

Prediction Theory に就いて

東北大 教養 大野 芳 希

Helson [5] 等によつて Prediction Theory 形の結果がいろいろと考えられてゐるが、ここでは Helson-Szegö [8] 形の問題を中心に Prediction Problems をいくつか紹介する。

§ 1. Prediction Problems

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の元 $\dots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \dots$ の process $\{X_n\}$ が stationary であるとは 任意の n, m に対して $(X_{n+m}, X_m) = (X_n, X_0)$ なることである。この場合 $\rho(n) = (X_n, X_0)$ は positive definite である。実際

$$\sum_{n,m=1}^r c_n \bar{c}_m \rho(n-m) = \sum_{n,m=1}^r c_n \bar{c}_m (X_n, X_m) = \left\| \sum_{n=1}^r c_n X_n \right\|^2 \geq 0$$

となる。従つて Herglotz-Bochner の定理 から $T = \{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}$ 上の正測度 μ が存在して

$$\rho(n) = \int e^{-inx} d\mu(x) \quad .$$

このとき $L^2(d\mu)$ の中に ある意味で $\mathcal{H}$ の process $\{X_n\}$ と同値な stationary process を与えることができる；

$$\tilde{X}_n = X^{-n} \quad (X(e^{ix}) = e^{ix})$$

とおけば 任意の n, m に対して

$$(\tilde{X}_n, \tilde{X}_m) = \int X^{-(n-m)} d\mu = \rho(n-m) = (X_n, X_m).$$

従って $\mathcal{H}$ に於ける process を調べるのに $L^2(d\mu)$ の process を研究するのが便利であることが多い。

S を 0 を含まない、整数の (任意の) 集合とする。このとき X_0 を $\{X_n; n \in S\}$ の元の 1 次結合で近似することを考える。

$$\|X_0 - \sum_S a_n X_n\|^2 = \int |1 - \sum_S a_n X^{-n}|^2 d\mu$$

だから X_0 を $\{X_n; n \in S\}$ の元の 1 次結合で近似する問題は上の式の右辺の積分を最小にすること、同値である。このような $L^2(d\mu)$ の三角多項式による近似の理論を (Kolmogoroff の意味での) Prediction といい、これに関連して $n \in \mathbb{Z}$ に対して次の様に定義する；

$\mathcal{F}_n$: $X^n, X^{n+1}, X^{n+2}, \dots$ で生成された $L^2(d\mu)$ の subsp.

$\mathcal{P}_n$: $X^n, X^{n-1}, X^{n-2}, \dots$ で生成された $L^2(d\mu)$ の subsp.

$\mathcal{F}_1$ を process の future, $\mathcal{P}_1$ を past という。また μ の、 T 上の normalized Lebesgue measure σ に関する Lebesgue

分解を $d\mu = w d\sigma + d\mu_s$ ($0 \leq w \in L^1(d\sigma)$) としておく.

1st Prediction Problem

普通の意味で Prediction と呼ばれるもので、上で $S = \{-1, -2, \dots\}$ とした場合に相当し、process で、1 と past との距離を求める問題になる。Szegő の定理で解が与えられることはよく知られている。

定理1 (Szegő の定理)

$$\inf \int |1-f|^2 d\mu = \exp \int \log w d\sigma.$$

此処で $\inf$ は次の形の三角多項式全体に就いてとられる；

$$f = a_1 \chi + a_2 \chi^2 + \dots + a_n \chi^n + \dots$$

2nd Prediction Problem

$S = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$ とした場合に相当し、process で、1 と、Past と future を含む最小の subsp. との間の距離を求める問題になる。解は次の Kolmogoroff の定理で与えられる。

定理2 (Kolmogoroff の定理)

$$\inf \int |1-(f+g)|^2 d\mu = \left(\int w^{-1} d\sigma \right)^{-1}.$$

此処で $\inf$ は次の形の三角多項式 f, g に就いてとられる；

$$f = a_1 \chi + a_2 \chi^2 + \dots + a_n \chi^n + \dots,$$

$$g = b_1 \chi^{-1} + b_2 \chi^{-2} + \dots + b_n \chi^{-n} + \dots.$$

上の2つの結果から w が 小さすぎなければ 即ち右辺が正なら, exponentials e^{inx} は $L^2(d\mu)$ で或る種の独立性を持ち, ていえると考えられる. この観点から Halson-Szegö [8] は次の定義をした.

定義 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ に対して

$$j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sup | \langle f, g \rangle |$$

とおく. 此処で $\sup$ は $f \in \mathcal{M}, \|f\| \leq 1, g \in \mathcal{N}, \|g\| \leq 1$ に就いてとる. 明らかに $0 \leq j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \leq 1$. 特に $j(\mathcal{M}, \mathcal{N}) < 1$ なるとき $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ は at positive angle であるという.

$$j_n = j(\mathcal{P}_0, \mathcal{F}_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

とおく.

3rd Prediction Problem (Helson-Szegö Problem).

$j_n < 1$ となる様な測度 μ を決定する問題で, 解は次の様になる.

定理3 $n = 1, 2, \dots$ とする. $j_n < 1$ なるための必要十分条件は μ が σ に関して絶対連続; $du = w d\sigma$ であって

$$w = |P|^2 e^{u + \tilde{v}}$$

と表わせることである. 此処で P は $\deg P < n$ なる多項式で, u, v は real & bounded. 且つ或る $\varepsilon > 0$ に対して $\|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\tilde{v}$ は v の conjugate function.

定理3の $n=1$ の場合は Halson-Szegö [8], $n>1$ の場合

は Helson-Sarason [7] による.

4th Prediction Problem

$n \rightarrow \infty$ のとき $p_n \rightarrow 0$ となる様な測度 μ を決定する問題で、答は次の Helson-Sarason の定理で与えられる.

定理 4 (Helson-Sarason [7]) $p_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なるための必要十分条件は μ が σ に関して絶対連続: $d\mu = w d\sigma$ で、

$$w = |P|^2 e^{u+\tilde{v}}$$

と表わせることである. 此処で P は多項式で、 $u, v \in C(T)$ $\tilde{v}$ は v の conjugate function.

§2. Uniform Algebras への拡張

X を compact Hausdorff 空間、 A を X 上の uniform algebra とし、 X 上の unique representing measure m を持つ様な A の complex homomorphism ϕ を固定する. ϕ により、決定される maximal ideal を A_0 とする.

Szegő の定理と Kolmogoroff の定理の uniform algebra への拡張として次の定理をうる.

X 上の正測度 μ の m に関する Lebesgue 分解を $d\mu = w dm + d\mu_s$ とする.

定理 4 (一般化された Kolmogoroff-Szegő-Krein の定理)

$$\inf_{f \in A_0} \int |1-f|^2 d\mu = \exp \int \log w dm$$

定理5 (一般化された Kolmogoroff の定理)

$$\inf_{f \in A_0 + A_c} \int |1-f|^2 d\mu = \left(\int w^{-1} d\mu \right)^{-1}$$

定理4は抽象的な Hardy 空間の理論の中で有名な結果である。定理4の証明とこれに関連した話題は Gamelin [4], Leinowitz [9] 等の本にみられる。また Szegő の定理の matrix valued function への拡張は Helson-Lowdenslager [6] 等にある。定理5の証明は Forelli [3] にある。

次に Helson-Szegő Problem 形の結果を考える。X 上の正測度 μ に対して

$$H^p(d\mu) = A \text{ の } L^p(d\mu)\text{-閉包} \quad (0 < p < \infty)$$

$$H_0^p(d\mu) = A_0 \text{ の } L^p(d\mu)\text{-閉包} \quad (0 < p < \infty)$$

と置く。($p = \infty$ のときは w^+ -閉包とする。)

$u \in \operatorname{Re} A$ に対して次の様な $v \in \operatorname{Re} A$ が一意に定まる；
 $\int v d\mu = 0$, $u + iv \in A$ 。この v を Cu で表わし、 u の conjugate という。線形作用素 $C: \operatorname{Re} A \rightarrow \operatorname{Re} A$ を conjugate operator という。線形性により、 C は、複素 vector 空間 $\operatorname{Re} A + i \operatorname{Re} A$ 上の線形作用素 C に拡張できる。 $P \in L^2(d\mu)$ から $H^2(d\mu)$ の上への射影とすれば

$$Pu = \frac{1}{2} [u + \int u d\mu + iCu] \quad (u \in \operatorname{Re} A)$$

が成り立つ。従って $C, P \in \operatorname{Re} A + i \operatorname{Re} A$ に制限したとき、 C

が $L^2(d\mu)$ -bounded であること、 P が $L^2(d\mu)$ -bounded であることは同値である。また次の命題が成り立つ[1]。

命題 6 $H^2(d\mu)$ と $\overline{H_0^2(d\mu)}$ が at positive angle である必要十分条件は P (或は C) を $\operatorname{Re} A + i\operatorname{Re} A$ に制限したとき、これが $L^2(d\mu)$ -bounded であることである。

従、て Halson-Szegő の問題は μ がどのようなときに次の様な定数 $B > 0$ が存在するか？と同値になる；

$$\int_X |cf|^2 d\mu \leq B \int |f|^2 d\mu \quad (\forall f \in \operatorname{Re} A)$$

$\mu = m$ に対して上の様な B が存在する (M. Riesz の定理)。従、て C は $L^2(dm)$ に拡張できる。以下に於いて μ は m に関して絶対連続であるとする； $d\mu = w dm$ ($0 \leq w \in L^1(dm)$)。

$H^2(w dm)$ と $\overline{H_0^2(w dm)}$ が at positive angle になる様な w を考えよう。このとき $\int \log w dm = -\infty$ なら Szegő の定理から $1 \in H^2(w dm) \cap \overline{H_0^2(w dm)}$ となり $H^2(w dm)$ と $\overline{H_0^2(w dm)}$ は at positive angle でなくなる。従、て $\int \log w dm > -\infty$ と仮定してよい。このとき $w = |f|^2$ となる様な $H^2(dm)$ の outer function f が存在する。

定理 7 $H^2(w dm)$ と $\overline{H_0^2(w dm)}$ が at positive angle である必要十分条件は $H^\infty(dm)$ の invertible element g が存在して $\| \operatorname{Arg} g f^2 \|_\infty < \frac{\pi}{2}$ となることである。 ($-\pi \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi$)

定理 8 $H^2(w dm)$ と $\overline{H_0^2(w dm)}$ が at positive angle であ

3 必要十分条件は

$$w = e^{u+iv}$$

と表わせることである。此処で $u, v \in L^\infty_R(dm)$ で、或る $\varepsilon > 0$ に対して $\|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

$$w = |f|^2 \bar{f} \text{ から } w = f^2 e^{-i\varphi} \text{ とおけば}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(H^2(wdm), \bar{H}_0^2(wdm)) \\ &= \sup_{g, h} \left| \int (gf)(h\bar{f}) e^{-i\varphi} dm \right| \quad \left(\begin{array}{l} g \in A, \int |g|^2 d\mu \leq 1 \\ h \in A_0, \int |h|^2 d\mu \leq 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

f : outer $\bar{f}$ から $\{gf; g \in A\}, \{h\bar{f}; h \in A_0\}$ は夫々 $H^2(dm)$,

$H_0^2(wdm)$ で $L^2(dm)$ -dense. 従って $\{ghf^2; g \in A, h \in A_0,$

$\int |g|^2 d\mu, \int |h|^2 d\mu \leq 1\}$ は $H_0^1(dm)$ の単位球で稠密となり

$$\rho = \sup_h \left| \int h e^{-i\varphi} dm \right| \quad (h \in H_0^1(dm), \int |h| dm \leq 1)$$

と表わせる。故に ρ は $H_0^1(dm)$ 上の線形汎函数 $h \mapsto \int h e^{-i\varphi} dm$

の norm である。この汎函数の $L^1(dm)$ 上への拡張は $h \mapsto$

$\int h(e^{-i\varphi} - g) dm \quad (g \in H^\infty(dm))$ の形で、従って Hahn-

Banach の定理から

$$(*) \quad \rho = \inf_g \|g - e^{-i\varphi}\|_\infty \quad (g \in H^\infty(dm))$$

こゝで一般に次の主張が成り立つことを用いる。

$$(I) \quad f \in H^1(dm) \quad \operatorname{Re} f \geq 0 \Rightarrow f: \text{outer}$$

$$(II) \quad f \in H^1(dm) \quad \operatorname{Re} f \geq 0 \Rightarrow C \operatorname{Arg} f = -\log |f| + \log |\hat{f}(\phi)|.$$

さて $\rho < 1$ とすれば (*) から $\exists \varepsilon > 0, \exists g \in H^\infty(dm)$:

$$|g(x)| \geq \varepsilon, \quad |\varphi(x) + \operatorname{Arg} g(x)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{on } X$$

逆に w が定理 8 の表現を持, τ とする. e^{-u} は bounded away from 0 τ から $P: L^2(dm) \rightarrow H^2(dm)$ は $L^2(wdm)$ -norm; $L^2(e^{-u}wdm)$ -norm τ 同時に bounded τ あるか unbounded τ ある. 故に命題 6 から $[H^2(wdm), \bar{H}_0^2(wdm); \text{ at positive angle} \Leftrightarrow H^2(e^{-u}wdm), \bar{H}_0^2(e^{-u}wdm); \text{ at positive angle}]$. 従, τ $H^2(wdm), \bar{H}_0^2(wdm)$ が "at positive angle" τ あることを示すためには $u \equiv 0$ としてよい. このとき $V = e^{Cv - iv}$ とおけば $V \in H^1(dm)$; outer τ $w = |V|$; $w = Ve^{iv}$. $\|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ だから $0 < \lambda < 1$ を十分小さくし, τ おけば $\|e^{iv} - \lambda\|_\infty < 1$. このとき

$$\begin{aligned} f &= \sup_{f,g} \left| \int fg T e^{iv} dm \right| && \left(\begin{array}{l} f \in A \\ g \in A_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \int |f|^2 d\mu \leq 1 \\ \int |g|^2 d\mu \leq 1 \end{array} \right) \\ &\leq \sup_h \left| \int h e^{iv} dm \right| && (h \in H_c^1(dm), \int |h| dm \leq 1) \\ &\leq \sup \left| \int h (e^{iv} - \lambda) dm \right| && (" " ") \\ &\leq \|e^{iv} - \lambda\|_\infty < 1 && ("") \end{aligned}$$

命題6 ~ 定理8 は Devinatz [1, 2], Ohno [12] による. また conjugate operator に就いては Rudin [13], Devinatz [2] に詳しく. 定理8 の応用としては次の様な結果が考えられる (Devinatz [1] の結果).

✧ $\theta = \bar{\psi}/\psi$ ($\psi, \psi^{-1} \in H^2(dm)$), $w = |\psi|^2$ とする. このとき Toeplitz operator T_θ が invertible である必要十分条件は $H^2(wdm)$, $\bar{H}_0^2(wdm)$ が at positive angle であることである.

✧ ϕ : 有界可測とする. T_ϕ が invertible である必要十分条件は $\phi = \gamma e^{u+iv+cw}$ と表わせることである. 此処で $u, v, w \in L_R^\infty$, $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$, $\gamma; |\gamma|=1$ なる定数.

また定理3, 定理4に関連して

$$f_n = f(H^\infty(d\mu), \{H_0^\infty(d\mu)\}^n)$$

と書いたときの $f_n < 1$ ($n > 1$) なるための条件, $f_n \rightarrow 0$ なるための条件が考えられるが 詳しくことは分らない.

次に Merrill [10] によつて与えられた Helson-Szegö の問題の形の結果を紹介する. 以下に於いては m を含む Gleason part $P(m)$ は non-trivial であるとする;

$$P(m) = \{ \sigma \in \mathcal{M}(A) : \|\sigma - m\| < 2 \} \neq \{m\}$$

(m は ϕ の unique representing measure であつた.)

$1 \leq p \leq \infty$ に対して次の様におく.

$$I^P = \{ f \in H^P(dm); \int f d\sigma = 0 \ (\forall \sigma \in P(m)) \}$$

$$\mathcal{L}^P = \{ f \in L^P(dm); \int f h dm = 0 \ (\forall h \in I^\infty \cup \bar{I}^\infty) \}$$

$$J^P = \mathcal{L}^P \oplus I^P$$

$P(m)$ を単位円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 上にうつす Wermer の imbedding function を Z とすれば $f \in H^P(dm)$ に対して $[f \in I^P \Leftrightarrow \int \bar{Z}^n f dm = 0 \ (n=0, 1, 2, \dots)]$ で、 $Z, \bar{Z}$ の多項式全体の $L^P(dm)$ - 閉包が $\mathcal{L}^P$ と一致する。 $I^P, \mathcal{L}^P, J^P$ の基本的な性質は Merrill-Lal [11] に詳し 11.

X 上の正測度 μ は m に関して絶対連続である; $d\mu = w dm$ ($0 \leq w \in L^1(dm)$) とし、 w の support set を E とする。

定理 9 (Merrill, III [10]) I^∞ と J^∞ が $L^2(w dm)$ で at positive angle であるための必要十分条件は $\chi_E \in \mathcal{L}^\infty$ で、

$$w = |V| e^u$$

と表わせることである。此処で $u \in L_R^\infty$, $V \in J^1$, $\| \text{Arg } T^- \|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) .

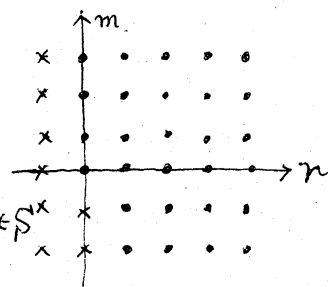
証明は定理 8 の証明と同様で、outer function と類似の性質を持つ $D \in J^2$ を $w = |D|^2$ とする様にとればよい。

定理 9 の 1 つの例で考えておく。

$$S = \{(n, m); n > 0\} \cup \{(0, m); m \geq 0\}$$

なる格子点の集合を考え、 $\{e^{in\theta} e^{im\varphi}\}_{(n,m) \in S}$

の多項式で一様近似できる様な $f \in C(T^2)$



全体の集合を $A(T^2)$ とする. $A(T^2)$ は T^2 上の legmodular algebra である. normalized Haar measure m を含む part は $\{(0, \varphi); |\varphi| < 1\}$ で non-trivial. Wermer の imbedding function は $Z = e^{i\varphi}$ だから

$I^\infty = \{ e^{-in\theta} e^{im\varphi} (n \geq 1) \text{ の多項式} \}$ の w^* -閉包.

$\mathcal{L}^\infty = \{ e^{im\varphi} (m \in \mathbb{Z}) \text{ の多項式} \}$ の w^* -閉包.

$\bar{J}^\infty = \{ e^{-in\theta} e^{im\varphi} (n < 0, m \in \mathbb{Z}) \text{ の多項式} \}$ の w^* -閉包.

となる. 定理 9 から T^2 上の正測度 μ が m に関して絶対連続なとき $L^2(d\mu)$ の doubly stochastic process $\{ e^{-in\theta} e^{im\varphi} \}$ の past: $\{ e^{-in\theta} e^{im\varphi}; n < 0, m \in \mathbb{Z} \}$ で生成された subsp. と future: $\{ e^{-in\theta} e^{im\varphi}; n \geq 0, m \in \mathbb{Z} \}$ で生成された subsp. が at positive angle になるための必要十分条件が分る.

文 献

- [1] Devinatz, A. Toeplitz operators on H^2 space.
Trans. A.M.S., 112 (1964) 304-317
- [2] Devinatz, A. Conjugate function theorems for Dirichlet algebras. Rev. U. Mat. Argentina, 23
(1966/67) 3-30.
- [3] Forelli, F. The Marcel Riesz theorem on Conjugate functions. Trans. A.M.S., 106 (1963) 369-390.

- [4] Gamelin, T.W. Uniform Algebras. Prentice-Hall 1969.
- [5] Helson, H. Méthodes complexes et méthodes de Hilbert en analyse de Fourier. Orsay, 1967.
- [6] Helson, H. & Lowdenslager, D. Prediction theory and Fourier series in several variables, I, II. Acta Math., 99 (1958), 165-202, 106 (1961), 173-213.
- [7] Helson, H. & Sarason, D. Past and Future. Math. Scand. 2/ (1967), 5-16.
- [8] Helson, H. & Szegö, G. A problem in prediction theory. Ann. Mat. Pura Appl. 51 (1960), 107-138.
- [9] Leibowitz, G.M. Lectures on complex function algebras. Scott Foresman and Co. 1970.
- [10] Merrill, III, S. Gleason parts and a problem in prediction theory. Math. Zeit. 129 (1972) 321-329
- [11] Merrill, III, S. and Lal. N., Characterization of certain invariant subspaces of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebras. Pacific J. M. 30 (1969) 463-474.
- [12] Ohno, Y. Remarks on Helson-Szegö problems. Tôhoku M. J. 18 (1966), 54-59

[13] Rudin, W. Fourier analysis on groups.

Interscience 1967.

[14] Sarason, D. An addendum to "Past and Future", Math. Scand. 30(1972) 62-64.