

almost complex S^1 -action

東大・理 服部晶夫 (Akio Hattori)

以下において, X は compact connected almost complex S^1 -manifold, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ とし, 次の仮定を設ける.

(1) 不動点は全部孤立している. それらを $P_1, \dots, P_x$ とする (このとき, 必然的に, その個数 x は X の Euler 数と一致する).

(2) X 上の complex line bundle ξ と X 上への S^1 作用の持ち上げが存在し, 次の性質をみたす.

(i) ξ を standard S^1 -module として,

$$\xi|_{P_i} = t^{a_i}, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

と書くとき, $\{a_i\}$ は互いに異なる.

(ii) $x = c_1(\xi) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ として,

$$x^n[X] > 0$$

(このような ξ は quasi-ample であるという).

(3) $c_1(X) = k_0 x$, $k_0 > 0$ の形に書ける.

モデルは複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 上の線型作用であり, これに対し, hyperplane section bundle は quasi-ample になる. なお, 一般に $\chi = n+1$ のときは, (2) において, (i) が (ii) から導かれることに注意しておく.

以上の仮定の下に, まず次の定理が成り立つ.

定理 1 ([1]) $k_0 \leq n+1 \leq \chi$

この定理から, $k_0 = n+1$ および $n+1 = \chi$ の場合が, 次の研究の目標になる. 前者は, 複素多様体における小林-落合の定理に対応する場合である. 小林-落合の定理では, 可能な多様体は $\mathbb{C}P^n$ に限られるというのが結論であった. 後者, すなわち $n+1 = \chi$ とする典型的な多様体は $\mathbb{C}P^n$ である. したがって, いずれの場合も, 状況は $\mathbb{C}P^n$ 上の線型作用に近いものであると予想される. 以下, この方面での結果についていくつか触れてみたい.

TX を X の (複素)接バンドルとする. 各 i に対し, $TX|P_i$ は S^1 -module π^* から

$$TX|P_i = \sum_{k=1}^n t^{m_{ik}}, \quad m_{ik} (\neq 0) \in \mathbb{Z}$$

と書ける. $\{m_{ik}\}_{1 \leq k \leq n}$ を P_i のまわりの weights という.

これに対し, 次の等式が成り立つことが証明される.

$$(4) \quad \sum_k m_{ik} = \frac{k_0}{\chi} \sum_j (a_i - a_j)$$

各 i に対し

$$(5) \quad \varphi_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (1 - t^{a_j - a_i})}{\prod_k (1 - t^{m_{ik}})}$$

とおく。先の仮定の下に次の定理が成り立つ。

定理 2 ([1]) $\ell_0 = \chi - k_0$ とおく。次の性質 (i), (ii), (iii)

をみたすような

$$\gamma_0(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_{\ell_0}(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}] = R(S')$$

が存在する:

(i) 各 i に対し

$$\varphi_i(t) = \gamma_0(t) + \gamma_1(t)t^{a_1} + \dots + \gamma_{\ell_0}(t)t^{\ell_0 a_i}$$

$$(ii) \quad \gamma_{\ell_0 - s}(t) = (-1)^{\chi - (n+1)} \gamma_s(t^{-1}) t^{-\frac{\ell_0}{f} \sum a_j}$$

$$(iii) \quad p_i = \#\{k; m_{ik} > 0\}$$

$$p_q = \#\{i; p_i = q\}$$

とあくと

$$\gamma_0(t) = p_0 = p_n$$

注意 各 q に対し, $p_{n-q} = p_q$ が成り立つ。また, $p_0 = p_n$ は X の Todd genus $T[X]$ に等しい。特に, 上の仮定の下に,

$$T[X] \geq 0$$

である。また, すべての i に対し,

$$\varphi_i(1) = \chi^n[X]$$

が成り立つ。

定理1の最も極端な場合 $k_0 = n+1 = \chi$ においては, 定理2から

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(1) = x^n[X] = T[X]$$

でなければならないことがわかる。実は, もっと精密に, 次の定理が成り立つ。

定理3 ([1]) $k_0 = n+1 = \chi$ ならば, 各 i に対し,

$$\varphi_i(t) = 1 \quad \text{で,} \quad \{m_{ij}\} = \{a_i - a_j\}_{j \neq i}$$

である。

この定理の結論は, 各点のまわりの *weights* が $\mathbb{CP}^n$ 上の線型作用と同じ形であることを示している。その意味で, この定理は小林・落合の定理の変換群論での類似と考えられる。ただし, 小林・落合の定理では仮定は $k_0 = n+1$ だけであつた。定理3において, 仮定のうち $n+1 = \chi$ が不可欠であるかどうかは不明である。

一方, $\chi = n+1$ という仮定の下に, 次の予想が考えられる。

予想 先の仮定 (1), (2), (3) に, さらに

$$(1)' \quad \chi = n+1$$

$$(2) \quad (ii)' \quad x^n[X] = 1$$

$$(6) \quad T[X] \neq 0$$

を追加すると, $k_0 = n+1$ のみが起り得る。

この予想が正しければ, 定理3により, 各点のまわりでの

weights が完全に定まることになる。

この予想に関して、次の純代数的問題を提出したい。

問題 各 $i = 0, 1, \dots, n$ に対し、整数 a_i と 0 でない整数 $\{m_{ik}\}_{1 \leq k \leq n}$ が与えられ、 $\{a_i\}$ は互いに異なり、また、すべての i に対し等式 (4) が成り立つような整数 $k_0 > 0$ が存在するとする。更に、各 i に対し、 $\rho_i(t)$ を (5) によって定義すると、定理 2 の (i), (ii), (iii) をみたすような、 $r_0(t), r_1(t), \dots, r_{l_0}(t)$ が存在するとする。ただし、 $l_0 = n+1 - k_0$ 。

ここで、もし、 $\rho_i(1) = 1$ かつ $\rho_0 = \rho_n > 0$ ならば $k_0 = n+1$ (i.e. $l_0 = 0$) となるか？

注意 幾何学的には、 ρ_0 のまわりの weights $\{m_{ik}\}$ は、更に次の条件をみたすことが証明される。

(7) 各整数 m に対し

$$\#\{(i, k); m_{ik} = m\} = \#\{(i, k); m_{ik} = -m\}$$

(8) $\rho_2 = \rho_{n-2}$ で、かつ

$$\sum_i \prod_k \left(\frac{1}{1 - t^{m_{ik}}} - \lambda \right) = \sum_{q=0}^n \rho_q (1-\lambda)^2 (-\lambda)^{n-q}$$

したがって、上の問題でも、必要があれば、 $\{m_{ik}\}$ に対し上の条件 (7), (8) を追加してもよい。

上の予想は未解決であるが、 $n \leq 4$ までは正しいことが確かめられている [2]。その方法は $\mathbb{Z}/m \subset S'$ の不動点集合を

同時に考察するものであり、 $n=3$ のときでも相当複雑である。そのままの形で一般の n に拡張するのは困難が大き過ぎると思われる。その意味で、上の問題に対する ちゃんらかの形の解答が望まれる。

文献

- [1] A. Hattori, S^1 -actions on unitary manifolds and quasi-ample line bundles, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 31 (1985), 433-486
- [2] ———, Almost complex S^1 -actions on cohomology complex projective spaces, to appear in Proc. Transformation Groups Poznan 1985