

多目的スケジューリング問題

大阪大学工学部 石井 博昭 (Hiroaki Ishii)

大阪大学工学部 多田 実 (Minoru Tada)

追手門学院大学 益田 照雄 (Teruo Masuda)

大阪大学工学部 西田 俊夫 (Toshio Nishida)

1. はじめに

これまで、ほとんどのスケジューリング問題は単一の目的関数を扱ってきた。しかしスケジューリング問題においても複数の目的関数を考え、ある基準に従ってバランスあるスケジュールを求めることがより現実的である場合も多いと考えられる。この様な問題を多目的スケジューリング (multicriteria scheduling) 問題と呼ぶ。一般にある目的関数に対して”最適である”ものが、他の基準においては”最悪である”かもしれない。それゆえ、ある目的関数に対して”最適でない”ものが他の基準においては、ある意思決定者 (以下DMと書く) にとって満足のいくものであれば、そのDMはそれを”よいもの”と考えるかもしれない。ここに多目的問題の難しさがあり、単一の目的関数でも最適解を求めることが困難なスケジューリング問題においては、”多目的”といっても実際はほとんどが”二目的スケジューリング問題” (bicriteria scheduling problem) になる。以下に最近研究された二目的スケジューリング問題の例を挙げる。

Van WassenhoveとGeldens [8] は一機械上で n 個の仕事を平均滞留時間

と最大納期遅れを同時に最小化するスケジューリング問題を考えた。V. WassenhoveとBaker [7] は配分コスト (resource allocation costs) と最大完了時間ペナルティ (maximum completion penalty) を同時に最小化するスケジューリングを考えた。(この他にも [5]、[3] などがある。)

この様に、多目的スケジューリング問題では、これまでほとんど一機械の場合が考えられてきた。今回、我々は”二機械オープンショップ”と”一様機械”上で最大完了時間 $C_{\max}$ 、最大納期ずれ $L_{\max}$ を二つの目的関数として考える多目的スケジューリングを取り扱う。そこでは、各スケジューリングに対してその $C_{\max}$ 、 $L_{\max}$ を成分にもつベクトルを考え、このベクトルを基にして非劣スケジュールを定義し、これらの多目的スケジューリング問題を解く。

2. 二機械オープンショップ多目的スケジューリング問題

2. 1 二機械オープンショップスケジューリング問題

まず最初に、通常の(すなわち多目的でない)二機械オープンショップスケジューリング問題に関して以下のように仮定し、その後すでに解かれている $C_{\max}$ 最小化問題と $L_{\max}$ 最小化問題を簡単に紹介する。

2台の機械 M_1 、 M_2 とこれらの機械で処理されるべき n 個の仕事 J_1 、 $\dots$ 、 J_n があるとし、各仕事 J_j ($1 \leq j \leq n$) は各々 M_1 、 M_2 で処理されるべき2つのオペレーションからなり、 M_1 、 M_2 での処理時間をそれぞれ a_j 、 b_j とする。全ての仕事はオープンショップ型、すなわちどちらの機械での処理から始めてもいいが、同一の仕事の2つのオペレーションは同時には処理できないとす

る。各仕事は分割処理可能であるが、各機械は同時には高々1つの仕事しか処理できない。また各仕事 J_j には納期 d_j が定められている。さらに a_j 、 b_j 、 d_j は非負であるとし、一般性を失うことなく $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ とする。仕事 J_j の完了時間を C_j で示すと、納期ずれ (lateness) L_j は

$$L_j = C_j - d_j \quad (1)$$

となり、最大完了時間 (maximum completion time) $C_{\max}$ と最大納期ずれ $L_{\max}$ はそれぞれ

$$C_{\max} = \max_j C_j \quad (2)$$

$$L_{\max} = \max_j L_j \quad (3)$$

となる。

< $C_{\max}$ 最小化問題 >

二機械オープンショッブ問題において、最大完了時間 $C_{\max}$ を最小化するためのアルゴリズムは T. Gonzalez と S. Sahni [1] によって与えられている。(このアルゴリズムをアルゴリズム-1とする。) ここで得られる $C_{\max}$ の最小値 $C_{\max}^*$ は

$$C_{\max}^* = \max (T_1, T_2, \max_j (a_j + b_j)) \quad (4)$$

で与えられる。ここで T_1 、 T_2 はそれぞれ $T_1 = \sum_{j=1, n} a_j$ 、 $T_2 = \sum_{j=1, n} b_j$ である。またアルゴリズム-1によるスケジュールでの $L_{\max}$ の値を $L_{\max}^2$ で示す。

< $L_{\max}$ 最小化問題 >

最大納期遅れ $L_{\max}$ を最小化するためのアルゴリズムは E. L. Lawler, J. K. Lenstra と H. J. Rinnoy Kan [4] によって与えられている。(このアルゴリズムをアルゴリズム-2とする。) ここで得られる $L_{\max}$ の最小値 $L_{\max}^*$ は $A_j = \sum_{k=1, j} a_k$, $B_j = \sum_{k=1, j} b_k$ ($j=1, 2, \dots, n$)、 $A_0 = B_0 = 0$ として、

$$L_{\max}^* = \max_j [\max \{ (A_j, B_j, a_j + b_j, (A_j + B_j + Z_j') / 2) - d_j \}] \quad (5)$$

で与えられる。ただし、 Z_j' は $Z_1' = -\infty$, $Z_j' = d_j - d_{j-1} + \max(0, Z_{j-1}' - a_{j-1} - b_{j-1})$, $j=2, \dots, n$ で逐次定められる。またこのアルゴリズムによるスケジュールの $C_{\max}$ の値を $C_{\max}^2$ で示す。実際のスケジュールは納期を各々 $d_j + L_{\max}^*$ として $J_1, J_2, \dots, J_n$ の順に M_1, M_2 への割付を考え、納期内に納まるようにすることにより求まる。また次のように、納期が与えられたとき納期内に納まるかどうかを判定する不等式も与えられている。

$$\begin{aligned} A_j &\leq d_j', \quad B_j \leq d_j', \quad A_j + B_j \leq 2d_j' - Z_j, \quad j=1, \dots, n \\ Z_j: \quad Z_1 &= d_1', \\ Z_j &= d_j' - d_{j-1}' + \max(0, Z_{j-1}' - a_{j-1} - b_{j-1}), \\ &\quad j=2, \dots, n \end{aligned} \quad (6)$$

ここで d_j' は以下の多目的スケジューリング問題での納期でもとの d_j を修正したものである。

2. 2 二機械オープンショップ多目的問題

多目的スケジューリング問題を考えるために、スケジュールベクトルというものを導入する。ここでは二目的を考えるので、各スケジュール π にその $C_{\max}^{\pi}$ 、 $L_{\max}^{\pi}$ を成分としてもつベクトル $v^1 = (v_1^1, v_2^1)$ 、 $v^2 = (v_1^2, v_2^2)$ に対して $\leq$ を

$$v^1 \leq v^2 \Leftrightarrow v_1^1 \leq v_1^2, v_2^1 \leq v_2^2 \text{ かつ } v^1 \neq v^2 \quad (7)$$

と定義する。2つのスケジュール π_1 、 π_2 に対して $v_{\pi_1} \leq v_{\pi_2}$ であるとき π_1 は π_2 に対して”優越する”ということにする。優越するスケジュールが存在しないとき、そのスケジュールを非劣スケジュールという事にする。分割処理を許しているので、非劣スケジュールは無限にある可能性があるので、ここでは少なくとも対応する1つの非劣スケジュールが存在するスケジュールベクトルに対して、その1つのスケジュールをみつけることを考える。

【補題1】

非劣スケジュールベクトルを求めるにはその成分として、

$$C_{\max}^* \leq C_{\max}^{\pi} \leq C_{\max}^2, L_{\max}^* \leq L_{\max}^{\pi} \leq L_{\max}^2$$

のみを考えればよい。

【定理1】

この問題の解は

(a) もし $L_{\max}^* + C_{\max}^* \geq F$ なら解は $(C_{\max}^*, L_{\max}^*)$ で1点に決まる(完全解)。

(b) もし $L_{\max}^* + C_{\max}^* < F$ なら $L_{\max} = -C_{\max} + F$ 上の点(ただし

$C_{\max} \geq C_{\max}^*$ 、 $L_{\max} \geq L_{\max}^*$) が非劣解となる。

ここで F は以下のような定数である。

$$F = \max_k (a_n + b_n + \sum_{i=1, k} a_i + \sum_{i=1, k} b_i - d_k).$$

(証明) 紙面の都合上、省略。

3. 一様機械多目的スケジューリング問題

3. 1 一様機械スケジューリング問題

一様機械問題で取り扱う機械と仕事とは、 m 台の機械があり、各機械の処理速度は時間に無関係な一定の値 s_i ($1 \leq i \leq m$) であるとする。ここで一般性を失うことなく $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m$ と仮定する。また n 個の仕事に対して、異なる納期が k 個ありこれを $d_1, d_2, \dots, d_k$ とし、各仕事の処理必要量を $t_1, t_2, \dots, t_m$ とする。ここですべてのデータは非負の整数とする。

< $C_{\max}$ 最小化問題 >

一様機械問題において最大完了時間 $C_{\max}$ を最小化するためのアルゴリズムは T. Gonzalez と S. Sahni [2] によって与えられていて (これをアルゴリズム-3 とする)、 $C_{\max}$ の最小値 $C_{\max}^*$ は

$$C_{\max}^* = \max [\max_j (X_j / E_j), X_n / E_m] \quad (8)$$

で得られ、ここで E_j, X_j はそれぞれ $E_j = \sum_{i=1, j} s_i$ ($1 \leq j \leq m$)、 $X_j = \sum_{i=1, j} t_i$ ($1 \leq j \leq n$) である。またここでは処理必要量 t_j に対して一般性を失うことなく $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ であると仮定している。

< $L_{\max}$ 最小化問題 >

一様機械の場合、 $L_{\max}$ の最小値を直接求める方法は存在しないが、すべての仕事を納期に間に合わせるようなスケジューリングを得るアルゴリズムはS. SahniとY. Cho [6] によって考えられている。そこで元の納期を d_j ($1 \leq j \leq n$) としたとき $d_j' = d_j + L$ となるような新しい納期 d_j' を考える。元の納期でおさまるスケジューリングが存在しなかった場合、新しい納期にすればおさまるような最小の L を0から少しずつ増加させて探索すれば、 L のとりうる値が有限個であるとき、 L の最小値は求まることになる。

3. 2 一様機械多目的スケジューリング問題

n 個の仕事に対して、異なる納期が k 個あり、これを $d_1, \dots, d_k$ とし、各仕事の処理必要量を $t_1 \geq \dots \geq t_n$ とする。まず、アルゴリズム-3によって得られるスケジュールの $C_{\max}$ の最小値 $C_{\max}^*$ を求め、そのスケジュールでの $L_{\max}$ の値を $L_{\max}^0$ とする。次に、一様機械の場合、 $L_{\max}$ の最小値を直接求める方法は存在しないので、 $L_{\max}$ の下界値 $L_{\max}^1$ を考える。今、納期 d_i をもつ仕事の番号を処理必要量の大きい方から $i(1), \dots, i(l_i)$ とし、 $J^i = \{J_{i(1)}, \dots, J_{i(l_i)}\}$ とする。そして $C_{\max}^i$ を $J^1 \cup \dots \cup J^i$ だけ考えたときの $C_{\max}$ の最小値とする。このとき、 $L^i = C_{\max}^i - d_i$ とおくと、 $L_{\max}$ の一つの下界値 $L_{\max}^1$ として、

$$L_{\max}^1 = \max_i L^i \quad (9)$$

を得る。また、 $d_0 = 0$, $X_{ji} = \sum_{h=1, \dots, l_i} t_{i(h)}$, $j = 1, \dots, l_i$ ($i=1, \dots, k$)

として、

$$\Delta L_i = \begin{cases} \max_{1 \leq j \leq l_i} \{X_{ji} / E_j\} - (d_i - d_{i-1}), & \text{if } l_i < m, \\ \max \{ \max_{1 \leq j \leq m} (X_j / E_j), X_{l_i+1} / E_m \} - (d_i - d_{i-1}), & \text{if } l_i \geq m. \end{cases}$$

(10)

を計算し、

$$C_{\max}^u = d_k + \sum_{i=1, \dots, k} L_i \quad (11)$$

とする。

[補題 2]

非劣スケジュールベクトルを求めるにはその成分として、

$$C_{\max}^* \leq C_{\max}^\pi \leq C_{\max}^u, \quad L_{\max}^* \leq L_{\max}^\pi \leq L_{\max}^u$$

かつ有理数で分母が E_j ($j=1, \dots, m$) および整数値のみを考えればよい。

(証明) 省略。

以上の議論から、非劣スケジュールを見出す多項式時間のアルゴリズムが得られる。

References

- [1] T. Gonzalez and S. Sahni, Open shop scheduling to minimize finish time, Journal of the Association for Computing Machinery,

Vol. 23(1976)665-679.

- [2] T. Gonzalez and S. Sahni, Preemptive scheduling of uniform processor system, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 25, No. 1(1978) 92-101
- [3] K. Heckert, R. Rhode, O. Roglin and R. Weber, On the interactive solution to multi-criteria scheduling problem, Zeitschrift fur Operations Research 24(1980)47-60.
- [4] E. L. Lawler, J. K. Lenstra and A. H. G. Rinnooy Kan, Minimizing maximum lateness in a two machine open shop, Math. Opr. Res. Vol. 6, No. 1(1981)153-158.
- [5] F. Ruiz-Daiz and S. French, A survey on multi-objective combinatorial scheduling, in Multi-Objective Decision Making (Academic Press, London, 1983).
- [6] S. Sahin and Y. Cho, Scheduling independent tasks with due times on a uniform processor system, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 27, No.3(1980)550-563.
- [7] L. N. Van Wassenhove and K. R. Baker, A bicriterion approach to time/cost trade-offs in sequencing, European J. Opl. Res. 11 (1982)48-54.
- [8] L. N. Van Wassenhove and L. F. Gelders, Solving a bi-criterioan scheduling problem, European J. Opl. Res. 4(1980)42-48