

メビウスの帯の平均曲率と 直観幾何学のいくつかの問題

梶山女学園大学・教育学部 伊藤仁一

Jin-ichi Itoh

School of Education, Sugiyama Jogakuen University

1930年に M. Sadowsky は、半径 1 の円柱 2 つと半径 2 の円柱を用いて可展面からできる（平らな紙でつくることができる）メビウスの帯を構成した。この講演では、同じ半径の円柱を用いることにより、M. Sadowsky のメビウスの帯より平均曲率の 2 乗の積分の値が小さくなる例を紹介し、何回か捻ったメビウスの帯に対しても考察する。さらに、直観幾何学といえるようないくつかの問題についても紹介する。

1 可展面からなるメビウスの帯の平均曲率

最近、D.H. Hinz と E. Fried 等によって 1930 年の M. Sadowsky の論文の英訳 ([9]) が出版されたので、数年前のゼミ生の本田詩温さんに読んでもらいました。その論文で M. Sadowsky は、半径 1 の円柱 2 つと半径 2 の円柱を用いて可展面からできるメビウスの帯を構成しており (図 1 参照)、平均曲率の 2 乗の積分の値の計算をしている。更に、その値の小さいものを求めようとしたと思われる。3 つとも同じ半径の円柱にして構成できないかをゼミ生の本田さんに考えてもらった。ここで考えるメビウスの帯は全て可展面のみを扱うものとする。

M. Sadowsky の構成では、全ての円柱の中心線が水平になっていて考えやすいが、3 つの円柱を同じ半径にするためには、円柱の中心線を傾ける必要が生じ、想像することが難しく、GeoGebra を用いることによって、図 2 のように構成することができた。円柱の中心線は 2 か所で折れる折れ線をなしており、真上から見たときは正三角形状に見えるが、その 1 つの頂点ではがっていない。ここで、帯の幅を 2 としたときに、M. Sadowsky の例では、平均曲率の 2 乗の積分値は約 5.88 であるが、本田の例では、その値は約 5.08 となっている。

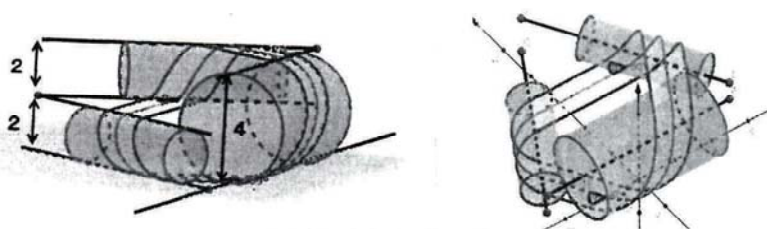


図 1. M. Sadowsky の例

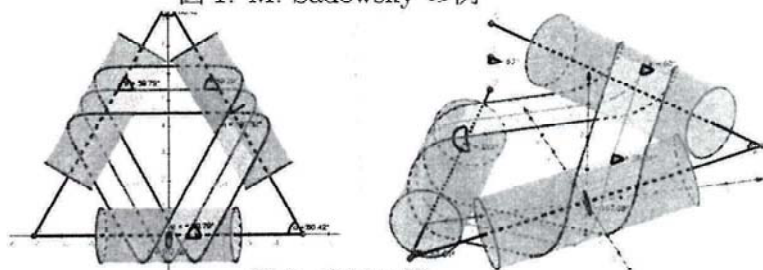


図 2. 本田の例

平均曲率の 2 乗の積分値であるが、どのような状態で、比較するのが自然であるのかという問題が生ずる。M. Sadowsky も試みているように、3つの円柱の中心線を固定して、その半径を比を保ったまま、大きくていくと、メビウスの帯の平坦那部分は少なくなり、帯の幅も狭くするしかなくなり、最後には、帯の幅が零になる (図 3 参照)。この極限状態では、閉曲線に退化しているので、長さだけが問題になり、M. Sadowsky の例では、 $\int_0^l H^2 ds = \frac{15\pi^2}{4l} \approx \frac{37.06}{l}$ であり、本田の例では、 $\int_0^l H^2 ds \approx \frac{31.92}{l}$ となる。(ここで、 l は極限状態のメビウスの帯 (閉曲線) の長さであり、 H は退化する直前の平均曲率を表す。) ここで、本田の例では、3つの円柱の中心線の折れ線の折れ角は、その極限状態のときには、ニュートン方による近似で約 62.88° である。おそらく、この状態が平均曲率の 2 乗の積分が最も小さくなった状態ではないと思われるが、それ以上の結果は知られていないと思われる。

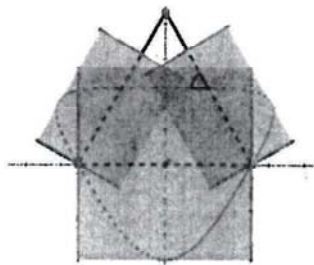


図 3. M. Sadowsky の例の極限状態

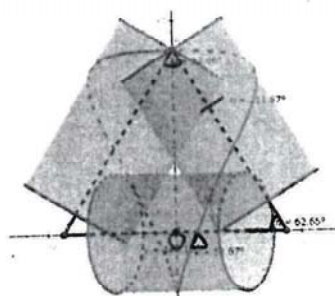


図4. 本田の例の極限状態

メビウスの帯は、帯の両端を一捻りして同一視したものであるが、2回以上捻って同一視したもの、偶数回捻ったものは向き付け可能なので、メビウスの帯とは言えないが、ここでは、 n 回捻ったメビウスの帯と呼ぶことにする。

2捻りのメビウスの帯の場合、一捻りのメビウスの帯のように、4つの同じ半径の円柱を用いて、その3つの中心線を水平面上の折れ線として、最後の1つのみを傾け、それらの中心線を上から見たときに正方形になるようにして、構成したものが図5である。また、図6のように中心線を水平に配置することもできる。この場合、図5の例より、図6例の方が平均曲率の2条の積分値が小さくなることが分かった。

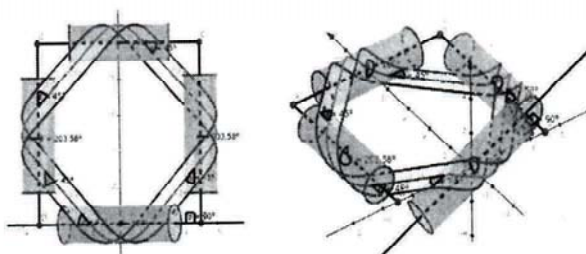


図5. 2捻りの例1（1つの円柱のみを傾けた例）

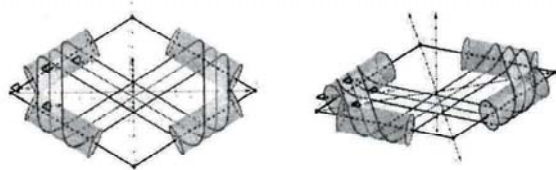


図6. 2捻りの例2（帯のかけ方を変えた例）

3捻りのメビウスの帯の場合に始めて、3つの円柱を均等に配置して構成することができる（図7、図8参照）。これは、建築において相持ち構造（reciprocal structure）と言われているものと同じであり、古くは縄文時代から使われていたとのことである。この場合の極限状態の各円柱の傾きは、水平面から約 24.94°

となっている。

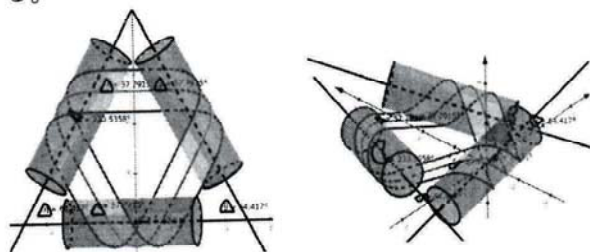


図 7. 3 捻りの例

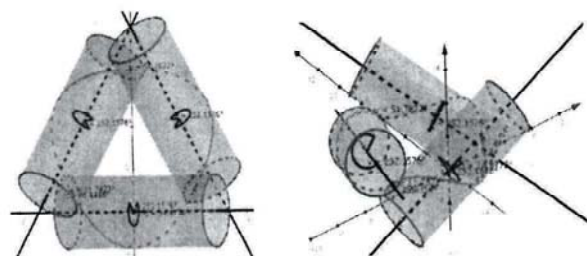


図 8. 3 捻りの例の極限状態の場合

4 捻りの場合に、4 つの全ての円柱に対等に配置して構成した例が図 9 であり、円柱を水平に配置して帯のかけ方を変えた例が図 10 である。残念ながら、学部生の卒業研究では、帯の掛け方を変えた場合の円柱の配置がいろいろありえて、どちらが平均曲率の 2 乗積分が小さいかの考察までには至らなかった。

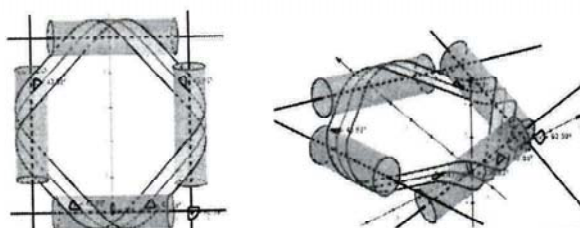


図 9. 4 捻りの例 1 (4 つの円柱が均等な場合)

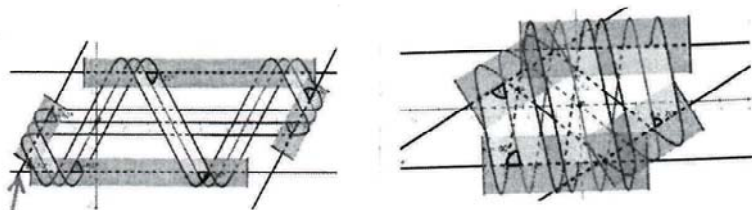


図 10. 4 捻りの例 2 (帯の掛け方を変えた場合)

5 捻りの場合に、5 つの全ての円柱に対等に配置して 3 捻り 4 捻りと同じように帯を掛けた例が図 11 であり、円柱を均等に配置して帯のかけ方を変えてみた例が図 12 である。この 2 つの場合の極限状態における平均曲率の 2 乗積分に関し

ては，図 11 の極限状態の場合が， $\int_0^l H^2 ds \approx \frac{1070.1}{l}$ であり，図 12 の極限状態の場合が， $\int_0^l H^2 ds \approx \frac{803.7}{l}$ となる。

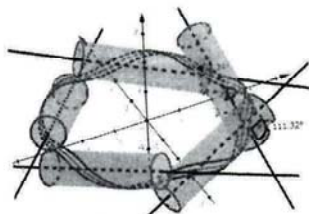
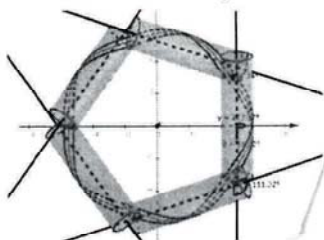


図 11. 5 捻りの例 1 (3 捻り 4 捻りと同じように帯を掛けた場合)

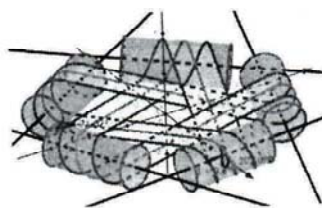
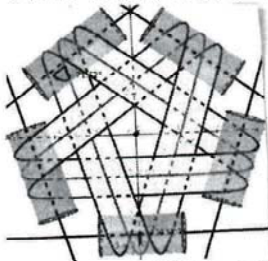


図 12. 5 捻りの例 2 (帯の掛け方を変えた場合)

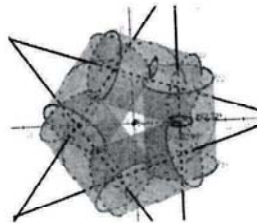
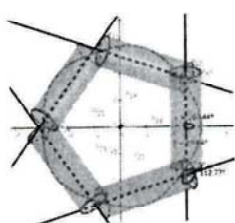


図 13. 5 捻りの例の極限状態

3 捻りの場合と 5 捻りの場合には，本田さんが構成してくれた例が，おそらく平均曲率の 2 乗積分を最も小さくする例ではないかと思われるが，証明は困難であろうと思われる。また，極限状態は，閉曲線なので，他の比較の仕方もあるが，今後の研究に期待したい。

2 正多面体の全ての面を見る最短経路

多面体の表面のみを動ける知的生命がいたとして，全ての面を見るのにどのような経路が最短なのかという問題を，10 年以上前に Stony Brook の応用数学者 J. Mitchell と話したことがあるが，特段の結果には得られないままであったが，最近，Erik Demaine らによって，多面体上のある 2 点を結ぶ測地線が全ての面を通る多面体の例が構成された ([5])。それに刺激を受けて，正多面体の場合に限って，昨年度の椙山女学園大学のゼミ生の中村恋聞さんの卒業研究として調

べてもらった結果を紹介する。ここでは、頂点や辺に到達すれば、その周りの全ての面を見たものとする。また、始点と終点がある経路の場合と閉路（始点と終点が一致する）の場合の2通りの考察する。

正四面体（1辺の長さ1）の場合は、1つの頂点で周りの3面を見ることができ、残りの1面に到達すればよいので、対辺の中点に達するのが最も短い経路（長さ $\sqrt{3}/2$ ）となる。閉路の場合は、そのまま往復して戻った方長さ $\sqrt{3}$ で、単純閉測地線（長さ2）よりも短くなる。

立方体（1辺の長さ1）の場合も、1つの頂点で周りの3面を見ることができ、反対側の頂点に到達すれば他の3面が見られるので、これが最も短い経路で長さ $\sqrt{5}$ となる。立方体の単純閉測地線は3種類で、長さが4と $3\sqrt{2}$ と $2\sqrt{5}$ であることが知られている（[11], [?]）。最初のは4面のみだが、それ以外は6面全てを通る。したがって立方体の場合の最短閉路は、長さ $3\sqrt{2}$ の閉測地線となる。

正八面体（1辺の長さ1）の場合も、1つの頂点で周りの4面を見ることができ、反対側の頂点に到達すれば他の4面が見られるので、これが最も短い経路で長さ $\sqrt{3}$ となる。正八面体の場合最短経路の往復と単純閉測地線（全ての面を通る）の長さが一致する。

正十二面体の場合と正二十面体の場合は、証明はできないが、いろいろと調べて、図のような場合が最短であろうと予想される。正十二面体の全ての面を見る最短経路は図14で、最短閉路は図15で、正二十面体の最短経路は図16で、最短閉路は図17と思われる。

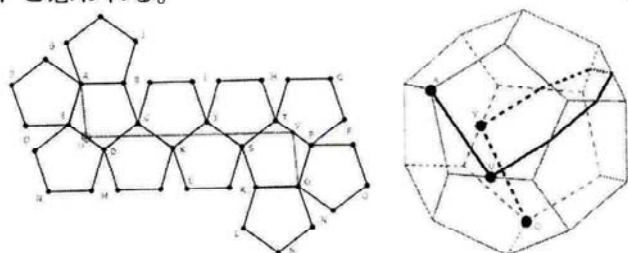


図 14. 正十二面体の全ての面を見る最短経路

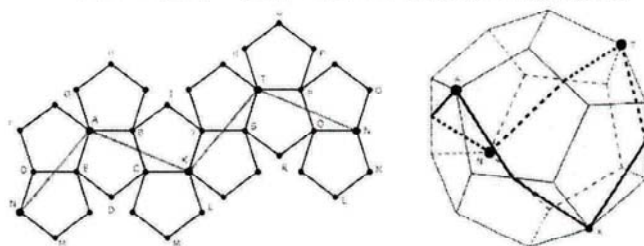


図 15. 正十二面体の全ての面を見る最短閉路

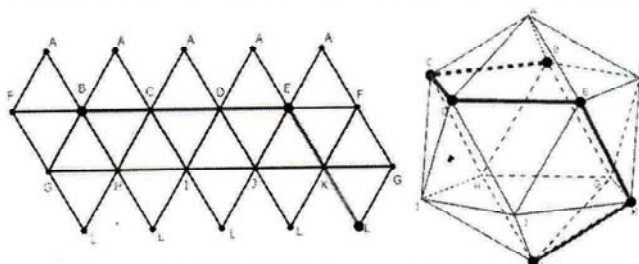


図 16. 正二十面体の全ての面を見る最短経路

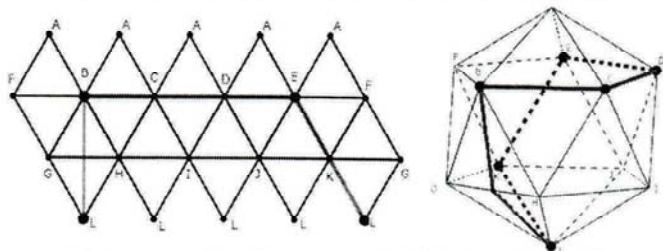


図 17. 正二十面体の全ての面を見る最短閉路

ここで、正十二面体は最短閉路と予想される経路は、内接する正四面体があるので、その4頂点を用いている。正二十面体ではそのような正四面体は存在しないので、考えられる最短経路の始点と終点を最短線で結んだものを最短閉路と予想している。

球面の全ての点を見ることができる最短閉路が V.A. Zalgaller によって図 18 のように球に外接し互いに直交する2つの円柱の各上面と底面の4つの半円からなる閉曲線であろうと予想されて ([13])、最近、M. Ghomi らによって示された ([7])。図 15 や図 17 の閉路は、球面の場合の結果を正多面体に当てはめたような曲線とも見られなくもない。更に、球面の全ての点を見る始点と終点のある最短経路に関しては、V.A. Zalgaller が [14] によって示しているが、1つの端点が遠くにあることが有利に働くので、図 14 や図 16 とは異なるが、多面体の場合も、面上から離れてもよいという設定の問題を考察すれば似たような結果が得られるのではないと思われる。

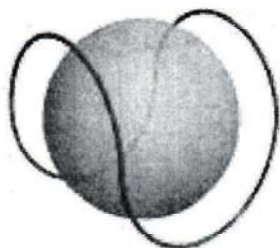


図 18. 球面の全ての点を見ることができる最短閉路

3 錐体における等周不等式

凸体の表面積を一定にしたときの最大体積に関する等周不幸式の歴史は古く、また、球面になるときが最大体積を与えることはよく知られている。しかし、凸体の形状を何かに制限したときの結果は、そんなに知られていない。柱体（両底面は柱の方向と直交する）と仮定したときに、表面積を一定にして最大体積を取る場合は、底面の面積と全ての側面の面積の和の比が、 $1:4$ となることが知られている（[12]）。四角柱とすれば立方体の場合にあたり、円柱の場合には球に外接する円柱が最大体積をもつ。少なくとも底面の形状を決定すれば、どのような形が体積最大になるかは決定される。更に、松田は、上面を取り除いた器として、底面の面積と側面の全ての面積の和が一定であるとき、その容積が最大になるのは、底面積と側面の面積の和との比が $1:2$ となることであることを示している（[12]）。この場合も、少なくとも底面の形状を決定すれば、どのような形が容積最大になるかは決定される。この結果に刺激されて、プリンの容器（円錐台の大きい方の底面を取り除いた）の側面積と1つの底面積の和を一定にして、容積を最大にする形状を決定するという課題を、昨年の椋山女学園大学のゼミ生の野村菜七さんに与えた。残念ながら、円錐台の場合は、複雑になりすぎて、形状を予想するには至らなかったが、錘体の場合の結果は次のように得ることができた。

底面が正 n 角形の直正多角錐（頂点が底面の正多角形の中心の真上にある）の場合に、表面積一定にして最大体積を持つ直正多角錐は、底面の正多角形の外接円の半径を r とし、高さを h とすると、 $r:h = 1:2\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}$ となる。このことを、Lagrange の未定乗数法を用いて証明してくれました。例えば、正三角錐の場合は、 $r:h = 1:\sqrt{2}$ で正四面体のときに体積が最大となる。これに関しては、V.A. Zalgaller が一般の四面体の中でも表面積一定なら、正四面体が最大体積を持つことを示しています（[15]）。正四角錐の場合は、 $r:h = 1:2$ のときに体積が最大となる。円錐の場合は、 $r:h = 1:2\sqrt{2}$ のときに体積が最大となる（図 19 参照）。これらどの場合も、底面積と側面積の和との比は、 $1:2$ となる。

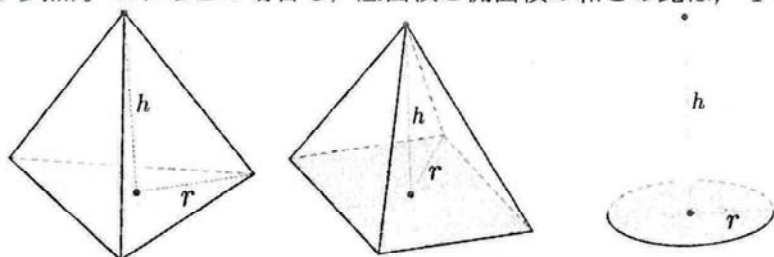


図 19. 直錘体で等周問題の最大体積の形状

上面が正 n 角形の直正多角錐（頂点が上面の正多角形の中心の真下にある）の場合に、側面積の和が一定にして最大容積を持つ直正多角錐形状の容器は、上面の

正多角形の外接円の半径を r とし、高さを h とすると、 $r:h=1:\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}$ となる。このことも、Lagrange の未定乗数法を用いて証明してくれました。例えば、正三角錐の場合は、 $r:h=1:\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときに容積が最大となる。正四角錐の場合は、 $r:h=1:1$ のときに容積が最大となる。円錐の場合は、 $r:h=1:\sqrt{2}$ のときに容積が最大となる (図 20 参照)。これらどの場合も、上底の面積と側面積の和との比は、 $1:\sqrt{2}$ となる。柱体のときの錘体のときも、蓋付の場合の臨界状態の面積比に対して、蓋を取り除いた場合の面積比がルートを取ったものになっていることは、何か意味があることなのかもしれないとも思われて興味深い。

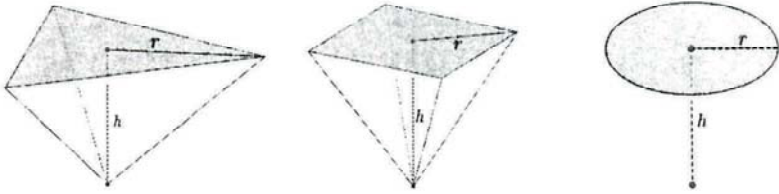


図 20. 直錘体容器で側面積一定の最大容積の形状

4 正方形の紙で凸体を覆う

凸多面体表面を紙で効率よく覆うためには、非常に細い帯状の紙を用いればよいことは以前から知られている ([1], [5])。ここでは風呂敷の形状でもある正方形の紙を用いることに拘って考えることにする。更に、紙は切らないで折り曲げて覆うこととし、勿論、伸び縮みしないものとする。立方体 (1 辺の長さ 1) を覆う最小の正方形の紙の 1 辺の長さは $2\sqrt{2}$ であることは知られている ([5]) (図 21 左参照)。しかし、正四面体 (1 辺の長さ 1) や正八面体 (1 辺の長さ 1) の場合にそれを覆う最小の正方形の紙の大きさは知られていない。研究会「直観幾何学 2023」で玉名中学校教諭の堀尾直史先生が、正四面体は 1 辺の長さ $\sqrt{3-x^2}$ の正方形の紙で、正八面体は 1 辺の長さ $\sqrt{6}$ の紙で覆うことが可能であることを発表した (図 21 中央と右参照)。ここで、 x は以下の 2 式を満たすもので、 $\sqrt{3-x^2}$ は約 1.6341 である。

$$\sqrt{3-x^2}=2\sqrt{y^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+x, \quad y^2=\frac{x^2}{4(3-x^2)}$$

これらが最小の正方形であろうとは思われるが、残念ながらこれが証明には至っていない。

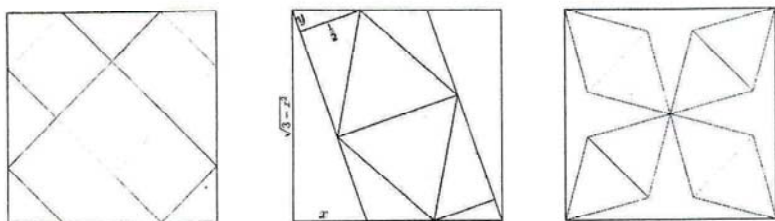


図 21. 立方体，正四面体，正八面体を覆う正方形の紙

1 辺が 1 の正方形のかみで覆える凸体の最大体積を考えてみる。凸体を球体とすると図 22 のように覆うことができ、その最大体積は $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$ となる。一方、凸体を直方体および正四角錐台としたときには、3 辺の長さの比が、 $2:2:1$ の直方体のときが、最大体積 $\frac{\sqrt{2}}{27}$ となる (図 23 参照)。このときの方が球体のときの体積より大きくなる。一般には球体が最大になることが多いが、正方形という形状に拘ったために、普通ではない結果になったものと思われる。凸体のなかでは、上記の直方体が最大体積であろうと思われるが、残念ながら証明には至っていない。

凸体でない場合には、図 23 の正方形のかみで、直方体の表面に触れていない 4 つの直角 2 等辺三角形の部分折り曲げて、2 つの四面体を貼り合わせた形状を作ることが可能である (図 24 参照)。そのままでは、4 つの部分は直方体の 4 辺としか共通部分を持たないが、直方体を少し変形することによって、3 次元の連結領域とできる。この操作をした後にも、まだ紙で使っていない部分が残るので、同様の操作を無限に繰り返すことができ、最終的にはフラクタル的な形状のものが最大体積ではないかと思われる。

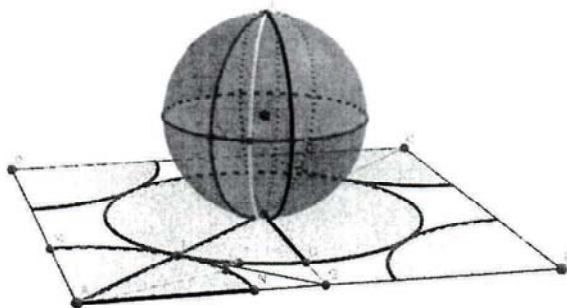


図 22. 正方形の紙で球体を覆う

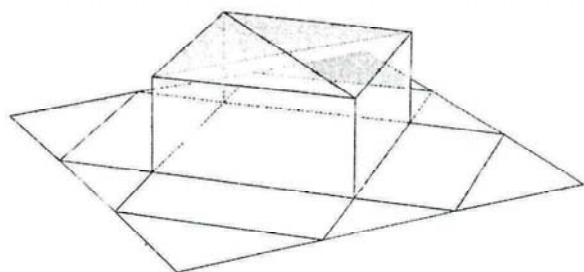


図 23. 正方形の紙で直方体 (辺の比 $2:2:1$) を覆う

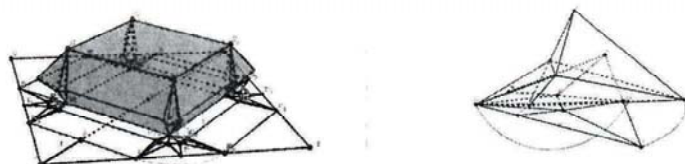


図 24. 直方体 (辺の比 $2:2:1$) より体積が大きい非凸体を覆う

5 直観幾何学とは

直観幾何学という学問分野はアメリカ数学界の分類にはありません。ヒルベルトとコーン・フォッセンの著の直観幾何学 (Anschauliche Geometrie) というタイトルの本 ([8]) はあります。この本は、幾何学の幅広い分野 (2次曲線と2次曲面, 配置の幾何, 微分幾何, 位相幾何) の初等的なことにに関して、特に図や絵を多用することによってバランスよく書かれていて私の好きな本の一つです。最近の秋山先生の著書のタイトル ([2]) や総説集のタイトル ([3]) にも使われています。ハンガリーでは Intuitive Geometry という研究会が4, 5年に一度のペースでブダペストで開催されていました。おそらくハンガリーの数学者 László Fejes-Tóth がドイツに留学した時にこの本であい、ハンガリーに帰ってから研究会を始めたのでしょう。勿論、ハンガリーは組合せ論的な分野が強いので、Discrete Convex Geometry という分野の研究会になっています。László は亡くなりましたが、その息子で研究会のオーガナイザーの Gabor Fejes-Tóth によると、Intuitive Geometry とは、道行く人にも説明して分かってもらえるような幾何学の問題を扱う研究だとのことです。

私もこの20年ほど毎年3月頃に直観幾何学というタイトルの研究会を以前は熊本で、最近名古屋での開催しています。あまり抽象的な問題ではなく具体的に初等的な幾何の問題を、図や絵を多用して考える幾何学で、解析幾何, 微分幾何, 位相幾何, 離散幾何, 凸体の幾何, 初等幾何, 射影幾何とどの分野でもかま

わずに扱いたいと思っています。勿論、多くの人に興味を持ってもらえるような良い問題を見つけ出すことが最も重要になります。最先端の数学の研究がどんどん進み、学校教育からあまりにかけ離れすぎることになってきた感があるので、そのギャップを埋める研究としても意味を見いだしたいとは思っていますが、うまくいっているかどうかは定かではありません。最近、中高の教員の参加も増えています。

参考文献

- [1] J. Akiyama, T. Ooya and Y. Segawa Wrapping a cube, *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 16 (1997), 95-100.
- [2] J. Akiyama and K. Matsunaga Treks into intuitive geometry The world of polygon and polyhedra Springer (2018).
- [3] G. Ambrus ets. ed., New Trends in Intuitive Geometry (Bolyai Society Mathematical Studies 27) Springer, Tokyo (2015).
- [4] E. Demaine, M. Demaine and J. Mitchell Folding flat silhouettes and wrapping polyhedral packages: new results in computational origami, *Comput. Geom.*, 16 (2000), 3-21.
- [5] E. Demaine ets., Geodesics paths passing through all faces on a polyhedron, *Abstract of 24th JCDCGGG*, (2022), 58-59.
- [6] D. Fuchs and E. Fuchs, Closed geodesics on regular polyhedra, *Moscow Math. J.* 7 (2007), 265-279.
- [7] M. Ghomi and J. Wenk, Shortest closed curve to inspect a sphere, *J. für die reine und angewandte Math.*, (2021), <https://doi.org/10.1515/crelle-2021-0049>.
- [8] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen Anschauliche Geometrie Springer (1932), 芹沢訳, 直観幾何学, みすず書房 (1966).
- [9] D. H. Hinz and E. Fried, Translation of Michael Sadowsky's paper "An elementary proof for the existence of developable Möbius band and the attribution of the geometric problem to a variation problem", *J. of Elasticity*, 119 (2015), 3-6.
- [10] S. Honda, N. Horio, J. Itoh, N. Nomura and S. Prasad, Six problems in intuitive geometry, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie.* 67 (2024), 221-227.
- [11] 伊藤仁一, 立方体や正四面体上の閉測地線 連載「誰も知らない多面体の秘

密」第1回, ICT を用いた平面幾何の発見的学習に関するいくつかの事例数
学セミナー, vol.60 no.4 (2021), 64-67.

- [12] 松田道雄: 節約型立体は, 数件通信, 85 (2016), 22-24.
- [13] V.A. Zalgaller, Extremal problems on the convex hull of a space curve,
Petersburg Math. J. 8 (1997), 369-379.
- [14] V.A. Zalgaller, Shortest inspection curves for a sphere, *Zap. Nauchn.
Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 299 (2003), 87-108,
328.
- [15] V.A. Zalgaller, An isoperimetric problem for a tetrahedron, *Zap. Nauchn.
Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 329 (2005), 28-55.