

開放系の作用素代数による一考察

東京理科大学 大矢雅則

平衡状態にある有限系が、平衡状態にある無限系（熱浴）に結合している場合、その系が平衡へ近接するための条件を、系の Hamiltonian のスペクトルとの関連の下で、 C^* -代数の方法によって調べてみる。

有限な力学系 S は、三つ組 $(\mathcal{A}^S, \mathcal{G}^S, \alpha_t^S)$ ($t \in \mathbb{R}$) で与えられ、無限な熱浴 R は、三つ組 $(\mathcal{A}^R, \mathcal{G}^R, \alpha_t^R)$ で与えられているとする。ここで、 $\mathcal{A}^S$ は可分の Hilbert Space $\mathcal{H}^S$ 上の有界線形作用素の全体であり ($B(\mathcal{H}^S)$ と表わす)、 $\mathcal{A}^R$ は無限自由度をもつ熱浴 R を記述する恒等元 I^R をもつ、 C^* -代数である。又、 $\mathcal{G}^S, \mathcal{G}^R$ をそれぞれ、 C^* -代数 $\mathcal{A}^S, \mathcal{A}^R$ 上の状態 (states) の集合とする。 α_t^S, α_t^R は系 S 及び R の時間発展を記述する、 $\mathcal{A}^S, \mathcal{A}^R$ の $*$ -自己同型群である。特に、 α_t^S は系 S の Hamiltonian H^S によって生成される。

$$\alpha_t^S(A) = e^{itH^S} A e^{-itH^S} \quad (\forall A \in \mathcal{A}^S)$$

ここで、カギ系をえがく三つ組 $(\mathcal{A}, \square, \alpha_t)$ に関して、
簡単に復習しておこう。

$\mathcal{A}$ が C^* -代数 であるとは、

(i) $\mathcal{A}$ は代数 である。

(ii) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ の上への写像 $A \in \mathcal{A} \mapsto A^* \in \mathcal{A}$ が定義
されて、(a) $(A^*)^* = A$ (b) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$

(c) $(AB)^* = B^* A^*$ が満たされている。(ここで λ は
複素数 λ の共役数を表わし、 A, B は $\mathcal{A}$ の任意の元
である。)

(iii) $\mathcal{A}$ 上には norm $\|\cdot\|$ が定義されていて、その norm に
関して $\mathcal{A}$ は完備である。

(iv) 任意の $\mathcal{A}$ の元 A, B に対して、 $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

及び $\|A^* A\| = \|A\|^2$ が成立。

を満すものをいう。

$\varphi \in \square$ が $\mathcal{A}$ 上の状態 であるとは、

(i) φ は $\mathcal{A}$ から $\mathbb{C}$ 上への線形汎函数

(ii) $\varphi(A^* A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

(iii) $\varphi(I) = 1$ ($\mathcal{A}$ は恒等元 I を含むとしてある)

を満すものをいう。

特に、 $\varphi(A^* A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ であるとき、状態 φ は
忠実 (faithful) であるという。

最後に、 α_t ($t \in \mathbb{R}$) が $\mathcal{A}$ の $*$ -自己同型群であるとは、

$$(i) \quad \alpha_t(AB) = \alpha_t(A) \alpha_t(B) \in \mathcal{A} \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad \{\alpha_t \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ は群となる。}$$

$$(iii) \quad \alpha_t(A)^* = \alpha_t(A^*)$$

を満たすものという。

更に、 α_t が t に関して、強連続であるとは、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\alpha_t(A) - A\| = 0$$

のことであり、我々はこの性質を以下仮定しよう。

±2. 熱浴 R の平衡状態として、Kubo-Martin-Schwinger 条件を採用しよう。

忠実な状態 $\varphi^R \in \mathcal{Q}^R$ が、温度の逆数 $\beta (= 1/kT)$ で、時間発展 α_t^R に関して、K.M.S. 条件を満たすとは、 $\mathcal{A}$ の任意の要素 A, B に対して、開区間 $-\beta < \text{Im } z < 0$ で解析的、閉区間 $-\beta \leq \text{Im } z \leq 0$ で連続な複素数 z の有界関数 $F_{A,B}(z)$ が存在して、次の境界条件を満たすことをいう。

$$F_{A,B}(t) = \varphi(\alpha_t(A)B),$$

$$F_{A,B}(t-i\beta) = \varphi(B\alpha_t(A)).$$

K.M.S. 条件を満たす状態を、K.M.S. 状態とよび、これは Gibbs 状態の一般化であり、現在、物理系の平衡状態を記述していく上で最も自然なものと考えられている。

この状態 φ^R に対し 2. Gelfand - Naimark - Segal (G.N.S.) 構成定理により、四つ組 $(\mathcal{H}^R, \pi^R, \Xi^R, U_t^R)$ がユニタリ同値性を除いて一意に決定される。すなわち $\mathcal{H}^R$ は φ^R により構成された Hilbert space であり、 π^R は $\mathcal{A}^R$ から $B(\mathcal{H}^R)$ への表現であり、 Ξ^R は $\mathcal{H}^R$ の元で、 $\varphi^R(A) = \langle \Xi^R, \pi^R(A) \Xi^R \rangle$ 、 $\pi^R(\mathcal{A}^R)^- = \mathcal{H}^R$ を満たすものである。又、 U_t^R はユニタリ一群で、 $\pi^R(\alpha_t^R(A)) \Xi^R = U_t^R \pi^R(A) U_t^{R*} \Xi^R = U_t^R \pi^R(A) \Xi^R$ となる。Stone の定理によつて、自己共役作用素 H^R が存在して、 $U_t^R = \exp(itH^R)$ と表わせる。

今、系の S の任意の状態 $\phi^S \in \mathcal{G}^S$ を考え、 ϕ^S が α_t^S の下で不変で無い (i.e., $\phi^S(\alpha_t^S(A)) \neq \phi^S(A)$ for $\exists A \in \mathcal{A}^S$) 場合は、Schrödinger 方程式の解の不変性に対する不変性と、系の有限性より、 $\phi^S(\alpha_t^S(A))$ ($\forall A \in \mathcal{A}^S$) は t に関して、ほとんど周期的な函数である。従つて、 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \phi^S(\alpha_t^S(A))$ ($\forall A \in \mathcal{A}^S$) は存在しない。そこで、平衡への近接を議論するためには、熱浴からの影響を考慮しなければならなくなる。

S と R の初期 (non-interacting) の結合系は、次のように表わすことができる。

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^S \otimes \mathcal{A}^R$$

$$\phi = \phi^S \otimes \phi^R \quad (\forall \phi^S \in \mathcal{G}^S)$$

$$\alpha_t^0 = \alpha_t^S \otimes \alpha_t^R \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$\pi = i^S \otimes \pi^R \quad (i^S \text{ は } \mathcal{A}^S \text{ 上の恒等写像})$$

S と R との間の相互作用を $V = V^* \in \mathcal{A}$ で与えよう。

いわゆる摂動した、時間発展 α_t は一様収束する Dyson series で与えられる。 $t \geq 0$ のとき、

$$\alpha_t(A) = \sum_{n \geq 0} \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t} dt_1 \dots dt_n [\alpha_{t_1}^0(V), [\dots, [\alpha_{t_n}^0(V), \alpha_t^0(A)] \dots]]$$

$t < 0$ の場合は、上の積分領域で、 0 と t を交換すればよい。

$\lambda = 2$ 。問題は (i) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し、 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \phi(\alpha_t(A)) \equiv \psi(A)$ が存在し、 ψ が平衡状態となる条件を求めるときと、
(ii) ψ を $\mathcal{A}^S$ 上に制限したとき、 λ が R と同じ温度をもつ、 S の Hamiltonian H^S より作られる Gibbs state となる条件を求めるときである。

主たる結果は、

(R-1): Hamiltonian $H = H^S + H^R + \pi(V)$ のスペクトルが、

非縮退な固有値 $\{0\}$ と、絶対連続なスペクトルから

なっているとき、極限 $\psi(A) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \phi(\alpha_t(A))$ が存在

し、 ψ は熱浴 R の β で、 α_t に関して K.M.S. 条件を満たす。

(R-2) : (R-1) と同じ条件の下で.

$$\lim_{\|V\| \rightarrow 0} \lim_{\|t\| \rightarrow \infty} \phi(\alpha_t(A)) = \phi^S(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}^S$$

$$\therefore \tau, \quad \phi^S(A) = \tau e^{-\beta H^S} A / \tau e^{-\beta H^S} \quad \tau \text{ がある。}$$

以上の結果は、拙論 "On Open System Dynamics
— An Operator Algebraic Study —" (to be published)
において得られたものである。