

Gevrey class での Fuchs 双曲型方程式 (2)

(Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes (2))

上智大理工 田原 秀敏 (Hidetoshi Tahara)

論文[2]の中で、報告者は或る一群の Fuchs 双曲型作用素 P に対して次をみたす様な指数 $\sigma (\geq 1)$ を求めました:

もしも s が $1 < s < \sigma/(\sigma-1)$ をみたすならば $C^\infty([0,T], E^{\{s\}}(\mathbb{R}^n))$ 又は $C^\infty((0,T), E^{\{s\}}(\mathbb{R}^n))$ の中で $Pu=f$ がうまく扱かえる.

ここでは、小松先生によって提起された次の問題を考えてみたいと思います.

問題: $s=\sigma/(\sigma-1)$ の所はどうなっているのか?

一般的な場合の結果は後の英文部分で述べることにして、ここでは

$$\begin{aligned} P = & (t\partial_t)^2 - t^{2\kappa_1} \partial_{x_1}^2 - t^{2\kappa_2} \partial_{x_2}^2 + a(t,x)(t\partial_t) \\ & + t^{\ell_1} b_1(t,x) \partial_{x_1} + t^{\ell_2} b_2(t,x) \partial_{x_2} + c(t,x) \end{aligned} \quad (1)$$

(但し, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$, $2\kappa_1, 2\kappa_2, \ell_1, \ell_2 \in \{1, 2, \dots\}$ とする) という例について少し解説しておきます.

§1. 既知の結果

P を(1)の作用素とすると、 P は[2]で扱われた作用素の典型的な例であり、 P に対する指数 σ は

$$\sigma = \max \left\{ 1, \frac{2\kappa_1 - \ell_1}{\kappa_1}, \frac{2\kappa_2 - \ell_2}{\kappa_2} \right\}$$

で与えられます. $\rho^2 + a(0, x)\rho + c(0, x) = 0$ の根を $\rho_1(x), \rho_2(x)$ とおきますと, 論文[1][2]の結果より次が得られます.

定理 1 ([1]). P を(1)の作用素とし

- (1) $\rho_1(x), \rho_2(x) \notin \{0, 1, 2, \dots\}$,
- (2) $\sigma = 1$,
- (3) $a(t, x), b_1(t, x), b_2(t, x), c(t, x) \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$

を仮定する. この時, $Pu = f$ は $C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ の中で一意可解である.

定理 2 ([2]). P を(1)の作用素とし

- (1) $\rho_1(x), \rho_2(x) \notin \{0, 1, 2, \dots\}$,
- (2) $1 < s < \sigma/(\sigma-1)$,
- (3) $a(t, x), b_1(t, x), b_2(t, x), c(t, x) \in C^\infty([0, T], E^{\{s\}}(\mathbb{R}^2))$

を仮定する. この時, $Pu = f$ は $C^\infty([0, T], E^{\{s\}}(\mathbb{R}^2))$ の中で一意可解である. (但し, $E^{\{s\}}$ は帰納的なGevrey族関数の空間とする.)

そして, いま考えたい問題は次のとおりです.

$s = \sigma/(\sigma-1)$ の所はどうなっているのか?

§ 2. 観察

$s = \sigma/(\sigma-1)$ の所の様子を必要条件の方から観察してみることになります. 但し, Fuchs型作用素に対する必要条件の研究は殆どありませんのでここでは, P に対応する次の非特性的な双曲型作用素

$$L = \partial_t^{2\nu_1} - t^{2\nu_1} \partial_{x_1}^2 - t^{2\nu_2} \partial_{x_2}^2 + a(t, x) \partial_t \\ + t^{p_1} b_1(t, x) \partial_{x_1} + t^{p_2} b_2(t, x) \partial_{x_2} + c(t, x)$$

(但し, $2\nu_1, 2\nu_2, p_1, p_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $b_1(0, x) \neq 0$, $b_2(0, x) \neq 0$ とする) に対する必要条件で代用することになります.

L と P の関係は $P = t^2 L$ ということなので, 従って $\kappa_i = \nu_i + 1$, $\ell_i = p_i + 2$

となり, L に対する指数 σ_L は

$$\sigma_L = \max \left\{ 1, \frac{2\nu_1 - p_1}{\nu_1 + 1}, \frac{2\nu_2 - p_2}{\nu_2 + 1} \right\}$$

で与えられます. いま, L の係数が解析的であると仮定しておきますと Ivrii の条件 ([3]) を適用することができて次が得られます.

命題 L に対するコーシー問題

$$(E) \quad Lu = f, \quad u|_{t=0} = \varphi, \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi$$

に対して次が得られる.

- 1) (E) は $E^{\{s\}}$ -well-posed $\implies 1 < s < \sigma/(\sigma-1)$.
- 2) (E) は locally- $E^{\{s\}}$ -well-posed $\implies 1 < s < \sigma/(\sigma-1)$.
- 3) (E) は $E^{(s)}$ -well-posed $\implies 1 < s \leq \sigma/(\sigma-1)$.

(但し, $\sigma = \sigma_L$, $E^{(s)}$ は射影的な Gevrey 族関数の空間とする.)

上の命題より,

$s = \sigma/(\sigma-1)$ が扱えそうなのは, 方程式を

射影的な $E^{(s)}$ の中で考えたときに限る

ということがわかります.

注意 多重度一定など多くの場合は " $s = \sigma/(\sigma-1)$ の時でも local には $E^{\{s\}}$ の中で解ける" となっているのですが, 今の場合は
" $s = \sigma/(\sigma-1)$ の時は $E^{\{s\}}$ では local にも解けない" となっています.
 この点が, かなり誤解されているようです.

§ 3. 結果

というわけで, $s = \sigma/(\sigma-1)$ を扱おうとするならば $E^{\{s\}}$ を放棄して $E^{(s)}$ の方で考えざるをえません. 次がこの報告の基本結果です.

定理 3. P を (1) の作用素とし

- (1) $\rho_1(x), \rho_2(x) \notin \{0, 1, 2, \dots\}$,
- (2) $1 < s \leq \sigma/(\sigma-1)$,

$$(3) \ a(t,x), b_1(t,x), b_2(t,x), c(t,x) \in C^\infty([0,T], E^{(s)}(\mathbb{R}^2))$$

を仮定する. この時, $Pu=f$ は $C^\infty([0,T], E^{(s)}(\mathbb{R}^2))$ の中で一意可解である.

文献表

- [1] H. Tahara : Singular hyperbolic systems, III. On the Cauchy problem for Fuchsian hyperbolic partial differential equation J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math., 27 (1980), 465-507.
- [2] H. Tahara : Singular hyperbolic systems, VI. Asymptotic analysis for Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes. J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 551-580.
- [3] V. Ja. Ivrii : Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey classes. Sibirsk. Mat. Zh., 17 (1976), 1256-1270.

Fuchsian hyperbolic equations in Gevrey classes (2)

H. Tahara

Department of Mathematics
Sophia University
Tokyo, 102 Japan

Let us consider

$$P = (t\partial_t)^m + \sum_{\substack{j+|\alpha| \leq m \\ j < m}} t^{\ell(j,\alpha)} a_{j,\alpha}(t,x) (t\partial_t)^j \partial_x^\alpha,$$

where $(t,x) = (t, x_1, \dots, x_n) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ ($T > 0$), $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $m \in \mathbb{N}$ ($= \{1, 2, \dots\}$), $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ ($= \{0, 1, 2, \dots\}^n$).

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ and $\partial_x^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$. Assume the following conditions.

$$(A_\kappa) \quad \ell(j, \alpha) \in \mathbb{Z}_+ \quad (j + |\alpha| \leq m \text{ and } j < m) \text{ satisfy}$$

$$\begin{cases} \ell(j, \alpha) = \kappa_1 \alpha_1 + \dots + \kappa_n \alpha_n, & \text{when } j + |\alpha| = m \text{ and } j < m, \\ \ell(j, \alpha) > 0, & \text{when } j + |\alpha| < m \text{ and } |\alpha| > 0, \\ \ell(j, \alpha) \geq 0, & \text{when } j + |\alpha| < m \text{ and } |\alpha| = 0 \end{cases}$$

for some $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{N}^n$.

(B) All the roots $\lambda_i(t, x, \xi)$ ($i=1, \dots, m$) of

$$\lambda^m + \sum_{\substack{j+|\alpha|=m \\ j < m}} a_{j, \alpha}(t, x) \lambda^j \xi^\alpha = 0$$

are real, simple and bounded on $\{(t, x, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; |\xi| = 1\}$.

Then, P is a typical model of Fuchsian hyperbolic operators in t . The characteristic exponents $\rho_1(x), \dots, \rho_m(x)$ of P are defined by the roots of

$$\rho^m + \sum_{j < m} a_j(x) \rho^j = 0,$$

where $a_j(x) = [t^{\ell(j, (0, \dots, 0))} a_{j, (0, \dots, 0)}(t, x)]|_{t=0}$ ($j < m$).

Under (A_κ) and (B), we define indices σ (≥ 1) and $\sigma_{j, \alpha}$ (≥ 1) by

$$\sigma_{j, \alpha} = \max \left[1, \min_{\tau \in S_n} \left(\max_{1 \leq r \leq n} M_{j, \alpha}(\tau, r) \right) \right],$$

$$\sigma = \max_{\substack{j+|\alpha| < m \\ |\alpha| > 0}} \{ \sigma_{j, \alpha} \},$$

where S_n is the permutation group of n -numbers and

$$M_{j, \alpha}(\tau, r) = \frac{\sum_{i=1}^r (\kappa_{\tau(i)} - \kappa_{\tau(r)}) \alpha_{\tau(i)} + (m-j) \kappa_{\tau(r)} - \ell(j, \alpha)}{(m-j-|\alpha|) \kappa_{\tau(r)}}.$$

Then, for P satisfying (A_κ) and (B) we define Δ_P by

$$\Delta_P = \{(j, \alpha); \sigma_{j, \alpha} = \sigma\}.$$

For $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{N}^n$ and $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, we denote by $S_\kappa(\alpha)$ the set of all $\ell \in \mathbb{R}$ satisfying the following (i) and (ii):
 (i) $0 < \ell < \kappa_1 \alpha_1 + \dots + \kappa_n \alpha_n$, and (ii) there are $\tau \in S_n$ and $p \in \{1, \dots, n-1\}$ such that

$$\begin{cases} \ell = \kappa_{\tau(1)} \alpha_{\tau(1)} + \dots + \kappa_{\tau(p)} \alpha_{\tau(p)}, \\ \{\kappa_{\tau(1)}, \dots, \kappa_{\tau(p)}\} \ll \{\kappa_{\tau(p+1)}, \dots, \kappa_{\tau(n)}\}. \end{cases}$$

Here, $\{a_1, \dots, a_p\} \ll \{b_1, \dots, b_q\}$ means that $a_i < b_j$ for any i and j . Then, for P satisfying (A_κ) and (B) we define S_P by

$$S_P = \{(j, \alpha); \ell(j, \alpha) \in S_\kappa(\alpha)\}.$$

By $E^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ we denote the set of all functions $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfying the following: for any $h > 0$ and any compact subset K of $\mathbb{R}^n$ there is a $C > 0$ such that

$$\sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha f(x)| \leq C h^{|\alpha|} (|\alpha|!)^s \quad \text{for any } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

and by $C^\infty([0, T], E^{(s)}(\mathbb{R}^n))$ we denote the set of all infinitely differentiable functions on $[0, T]$ with values in $E^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ equipped with the usual Frechet topology.

In addition to (A_κ) and (B), assume the following:

(C) s satisfies (C-i) or (C-ii):

(C-i) $1 < s < (\sigma/(\sigma-1))$.

(C-ii) $s = (\sigma/(\sigma-1))$ and $\Delta_P \cap S_P = \emptyset$.

(D) $a_{j, \alpha}(t, x) \in C^\infty([0, T], E^{(s)}(\mathbb{R}^n))$ ($j + |\alpha| \leq m$ and $j < m$).

Then, we have the following theorem.

THEOREM. Let P be as above. Assume that (A_κ) , (B), (C), (D) hold and that $\rho_i(x) \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ holds for any $x \in \mathbb{R}^n$ and $1 \leq i \leq m$.

Then, the equation $Pu=f$ is uniquely solvable in
 $C^\infty([0,T],E^{(s)}(\mathbb{R}^n))$. Moreover, the solution has a dependence
domain.