル集合のときに f をデファイナブル写像という。また、 $U \subset \mathbb{R}^n$ 、 $V \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル開集合とする。デファイナブル写像 $f : U \rightarrow V$ が C^r 写像 のときにデファイナブル C^r 写像という。

デファイナブル C^r 写像 $f : U \rightarrow V$ に対して、 $h \circ k = id$ 、 $k \circ h = id$ を満たすデファイナブル C^r 写像

$k: V \rightarrow U$ が存在するとき、 f はデファイナブル C^r 微分同相写像と呼ばれる。

$\mathbb{R}$ のすべてのデファイナブル集合が点と开区間の有限和のときに、 $\mathcal{M}$ を α -manimal という。

定義 2.1. $0 \leq r \leq \omega$ とする。

(1) $\mathbb{R}^n$ のデファイナブル集合 X が $\mathbb{R}^n$ の d 次元デファイナブル C^r 部分多様体とは、任意の $x \in X$ に対して、 $\mathbb{R}^n$ の原点のデファイナブル開近傍 U_x から x の $\mathbb{R}^n$ でのデファイナブル開近傍 V_x へのデファイナブル C^r 微分同相写像 $\phi_x: U_x \rightarrow V_x$ が存在して、 $\phi_x(0) = x, \phi_x(\mathbb{R}^d \cap U_x) = X \cap V_x$ を満たす。ここで $\mathbb{R}^d$ は $\mathbb{R}^n$ の後ろの $(n-d)$ 個の成分が 0 の部分集合である。

(2) X を有限チャート $\{\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^d\}$ を持つ C^r 多様体とする。任意の i, j に対して $\phi_i(U_i \cap U_j)$ が $\mathbb{R}^d$ のデファイナブル開集合で、写像 $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}: \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ がデファイナブル C^r 微分同相写像であるとき、 X を d 次元デファイナブル C^r 多様体という。このアトラスをデファイナブル C^r アトラスという。

X の部分集合 Y がデファイナブルとは、各 $\phi_i(U_i \cap Y)$ が $\mathbb{R}^d$ のデファイナブル部分集合のときをいう。

X のデファイナブル部分集合を Z とする。任意の $x \in Z$ に対して、 x の X でのデファイナブル開近傍 U_x から $\mathbb{R}^d$ のデファイナブル開集合 V_x へのデファイナブル C^r 微分同相写像 ϕ_x が存在して、 $\phi_x(x) = 0, U_x \cap Y = \phi_x^{-1}(\mathbb{R}^k \cap V_x)$ を満たすときに、 Z を X の k 次元デファイナブル C^r 部分多様体という。 $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^d$ はうしろの $(d-k)$ 個の成分が 0 の部分集合である。

(3) X (resp. Y) をデファイナブル C^r チャート $\{\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}_i$ (resp. $\{\psi_j: V_j \rightarrow \mathbb{R}^m\}_j$) を持つデファイナブル C^r 多様体とする。 C^r 写像 $f: X \rightarrow Y$ がデファイナブル C^r 写像とは、任意の i, j に対して $\phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_j)$ が $\mathbb{R}^n$ でデファイナブル集合かつ開集合で、 $\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}: \phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i) \rightarrow \mathbb{R}^m$ が C^r 写像であるときをいう。

(4) X, Y をデファイナブル C^r 多様体とする。デファイナブル C^r 写像 $f: X \rightarrow Y, h: Y \rightarrow X$ で $f \circ h = id, h \circ f = id$ を満たすものが存在するとき、 X が Y にデファイナブル C^r 微分同相であるという。

(5) デファイナブル C^r 多様体が、ある $\mathbb{R}^l$ のデファイナブル C^r 部分多様体にデファイナブル C^r 微分同相のときアフィンという。

(6) $\mathbb{R}^n$ の境界を持つデファイナブル C^r 部分多様体や境界を持つデファイナブル C^r 多様体も同様に定義できる。

定義 2.2. $0 \leq r \leq \omega$ とする。

(1) 群 G がデファイナブル C^r 多様体 (アフィンデファイナブル C^r 多様体) で群作用 $G \times G \rightarrow G$ 、逆元 $G \rightarrow G$ がデファイナブル C^r 写像のときに、 G をデファイナブル C^r 群 (アフィンデファイナブル C^r 群) という。

G を C^r デファイナブル群とする。

(2) G の表現写像とは、 G から $O_n(\mathbb{R})$ への群準同型写像でデファイナブル C^r 写像のことである。 G の表現とは表現写像 $G \rightarrow O_n(\mathbb{R})$ によって誘導される線形作用を持つ $\mathbb{R}^n$ のことである。

(3) デファイナブル $C^r G$ -多様体とは、デファイナブル C^r 多様体 X と G の X への群作用 θ で $\theta: G \times X \rightarrow X$ がデファイナブル C^r 写像であるような、組 (X, θ) である。

(4) デファイナブル $C^r G$ -多様体 X のデファイナブル C^r 部分多様体は、 G -不変のときに X のデファイナブル $C^r G$ -部分多様体という。

(5) デファイナブル $C^r G$ -写像、デファイナブル $C^r G$ -微分同相写像、デファイナブル $C^r G$ -同相写像、アフィ

ンデファイナブル C^rG -多様体も同様に定義できる。

命題 2.2([4]). $n = \infty$ 、または、 ω として、 G をコンパクトデファイナブル C^n 群とする。

(1) G の表現 Ω の、任意のデファイナブル C^nG -部分多様体 X は、 Ω で X のデファイナブル C^nG -チューブ型近傍 (U, r) を持つ。

(2) 境界を持つ任意のコンパクトアフィンデファイナブル C^nG -多様体 X はデファイナブル C^nG -カラー近傍を持つ。すなわち、デファイナブル C^nG -埋め込み $\phi: \partial X \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在し、 $\phi|_{\partial X \times \{0\}} = id_{\partial X}$, を満たす。

$\mathcal{M}$ を $\mathbf{R}_{exp} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, e^x)$ の exponential α -minimal expansion とする。

定理 2.3([5]). G をコンパクトデファイナブル C^∞ 群、 X をコンパクトアフィンデファイナブル $C^\infty G$ -多様体とする。 A, B が G -不変で共通部分を持たないデファイナブルな X の閉部分集合と仮定すると、 G -不変なデファイナブル C^∞ -関数 $f: X \rightarrow \mathcal{R}$ で $f|_A = 1, f|_B = 0$ を満たすものが存在する。

3. 同変 s -コボルディズム定理のデファイナブルカテゴリーへの拡張

デファイナブルカテゴリーへ拡張するために必要な命題をいくつか述べる。

G をコンパクト Lie 群、 $0 \leq r \leq \omega$ とする。 f を C^rG -多様体 X から G の表現 Ω への写像とする。 G の Haar measure を dg 、 X から Ω への C^r 写像空間を $C^r(X, \Omega)$ であらわす。

平均化作用素 $A: C^r(X, \Omega) \rightarrow C^r(X, \Omega)$ を

$$A(f)(x) = \int_G g^{-1} f(gx) dg$$

で定義する。

命題 3.1([4]). G をコンパクトデファイナブル C^∞ 群とする。

- (1) $A(f)$ は同変である。また、 f が同変ならば $A(f) = f$ である。
- (2) $0 \leq r \leq \infty$ 、 $f \in C^r(X, \Omega)$ とすると、 $A(f) \in C^r(X, \Omega)$ が成り立つ。
- (3) f が多項式ならば、 $A(f)$ も多項式である。
- (4) X がコンパクトで $0 \leq r \leq \infty$ とすると、 $A: C^r(X, \Omega) \rightarrow C^r(X, \Omega)$ は C^r 位相で連続である。
- (5) G が有限群、 $0 \leq r \leq \omega$ 、 X がデファイナブル C^rG -多様体で f がデファイナブル C^r 写像とすると、 $A(f)$ はデファイナブル C^rG -写像である。

M, N を C^r 多様体とする。 M から N への C^r 写像の集合を $C^r(M, N)$ 、 C^r 微分同相写像の集合を $Diff^r(M, N)$ とする。

定理 3.2([3]). $1 \leq r \leq \omega$ とする。 M, N を境界を持たない C^r 多様体とすると、 $Diff^r(M, N)$ は $C^r(M, N)$ で開集合となる。

系 3.3([3]). $1 \leq r \leq \omega$ とする。 M, N を境界を持つ C^r 多様体とすると、 $Diff^r(M, N)$ は $C^r(M, \partial M; N, \partial N) = \{f \in C^r(M, N) | f(\partial M) \subset \partial N\}$ で開集合となる。

以下で、同変コボルディズム定理のデファイナブルカテゴリーへの拡張について述べる。

通常の場合と同様にのデファイナブルカテゴリーでコボルディズムを定義する。

G をコンパクトなデファイナブル C^∞ 群、 W を $\partial W = M \sqcup N$ を満たすコンパクトなデファイナブル $C^\infty G$ -多様体とする。包含写像 $i_M : M \rightarrow W$, $i_N : N \rightarrow W$ が (デファイナブル) G -ホモトピー同値写像のとき、3つ組 $(W; M, N)$ をデファイナブル $C^\infty G$ - h -コボルディズムという。さらに、デファイナブル $C^\infty G$ - h -コボルディズム $(W; M, N)$ が $\tau_G(i_M) = 0 \in Wh_G(M)$ のときに、 $(W; M, N)$ をデファイナブル $C^\infty G$ - s -コボルディズムという。

定理 3.4(同変デファイナブル s -コボルディズム定理). $\mathcal{M}$ を exponential α -minimal expansion とし、 G をコンパクトなデファイナブル C^∞ 群、 $(W; M, N)$ をデファイナブル $C^\infty G$ - s -コボルディズムとする。 W がアフィンで、次元の条件 (*1) と (*2) を満たすすると、デファイナブル $C^\infty G$ -微分同相

$$W \cong_{def, G} M \times I \text{ rel. } M$$

が成り立つ。

特に、 M は N に $C^\infty G$ -微分同相である。

証明. $\tau_G(i_M) = 0 \in Wh_G(M)$ なので、定理 1.1 より、 $C^\infty G$ -微分同相

$$W \cong_G M \times I \text{ rel. } M$$

$$M \cong_G N.$$

が成り立つ。上についての $C^\infty G$ -微分同相写像を $f : M \times I \rightarrow W$ とすると、 f の $M \times \{0\}$ への制限写像 $f|_{M \times \{0\}} : M \times \{0\} \rightarrow M$ は、 $M \times \{0\}$ と M を同一視することで、恒等写像である。したがって、 $f|_{M \times \{0\}}$ はデファイナブル $C^\infty G$ -同相写像となる。

次に f の $M \times \{1\}$ への制限写像 $f|_{M \times \{1\}} : M \times \{1\} \rightarrow N$ を考える。ここで、デファイナブル $C^\infty G$ -部分多様体として N を含む群 G の表現を Ω として、 $f|_{M \times \{1\}} : M \times \{1\} \rightarrow \Omega$ とみなす。 $\mathcal{M}$ が exponential α -minimal expansion で G がコンパクトなので、定理 2.1 より Ω の中で N のデファイナブル $C^\infty G$ -チューブ型近傍 U_N が存在し、デファイナブル $C^\infty G$ -レトラクション $r_N : U_N \rightarrow N$ が存在する。 $f|_{M \times \{1\}}$ に多項式近似定理を適用して、 $f|_{M \times \{1\}}$ の C^r -近似写像として多項式写像 $h_N : M \times \{1\} \rightarrow \Omega$ を得る。命題 3.1 より h_N を A で平均化することにより、 h_N を多項式 G -写像と仮定することができる。この近似を十分に近くすることで、 h_N の像が U_N に含まれるようにできる。よって、 $r_N \circ h_N$ はデファイナブル $C^\infty G$ -写像で、 $f|_{M \times 1}$ の C^r -近似写像である。逆関数定理より、デファイナブル写像 $(r_N \circ h_N)^{-1}$ は $C^\infty G$ -写像であるので、 $r_N \circ h_N$ はデファイナブル $C^\infty G$ -同相写像である。

また、ある十分に小さい ε に対して、 $M \times (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ のデファイナブル $C^\infty G$ -チューブ型近傍 U 、デファイナブル $C^\infty G$ -レトラクション $r : U \rightarrow M \times (\varepsilon, 1 - \varepsilon)$ が存在し、 $f|_{M \times (\varepsilon, 1 - \varepsilon)}$ の多項式近似写像 h を平均化することで多項式 G -写像 h が得られる。こうして、上と同様に、 $f|_{M \times (\varepsilon, 1 - \varepsilon)} : M \times (\varepsilon, 1 - \varepsilon) \rightarrow W \setminus (M \sqcup N)$ の C^r -近似写像として、デファイナブル $C^\infty G$ -写像 $r \circ h : M \times (\varepsilon, 1 - \varepsilon) \rightarrow W \setminus (M \sqcup N)$ を得ることができる。

$\mathcal{M}$ が exponential α -minimal expansion で W がコンパクトでアフィンであるので、定理 2.2 より、 $k|[0, \frac{\varepsilon}{3}] = 1$ と $k|[\frac{2}{3}\varepsilon, \varepsilon] = 0$ を満たす $k : [0, \varepsilon] \rightarrow I$ 、また、 $l|[1 - \varepsilon, 1 - \frac{2}{3}\varepsilon] = 1$ と $l|[1 - \frac{\varepsilon}{3}, 1] = 0$ を満たす

$l : [1 - \varepsilon, 1] \rightarrow I$ が存在する。写像 $F : M \times 1 \rightarrow N$ を

$$F(x, t) = \begin{cases} r \circ (k(t)(f|_{M \times 0}(x, 0)) + (1 - k(t))(r \circ h(x, t))) & , (x, t) \in M \times [0, \varepsilon] \\ r \circ (h(x, t)) & , (x, t) \in M \times [\frac{2}{3}\varepsilon, 1 - \frac{2}{3}\varepsilon] \\ r \circ (l(t)(r \circ h(x, t)) + (1 - l(t))(r_N \circ h_N(x, 1))) & , (x, t) \in M \times [1 - \varepsilon, 1] \end{cases}$$

で定義する。 F は f の近似写像でデファイナブル $C^\infty G$ -写像で、 $M \times I$ の境界を W の境界に写すので、系 3.3 より F は微分同相写像となる。 F はデファイナブル $C^\infty G$ -写像なので、 F は M に制限すると恒等的なデファイナブル $C^\infty G$ -同相写像である。 $\square$

参考文献

- [1] S.Araki, K.Kawakubo, *Equivariant s-cobordism theorems*, J.Math.Soc.Japan 40, No.2 (1988), 349-367
- [2] K.H.Dovermann, M.Masuda, T.Petrie, *Fixed point free algebraic actions on varieties diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$* , Progr. math. 80 (1990), 49-80
- [3] M.W.Hirsch, *Differential Topology*, Grad. Texts in Math. 33 (1976), Springer
- [4] T.Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. 123 (2002), 323-349
- [5] T.Kawakami, *Relative properties of definable C^∞ manifolds with finite abelian group actions in an o-minimal expansion of R_{exp}* , Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 59 (2009), 21-27