

C^* -dynamics and related problems

境 正一郎 (Shôichirô Sakai)

量子格子系と Fermi 場の擬自由力学系の理論を一般化した UHF C^* -代数に於ける normal $*$ -derivations の理論は拙著 [S] の中で展開されている。しかし、まだ多くの重要な問題が未解決である。本講演では、これらの問題の中から若干の興味深い問題を選んで解説する。

$\mathcal{O}$ を UHF C^* -代数とする。このとき、 $\mathcal{O}$ には有限次元全複素行列 $*$ -代数の増加列 $\{\mathcal{O}_n\}$ が存在して: (i) $1 \in \mathcal{O}_1 \subset \dots \subset \mathcal{O}_n \subset \dots$; (ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ は $\mathcal{O}$ で稠密である。

$\mathcal{D}(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ とし、 δ を $\mathcal{D}(\delta)$ を定義域とする $\mathcal{O}$ に於ける $*$ -derivation とする。このような $*$ -derivation を normal $*$ -derivation とする。 δ を normal $*$ -derivation とすると自己随伴元 $\{h_n\}$ が存在して

$$\delta(a) = i[h_n, a] \quad (a \in \mathcal{O}_n; n=1, 2, \dots)$$

とかけらる。

したがって、 δ は well-behaved であり

$$\|(1 \pm \delta)(a)\| \geq \|a\| \quad (a \in \mathcal{D}(\delta))$$

が成立す。

もし, $(1 \pm \delta) \Delta(\delta)$ が $\mathcal{A}$ で稠密ならば Hille-Yoshida の定理により

δ の閉包 $\bar{\delta}$ は $\mathcal{A}$ 上の強連続 $\ast$ -automorphisms の $\mathbb{C}$ パラメータ一群 $t \mapsto \exp t \bar{\delta}$ ($t \in \mathbb{R}$) の生成作用素とれる。

さらに,

$$\|(\exp t \delta i h_n)(a) - (\exp t \bar{\delta})(a)\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

($a \in \mathcal{A}$)

が成立する。即ち, $\mathbb{C}^*$ -dynamics $\{\mathcal{A}, \exp t \bar{\delta}\}$ は approximately inner である。

一般に, $(1 \pm \delta) \Delta(\delta)$ の稠密性を具体的に model について検証するのは容易でない。従って, normal $\ast$ -derivation δ が如何なる条件下で生成作用素である $\ast$ -derivation に拡大できるか? という問題は極めて重要である。

この拡大問題は古典格子系の一般化である commutative normal $\ast$ -derivation については拙著の中で完全な解答が示されている (cf. [S] §4.6)。

まず, この解答について述べる。

定義 1. δ を normal $\ast$ -derivation とする。 δ が commutative であるとは自己随伴元 $\{h_n\}$ が

互いに可換に選べる ことである。 即ち,

$$\delta(a) = i[h_n, a] \quad (a \in \mathcal{O}_n; n=1, 2, \dots) \quad \text{で}$$

$$h_m h_n = h_n h_m \quad (m, n=1, 2, \dots)$$

が成立することである。 このとき,

次の定理が成立する。

定理 1. δ を commutative normal $*$ -derivation とする。

$\mathcal{L}_n$ を $\mathcal{O}_n$ と $h_1, h_2, \dots, h_n$ で生成される $\mathcal{O}$ の C^* -部分代数とする。 このとき, $\hat{\delta}(b) = i[h_n, b] \quad (b \in \mathcal{L}_n; n=1, 2, \dots)$ とおくと, $\hat{\delta}$ は $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n$ 上で well-defined であり $\delta \subset \hat{\delta}$ なる $*$ -derivation であり, $\hat{\delta}$ の閉包 $\bar{\delta}$ は生成作用素である。 さらに,

$$(\exp t \bar{\delta})(b) = (\exp t \delta i h_n)(b) \quad (b \in \mathcal{L}_n; n=1, 2, \dots)$$

とくに, $\bar{\delta}$ が生成作用素ならば $\bar{\delta} = \hat{\delta}$ である。
が成立する。

従って, 次の問題は重要である。

問題 1. δ を normal $*$ -derivation とする。 δ から $\mathcal{O}$ に於ける生成作用素であるような $*$ -derivation に拡大できるための必要十分条件を求めよ。

問題 2. $\mathcal{O}$ に於ける normal $*$ -derivation である生成作用素であるような $*$ -derivation に拡大できない例があるか?

さうして、一般に normal $\ast$ -derivation の議論を進めよう

$\delta \in \text{normal } \ast\text{-derivation}$ と $\exists$ $\delta_0 \in \text{bounded } \ast\text{-derivation}$ が存在して $(\delta + \delta_0)(\mathcal{D}(\delta)) \subset \mathcal{D}(\delta)$ とできる (cf. [S] Prop. 4.5.5).

$\mathcal{A}$ は unital simple $C^\ast$ -algebra であるから bounded derivation はすべて inner (cf. [S] Th. 2.5.7) である。

従って、 $h (= h^\ast) \in \mathcal{A}$ が存在して $\delta_0 = \delta \circ h$ とかけられる。 bounded perturbation は生成作用素としての性質と不変に保たれる $\delta \in \delta + \delta \circ h$ で置きかえて議論できる。

そこで、 $\delta(\mathcal{D}(\delta)) \subset \mathcal{D}(\delta)$ と仮定する。

このとき、 h_n の作り方 (cf. [S] p.159) から判るようには $h_n \in \mathcal{D}(\delta)$ ($n=1, 2, \dots$) とできる。

$\delta(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_2$, $\delta(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_3$, ..., $\delta(\mathcal{A}_j) \subset \mathcal{A}_{j+1}$, ... となる部分列 $\{n_j\}$ をとり $\{\mathcal{A}_n\}$ を $\{\mathcal{A}_{n_j}\}$ で置きかえて、 $\{\mathcal{A}_n\}$ と記述することにすると $h_n \in \mathcal{A}_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) と仮定できる。

このとき、次の定理が成立する (cf. [S] prop. 4.5.6).

定理 2. $\delta = \delta_1 + \delta_2$ と表わせる。ここで

$$\delta_1(\mathcal{A}_{2n}) \subset \mathcal{A}_{2n}, \quad \delta_2(\mathcal{A}_{2n+1}) \subset \mathcal{A}_{2n+1} \quad (n=1, 2, \dots).$$

とくに、 δ_1, δ_2 は commutative normal $\ast$ -derivations

である。さて $\delta_1(a) = i[p_n, a]$ ($a \in \mathcal{O}_{2n}$, $p_n \in \mathcal{O}_{2n}$; $n=1, 2, \dots$), $\delta_2(a) = i[q_n, a]$ ($a \in \mathcal{O}_{2n+1}$, $q_n \in \mathcal{O}_{2n+1}$; $n=1, 2, \dots$) である。ここで p_n, q_n は自己随伴元である。

次に, $\delta(\mathcal{O}_n) \subset \mathcal{O}_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$) とする。

$a \in \mathcal{O}_n$ に対し,

$$\delta^{m+1}(a) = \delta i h_{n+m} \delta i h_{n+m-1} \dots \delta i h_n(a) = \delta i h_{n+m}^{m+1}(a)$$

である。そして,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\delta^n(a)\|}{n!} \gamma_a^n < +\infty$$

とある positive number γ_a が存在するとき a は analytic vector という。 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n = \mathcal{D}(\delta)$ のすべての元が analytic ならば Nelson の定理により δ は生成作用素である。

さて, ここから逆の問題を考えよう。

$\mathcal{O}, \alpha$ は UHF C^* 代数 $\mathcal{O}$ 上の強連続な 1 パラメータ *-自己同型群 $t \mapsto \alpha_t$ ($t \in \mathbb{R}$) から与えられる C^* dynamics とする。 $\alpha_t = \exp t\delta$ とおくと δ は $\mathcal{O}$ に与えられる closed $*$ -derivation である。

定理 3. 上記の C^* dynamics に対し, $\mathcal{O}$ の中に有限次元全複素行列 *-代数の増加列 $\{\mathcal{O}_n\}$ が存在して次の条件を満たす。

$$(i) \quad 1 \in \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \dots \subset \mathcal{O}_n \subset \dots$$

(ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ は $\mathcal{O}$ で稠密である

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subset A(\delta)$, ここで $A(\delta)$ は δ に属して analytic な vector 全体の集合である (cf. [S] Th. 4.5.1).

この定理に於いて適当な自己随伴元 $h \in \mathcal{O}$ の中に λ と $(\delta + \delta i h) \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ とできる。

従って次の問題は興味深い。

問題 3. $\mathcal{O}$ の中に次の条件を満たす自己随伴元 h が存在するだろうか?

$$(i) (\delta + \delta i h) \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$$

$$(ii) \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \subset A(\delta + \delta i h)$$

問題 3 が肯定的であるならば Powers-Sakai の予想 (cf. [S] 4.5.9) は肯定的である。

さて, UHF C^* 代数 $\mathcal{O}$ をもった C^* dynamics $\{\mathcal{O}, \alpha\}$ を考えよう。このとき, 定理 3 により $\{\mathcal{O}_n\}$ が存在する。

もし, $(1 - \delta) \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ が $\mathcal{O}$ で稠密ならば,

$$\delta(a) = i[h_n, a] \quad (a \in \mathcal{O}_n; n=1, 2, \dots) \text{ とする } \text{ ,}$$

$$(1 - \delta i h_n)^{-1} \rightarrow (1 - \delta)^{-1} \text{ (strongly) とする } \text{ の } \text{ ,}$$

Kato-Trotter の定理より

$$\|(\exp t \delta i h_n)(a) - (\exp t \delta)(a)\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (a \in \mathcal{O})$$

即ち $\{\Omega, \alpha\}$ は approximately inverse である。

$\tau \in \Omega$ 上の一意な tracial state である。 $\beta \in (-\infty, \infty)$ に対し

$$\varphi_{n,\beta}(a) = \frac{\tau(ae^{-\beta h_n})}{\tau(e^{-\beta h_n})} \quad (a \in \Omega)$$

とすると $\varphi_{n,\beta}$ は Ω の state である。

φ_β を $\{\varphi_{n,\beta}\}$ の Ω の state space に於ける $\sigma(\Omega^*, \Omega)$ 位相に関する集積点とすると φ_β は C^* dynamics $\{\Omega, \exp t\delta\}$ の inverse temperature β に於ける KMS state である。

次の問題は重要である

問題 3. φ_β を $\{\Omega, \exp t\delta\}$ の β に於ける KMS state とする。このとき、次の条件を満たす自己随伴元 l_n の列 $\{l_n\}$ が Ω の中に存在するだろうか？

$$(i) \quad \delta(a) = i[l_n, a] \quad (a \in \Omega_n; n=1, 2, \dots)$$

$$(ii) \quad \varphi_{n,\beta}(a) = \frac{\tau(ae^{-\beta l_n})}{\tau(e^{-\beta l_n})} \quad (a \in \Omega) \text{ とするとき}$$

φ_β は Ω の state space に於ける $\sigma(\Omega^*, \Omega)$ 位相に関して $\{\varphi_{n,\beta}\}$ の集積点である。

δ が commutative normal $*$ -derivation ならばこの問題に対する解答は Yes である。はるかに強力な定理が得られている (cf. [5] §4.6)。

ここでは、簡単のため $\delta(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ を

仮定して述べることにする。

定理 4. δ を commutative normal $*$ -derivation

とし、次の条件をみたすものとする。

$$(i) \quad \mathcal{D}(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

$$(ii) \quad \delta(\mathcal{D}(\delta)) \subset \mathcal{D}(\delta)$$

$$(iii) \quad \delta(a) = i[h_n, a] \quad (a \in \mathcal{A}_n), \quad h_n \in \mathcal{A}_{n+1},$$

$$\text{かつ } h_n h_m = h_m h_n \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

このとき、 $\mathcal{L}_n$ を $\mathcal{A}_n$ と h_n で生成される $\mathcal{A}_{n+1}$ の

$*$ -部分代数とする。いま、 γ_β を C^* -dynamics $\{\mathcal{A}, \exp t\delta\}$

の β に於ける KMS state とすると、 $\mathcal{A}$ の中に次の条件を

みたす自己随伴元の列 $\{l_n\}$ が存在する。

$$(a) \quad l_n \in \mathcal{L}_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(b) \quad \delta(b) = i[l_n, b] \quad (b \in \mathcal{L}_n; n = 1, 2, \dots)$$

$$(c) \quad (\exp t\delta)(b) = (\exp t\delta i l_n)(b) \quad (b \in \mathcal{L}_n, n = 1, 2, \dots)$$

$$(d) \quad \gamma_\beta(b) = \frac{\tau(b e^{-\beta l_n})}{\tau(e^{-\beta l_n})} \quad (b \in \mathcal{L}_n; n = 1, 2, \dots).$$

問題 3 は 次の弱い形でも十分に興味深い。

問題 4. $\{\mathcal{A}, \alpha_t\}$ を UHF C^* -代数 $\mathcal{A}$ 上の

C^* -dynamics とし、 $t \mapsto \alpha_t$ は approximately inner

とする。このとき、 γ_β を $\{\mathcal{A}, \alpha_t\}$ の β に於ける KMS

state とすると、次の条件をみたす自己随伴元の列 $\{l_n\}$ が

存在するだろうか？

$$(i) \quad \|(\exp t\delta|_{\mathcal{L}_n})(a) - (\exp t\delta)(a)\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(a \in \mathcal{O}) \quad (\text{ここで } \alpha_t = \exp t\delta)$$

$$(ii) \quad \gamma_{n,\beta}(a) = \frac{\tau(a e^{-\beta \mathcal{L}_n})}{\tau(e^{-\beta \mathcal{L}_n})} \quad (a \in \mathcal{O}) \text{ とする}$$

γ_β は $\{\gamma_{n,\beta}\}$ の $\sigma(\mathcal{O}^*, \mathcal{O})$ 極限である。

上にあげてきた問題 1, 3 は commutative normal $\ast$ -derivations の場合は完全な解答がある。一方、定理 2 は commutative normal $\ast$ -derivations と normal $\ast$ -derivations の間を結ぶ重要な定理である。この定理を使って commutative normal $\ast$ -derivations の諸結果を normal $\ast$ -derivations に拡張できるのではないだろうか？

定理 3 をより強力な形にするには、次の問題を研究することが重要である

問題 5. $\delta \in \text{normal } \ast\text{-derivation}$ とする
如何なる条件の下で $\delta = \delta_1 + \delta_2$ (ここで δ_1 は commutative, δ_2 は bounded) とかけるだろうか？

問題 6. 上の問題が無条件で成立し、
と $\delta = \delta_1 + \delta_2$ (δ_1 , commutative; δ_2 , bounded) とかけない例をつくれ。

つまり、 $\{A, \exp t\delta\}$ は一般に C^* -dynamics となる。

ϕ は $\{A, \exp t\delta\}$ の inverse Temperature β に沿った KMS state となる。 $\{\pi_\phi, U_\phi, H_\phi\}$ は ϕ によって与えられる $\{A, \exp t\delta\}$ の covariant representation となる。 $U_\phi(t) = \exp itH$ は U_ϕ の Stone 表現となる。 $\mathcal{N} = \{a \mid \pi_\phi(a) = 0\}$ は A の two-sided ideal になる。簡単のため $\mathcal{N} = 0$ と仮定する。このとき、 π_ϕ は 1 対 1 となるから、 $\pi_\phi(A)$ と A は同一視されることになる。

したがって、 $A = \pi_\phi(A) \subset \pi_\phi(A)'' = M$ (ここで、 M は $\pi_\phi(A)$ の弱位相による閉包である W^* -代数)。 $A_2(\delta)$ は δ に沿って geometric 3元全体とする。 $h (= h^*) \in A_2(\delta)$ に対して

$$f(z, h)(a) = (ae^{iz(H+h)} \cdot 1_\phi, 1_\phi) \quad (a \in M, z \in \mathbb{C})$$

とおく。 $f(z, h) \in M_*$ 。 このとき、

$$f(0, h)(a) = (a \cdot 1_\phi, 1_\phi) = \phi(a).$$

$$f(i\beta, h)(a) = (ae^{-\beta(H+h)} \cdot 1_\phi, 1_\phi) (= \gamma^h_\beta(a) \text{ とおく})$$

とする。 $\gamma^h_\beta / \gamma^h_1$ は $\{A, \exp t(\delta + \delta_i h)\}$ の β に沿った KMS state である。ここで、 $e^{iz(H+h)} e^{-izH} \cdot 1_\phi$

$$= e^{iz(H+h)} \cdot 1_\phi \text{ であり、 } e^{iz(H+h)} e^{-izH} \text{ の閉包は } A$$

の元である。 $A_2(\delta)$ は A の一様位相で稠密であるので任意

の $h (= h^*) \in A$ に対して、 $\|h_n - h\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる

自己随半正元の列 $\{h_n\}$ は $A_2(\delta)$ から選ぶことができる。

さらに、若干の議論が必要である。\$\{\gamma_h\}\$ は \$M_*\$ の中で \$J\$ に関して Cauchy 列であることが示せる。従ってすべての \$h (= h^*) \in A\$ に対し \$\gamma_h\$ が定義できる。更に、 $\gamma_h / \gamma_h(1)$ は \$A, \exp t(\delta + \delta^*)\$ の \$\beta\$ に於ける KMS state であることは容易に示せる。拙著の中の主要定理の一つは、次の compactness 定理である (cf. [S] Th. 4.4.7)。

定理 5. \$A\$ は unital \$C^*\$ algebra, \$\{A, \exp t\delta\}\$ は \$C^*\$ dynamics とする。\$\phi\$ は \$A, \exp t\delta\$ の \$\beta\$ に於ける KMS state とし、\$r > 0\$ に対し \$K_r = \{\gamma_h \mid \|\gamma_h\| \leq r, h (= h^*) \in A\}\$ とする。このとき、\$K_r\$ は relatively \$\sigma(A^*, A^{**})\$-compact である (ここで \$A^*\$ は \$A\$ の双対空間、\$A^{**}\$ は \$A^*\$ の双対空間)。

この定理の拙著に於ける証明は複素関数論を使用する、かなり複雑なものである。以下で拙著の中の証明より若干単純化された証明の概要を述べる。より一層の単純化は興味深い問題である。

$$f(t, h)(a) = (a e^{it(H+h)} e^{-itH} \downarrow_\phi, \downarrow_\phi) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} f(t+i\beta, h)(a) &= (a e^{-\beta(H+h)} e^{it(H+h)} e^{-itH} \downarrow_\phi, \downarrow_\phi) \\ &= (e^{it(H+h)} e^{-itH} a e^{-\beta(H+h)} \downarrow_\phi, \downarrow_\phi) \end{aligned}$$

(\$\because \gamma_h / \gamma_h(1)\$ は KMS state for \$\{A, \exp t\delta\}\$ at \$\beta\$)

故有 z ,

$$f(t, h)(a) = \phi(a e^{it(H+R)} e^{-itH}) = f(0, h)(a e^{it(H+R)} e^{-itH}) \\ (t \in \mathbb{R}; h \in A_2(\delta))$$

$$f(t+i\beta, h)(a) = f(i\beta, h)(e^{it(H+R)} e^{-itH} a) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$z = z' e^{i\beta(H+R)} e^{-i\beta H} \in A.$$

$$p(\lambda) = (e^{-\lambda(H+R)} 1_\phi, 1_\phi) \quad (\lambda \in [0, \beta]) \geq 0$$

$$p'(\lambda) = -(e^{-\lambda(H+R)} (H+R) 1_\phi, 1_\phi)$$

$$p''(\lambda) = ((H+R) e^{-\lambda(H+R)} (H+R) 1_\phi, 1_\phi) \geq 0$$

故有 z , $p'(\lambda)$ 是单调增加函数。

$$p'(\beta) = -(e^{-\beta(H+R)} (H+R) 1_\phi, 1_\phi) = -(e^{-\beta(H+R)} h 1_\phi, 1_\phi) \\ = -(e^{-\beta(H+R)} h e^{\beta(H+R)} e^{-\beta(H+R)} 1_\phi, 1_\phi) \\ = -(h e^{-\beta(H+R)} 1_\phi, 1_\phi) = -\chi^h(h).$$

$$z, h \geq 0 \geq 0 \geq p'(\beta) \leq 0. \quad \text{故有 } p(\beta) \leq$$

$$p(0) = (1_\phi, 1_\phi) = \phi(1) = 1.$$

命题 1. $h (= h^*) \in A_2(\delta) \geq 0$,

$$(e^{-\beta(H+R)} 1_\phi, 1_\phi) \leq e^{\beta \|h\|}$$

$$\text{证明. } (e^{-\beta(H+R+\|h\|1)} 1_\phi, 1_\phi) = e^{-\beta \|h\|}.$$

$$(e^{-\beta(H+R)} 1_\phi, 1_\phi) \leq 1. \quad \text{故有 } (e^{-\beta(H+R)} 1_\phi, 1_\phi) \leq e^{\beta \|h\|}$$

$$|f(t, h)(a)| = |\phi(a e^{it(H+R)} e^{-itH})|$$

$$\leq \phi(a a^*)^{1/2} \phi(1)^{1/2} \leq \|a\|$$

$$\begin{aligned}
|f(t+ip, h)(a)| &= |\gamma^h(e^{it(H+h)}e^{-itH}a)| \\
&\leq |\gamma^h(e^{it(H+h)}\bar{e}^{-itH}a)| \\
&\leq \gamma^h(1)^{1/2} \gamma^h(a^*a)^{1/2} \leq e^{\frac{\beta}{2}\|h\|} \|\gamma^h\| \|a\| \\
&\leq e^{\beta\|h\|} \|a\|.
\end{aligned}$$

$z \mapsto f(z, h)(a)$ は $I_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \beta \text{ (又は } 0 \geq \operatorname{Im}(z) \geq -\beta)\}$ 上 τ 有界連続, $I_\beta^0 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < \beta \text{ (又は } 0 > \operatorname{Im}(z) > -\beta)\}$ τ 解析的 τ あり,

$$|f(z, h)(a)| \leq e^{\beta\|h\|} \|a\|.$$

$$\frac{d}{dt} f(t, h)(a) = (ae^{it(H+h)} h e^{-itH} 1_\Phi, 1_\Phi),$$

$$\text{ゆえに } \left| \frac{d}{dt} f(t, h)(a) \right| \leq \|a\| \|h\|$$

同様にして

$$\frac{d}{dt} f(t+ip, h)(a) = \gamma(e^{it(H+h)} h e^{-itH} a)$$

より

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} f(t+ip, h)(a) \right| &\leq \|\gamma^h\| \|h\| \|a\| \\
&\leq e^{\beta\|h\|} \|h\| \|a\|.
\end{aligned}$$

また

$$\frac{d}{dz} f(z, h)(a) = i(a e^{iz(H+h)} h e^{-izH} 1_\Phi, 1_\Phi)$$

$$(z \in I_\beta^0)$$

$i\mathbb{R}$ から τ ,

$$\left| \frac{d}{dz} f(i\Delta, h)(a) \right| \leq e^{\beta\|h\|} \|h\| \|a\|.$$

$$g(\lambda, h, a) = f(\lambda \cdot h)(a) \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Ascoli-Alzola の定理により $\{g(\cdot, h, a) \mid \|h\| \leq r, \|a\| \leq R\}$ は $C[0, \beta]$ ($[0, \beta]$ 上での連続関数全体のつくる C^* -代数) に於いて relatively compact である。 $a \in M$ に対し $\Omega_a = \{g(\cdot, h, a) \mid \|h\| \leq r\}$ とし, $\overline{\Omega_a}$ は Ω_a の $C[0, \beta]$ に於ける closure とする。

このとき $\overline{\Omega_a}$ は compact である。 $\Omega = \prod_{a \in M} \overline{\Omega_a}$ は weakly infinite product とする。 Ω は compact space である。 Φ は $h \mapsto \{g(\cdot, h, a) \mid a \in M\}$ と $A_2(\delta)^S$ の自己随伴部分 $A_2(\delta)^S$ から Ω への写像とし, $P = \{h \in A_2(\delta)^S \mid \|h\| \leq r\}$ とする。 このとき $\overline{\Phi(P)}$ は compact である。

ある。 $G \in \overline{\Phi(P)}$ に対し $G = \{G(a) \mid a \in M\}$ ($G(a) \in C[0, \beta]$)。 このとき, 有向集合 $\{g(\cdot, h_\alpha, a) \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$ が存在して,

$$\lim_{\alpha} \sup_{\lambda \in [0, \beta]} |g(\lambda, h_\alpha, a) - G(a)(\lambda)| = 0 \quad (a \in M).$$

$$\text{従って, } G(a+b) = G(a) + G(b), \quad G(\lambda a) = \lambda G(a)$$

$$(a, b \in M, \lambda \in \mathbb{C}). \quad \text{かつ, } |G(a)(\lambda)| \leq e^{\beta r} \|a\|.$$

即ち, $a \mapsto G(a)(\lambda)$ は有界線形汎関数である。

各 $a \in M$ に対し, 部分列 $\{h_{\alpha_n}\}$ が存在して,

$$\lim_n \sup_{\lambda \in [0, \beta]} |f(\lambda, h_n)(a) - G(a)(\lambda)| = 0$$

他方, $\{h_n\}$ の部分列 $\{h_{n_j}\}$ が存在して,
 $\{f(z, h_{n_j})(a)\}$ は I_β 上で $\mathbb{C}$ の compact subset 上
 で一様に有界で連続関数 $\tilde{G}(a)(z)$ に収束し, $\tilde{G}(a)(z)$ は
 I^0 上で解析的である. 従って,

$$G(a)(\lambda) = \tilde{G}(a)(\lambda) \quad (\lambda \in [0, \beta]).$$

もし, I_β 上で, 有界で連続, I_β^0 上で解析的関数
 $\alpha(z)$ が $[0, i\beta]$ 上で $\tilde{G}(a)$ と一致してゐれば $\alpha(z) = \tilde{G}(a)(z)$
 $(z \in I_\beta)$ である. 従って, 各 $G(a)$ に対して $\tilde{G}(a)$ は一意
 に定まる. さて, $\{f(i\beta, h) \mid \|h\| \leq r, h \in A(\delta)^S\}$
 が relatively $\sigma(M_*, M)$ -compact であることと等価,

このために, 線形汎関数 $a \mapsto G(a)(\beta) \ (a \in M)$
 が $\sigma(M, M_*)$ -continuous であることと等価である.

14 は M に属して separating かつ generating vector
 であるから, M の有界集合上の strong $*$ -topology は
 norm $\|a1_\phi\| + \|a^*1_\phi\|$ によって定義された位相と一致す
 る. $a \mapsto G(a)(\beta)$ が $\sigma(M, M_*)$ -continuous であ
 るとすると, 点列 $\{a_n\} \ (a_n \in M)$ が存在して,
 $\|a_n\| \leq 1$, $\|a_n1_\phi\| + \|a_n^*1_\phi\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$, かつ
 $|G(a_n)(\beta)| \geq \varepsilon > 0 \ (n=1, 2, \dots)$.

$$|f(t, h_2)(a)| = |(a e^{it(H+P_h)} e^{-itH} \mathbf{1}_\Phi, \mathbf{1}_\Phi)| \\ \leq \phi(a a^*)^{1/2} \phi(\mathbf{1})^{1/2}.$$

したがって,

$$|\widehat{G}(a)(t)| \leq \phi(a a^*)^{1/2} \phi(\mathbf{1})^{1/2}.$$

よって

$$|\widehat{G}(a_n)(t)| \leq \phi(a_n a_n^*)^{1/2} \phi(\mathbf{1})^{1/2} \rightarrow 0.$$

一方,

$$|\widetilde{G}(a_n)(z)| \leq e^{\beta r} \|a_n\| \leq e^{\beta r}$$

従って, 部分列 $\{\widetilde{G}(a_{n_j})\}$ が存在して, I_β^0 上の

すべての compact subset 上で一様に 1 つの有界解析関数 F に収束する.

$\{\widehat{G}(a_{n_j})\}$ は $(-\infty, \infty)$ 上で一様に 0 に収束するから, $F(z) = 0$ ($z \in I^0$). 他方, $\{G(a_{n_j})\}$ は relatively compact であるから, 部分列 $\{\widetilde{G}(a_{n_{j_k}})\}$ が存在して, $[0, \beta]$ 上で連続関数 p に一様に収束する $p(\lambda) = F(i\lambda)$ である. $p(0) = 0$ ($\lambda \in [0, \beta]$).

一方,

$$|G(a_{n_{j_k}})(\beta)| \geq \varepsilon > 0 \quad (j \geq 1)$$

これは矛盾である. (証明終)

問題 7. 定理 5 の簡単な証明があるだろうか？

参考文献

[S] S. Sakai, operator algebras in dynamical systems, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 41 (1991), Cambridge University press