

## 複素 Lie 群の余体積有限部分群

九大理 岩元 隆 (Takashi Iwamoto)

1.  $G$  を連結な Lie 群,  $H$  をその閉部分群とする。 $G/H$  が  $G$  の自然な作用で不変な体積要素をもち、それに関して  $G/H$  が体積有限な時、 $H$  は余体積有限であるという。また、 $G/H$  が compact の時  $H$  は一様であるという。一般には、余体積有限であれば、一様であるとも、一様であれば余体積有限であるともいえない。

さて、特に離散な余体積有限部分群を格子群といい、離散な一様部分群を一様格子群という。一様格子群は常に、格子群である。格子群、特に半単純 Lie 群における格子群については、Mostow, Margulis の剛性定理に代表される、様々な興味深い結果が得られている [1, 2]。

一方、一般の余体積有限群、一様部分群についてはあまり研究の手掛りがないようである [3]。ここでは、複素 Lie 群の余体積有限部分群、一様部分群について、述べたいと思う。

2. 複素 Lie 群の (必ずしも複素部分群ではない) 余体積有限部分群には次の著しい性質がある。

(2-1)  $G$  を  $GL(n, \mathbb{C})$  の複素連結 Lie 部分群,  $H \in G$  の余体積有限部分群とする。  $\mathbb{C}^n$  の  $\mathbb{C}$ -線型部分空間  $W$  は,  $H$ -不変ならば,  $G$ -不変である。

この命題は、初等的に証明できるが少々敏感であるので [4], 二二では別証を記す。かゝる部分群  $A < GL(n, \mathbb{C})$  に対し  $2$ .  $A_0$  は  $A$  の単位元の連結成分,  $A^*$  は  $A$  の Zariski 閉包を示す。

(2-1) の証明。  $G^* = H^*$  を示せば十分である。まず  $G$  は連結である事から  $G$  は  $G^*$  の中の正規部分群である事に注意する。  $(H^*)_0$  は  $H^*$  の Zariski 連結成分に一致するから、  
 $[H^*; (H^*)_0] < +\infty$  である。従って  $[G \cap H^*; G \cap (H^*)_0] < +\infty$  であり、かつ  $H \subset G \cap H^*$  であるから  $G \cap (H^*)_0$  は  $G$  で余体積有限である。よって  $(H^*)_0$  は  $G \cdot (H^*)_0$  で余体積有限である。従って Mostow [5] によつて、  $G \cdot (H^*)_0 / (H^*)_0$  は compact である。二二で  $G \cdot (H^*)_0$  の極大 compact 群を  $K$ ,  $K$  の Lie 環を  $\hat{K}$ ,  $\hat{K}$  の  $\mathbb{C}$ -線型包を  $\hat{K}_{\mathbb{C}}$ ,  $\hat{K}_{\mathbb{C}}$  に対応する複素 Lie 群を  $K_{\mathbb{C}}$  とする。  $K_{\mathbb{C}}$  は  $\mathbb{C}$ -代数群である。  $G \cdot (H^*)_0 / (H^*)_0$  は compact であつたから、Goto-Wang [3] によつて  $G \cdot (H^*)_0 = K \cdot (H^*)_0$  である。二二で、

$$G \cdot H^\# = G \cdot (H^\#)_0 \cdot H^\# = K \cdot (H^\#)_0 \cdot H^\# = K \cdot H^\# = K_G \cdot H^\#$$

であるから、 $G \cdot H^\#$  は  $G$  を含む  $\mathbb{C}$ -代数群である。よって、

$$G^\# = G \cdot H^\# \quad \text{つまり} \quad G^\# = K \cdot H^\# \quad \text{を得る。} \quad [H^\#; (H^\#)_0] < +\infty$$

であるから、 $G^\# = K \cdot (H^\#)_0$  である。Mostow [5] によれば

$(H^\#)_0$  は  $G^\#$  の半単純群を全て含む。また、S. P. Wang [6] に

よれば  $(H^\#)_0$  は  $G^\#$  の代数的 torus と中核部分群を全て含む。

よって  $G^\# = H^\#$  である。Q.E.D.

3.  $G$  を連結複素 Lie 群、 $H$  を  $G$  の複素余体積有限部分群とする。 $\hat{G}$ ,  $\hat{H}$  で、 $G$ ,  $H$  の Lie 環を表わし、 $\hat{G}$  上の随伴表現を  $\text{Ad}$  で表わすものとする。 $\text{Ad } H$  は  $\text{Ad } G$  の中で余体積有限で、 $\text{Ad } H \cdot \hat{H} = \hat{H}$  であるから、(2-1) によって  $\text{Ad } G \cdot \hat{H} = \hat{H}$  である。つまり  $H$  の単位元の成分  $H_0$  は  $G$  の正規部分群である。

(3-1)  $G$  を連結な複素 Lie 群、 $H$  を  $G$  の複素余体積有限部分群とする。この時  $H$  の単位元の成分は  $G$  の正規部分群である。

このことから、 $G, H$  の代わりに、 $G/H_0$ ,  $H/H_0$  を考えれば、余体積有限部分群の構造は、 $G/H_0$  の格子群  $H/H_0$  に帰着される事がわかる。

4. 単連結な複素 Lie 群の連結な一様複素部分群は、

H. C. Wang [17] によつて完全に分類されてゐる。同様の問題を余体積有限部分群について考えてみる。すなわち、 $G$  を単連結な複素 Lie 群、 $H$  を  $G$  の連結な複素余体積有限部分群とする。(3-1)によつて  $H$  は  $G$  の正規部分群であるから、 $G/H$  は複素 Lie 群であり、かつその Haar 測度は有限である。よつて  $G/H$  は compact な複素 Lie 群であるから torus でなくなくてはならない。一方  $G/H$  は単連結でなくなくてはならないから、 $G=H$  である。

(4-1)  $G$  を単連結な複素 Lie 群とする。 $G$  の連結な複素余体積部分群は  $G$  自身しかない。

又、こゝに議論を精密に行えば次を得る。

(4-2)  $G$  をその根基が単連結な複素 Lie 群とする。 $G$  の連結な余体積有限群は  $G$  自身しかない。

そこで、(4-2)において、余体積有限群を必ずしも複素部分群には限つてゐない事に注意する。

5. (2-1) の応用をもう一つだけ述べる。一般に、 $G$  を単連結で、compact 群を含まない Lie 群とし、 $H$  をその格子群とした時、 $G$  の自己同型  $\alpha, \beta$  が  $H$  の上で一致すれば、 $G$  上で一致するだろうか。例えば、 $G$  が compact factor を持たな

い半単純群、或いは、中零群であれば、 $\alpha$ と $\beta$ が一致する事が知られている。実は、単連結可解Lie群で反例があるのである[8]。ところが、複素Lie群の範疇においては、答は肯定的である。すなわち、

(5-1)  $G$ を単連結複素Lie群、 $H$ をその格子群とする。 $G$ の複素解析的自己同型 $\alpha, \beta$ は、 $H$ の上で一致すれば、 $G$ 上で一致する。

証明。  $\alpha \circ \beta^{-1} = \varphi$ とおき、 $\varphi$ に対応するLie環の自己同型を $d\varphi$ とする。 $G$ のLie環を $\hat{G}$ とし、 $\mathfrak{gl}(\hat{G})$ 上の $G$ の表現 $f$ を、 $g \in G$ に対応して

$$f(g) : \mathfrak{gl}(\hat{G}) \ni A \mapsto \text{Ad}(g) \cdot A \in \mathfrak{gl}(\hat{G})$$

で定義する。 $\text{Ad}(H)$ の $\mathfrak{gl}(\hat{G})$ での $\mathbb{C}$ -線型包を $W$ とする。 $f(H)W = W$ であり、 $f(H)$ は $f(G)$ の中で余体積有限だから(2-1)によつて  $f(G)W = W$  である。 $W$ は $\hat{G}$ の恒等写像 $I$ を含むから、 $g \in G$ に対応して

$$\text{Ad}(g) = \text{Ad}(g) \cdot I = f(g)(I) \in f(G)W = W.$$

つまり、 $\text{Ad}(G)$ の元は常に $\text{Ad}(H)$ の元の線型結合である。一方、 $h \in H$ に対応して仮定より  $\text{Ad}(h) \circ d\varphi = d\varphi \circ \text{Ad}(h)$  であるから、 $g \in G$ に対応して  $\text{Ad}(g) \circ d\varphi = d\varphi \circ \text{Ad}(g)$  を得る。つまり  $g \in G$ に対応して  $\varphi(g)g^{-1}$ は $G$ の中心に含まれる。そこで、 $\alpha : G \ni g \mapsto \varphi(g)g^{-1} \in G$ を考えれば、 $\alpha$ は $G$ から $G$ の

中の単位元の成分への準同型で、 $\alpha(H)$ は単位元である。よって  $\alpha(G)$  は Haar 測度有限で compact でなくてはならない。一方、 $G$  の中の単位元成分は vector 群であるから、 $\alpha(G)$  は単位元でなくてはならない。これで  $\varphi$  が恒等写像である事、事なれり。  $\alpha = \beta$  が示された。 Q. E. D.

6. 一方、複素 Lie 群の一樣複素部分群については余体積有限部分群程、事情は簡単ではないし、不明な点も多い。例えば、 $G$  を複素連結 Lie 群、 $H$  をその一樣複素部分群とした時、 $H$  の単位元の成分  $H_0$  は必しも  $G$  の正規部分群ではない。この点に関しては次が成り立つ。

(6-1)  $G$  を複素連結 Lie 群、 $H$  をその複素一樣部分群とする。  $H$  が unimodular ならば、 $H_0$  は  $G$  の正規部分群である。

== に、Lie 群  $H$  が unimodular であるとは、その随伴表現の行列式が常に 1 である事である。(6-1) の証明は、かなり面倒なので割合する。さらに、 $G$  自身が unimodular ならば (6-1) が自動的に成り立つ。

(6-2)  $G$  を unimodular な複素連結 Lie 群、 $H$  を  $G$  の一樣複素部分群とする。この時、次の (1) (2) は同値である。

(1)  $H$  は unimodular である。

(2)  $H_0$  は  $G$  の正根部分群である。

(3)  $H$  は余体積有限である。

7. unimodular な単連結複素 Lie 群の一般複素部分群の構造は、(6-2) と同様に、可解複素 Lie 群の格子群と半単純複素 Lie 群の複素一般部分群の構造に帰着できる事が、つい最近わかった。しかし、unimodular の仮定は本質的で、とり払えないように思う。尚、半単純 Lie 群の複素一般部分群については、Goto-Wang [3] と全く同様の program で一般格子群の構造に帰着できる。

## 参考文献

- [1] M. S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1972)
- [2] D. V. Alekseevski, Lie groups, Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Algebra, Topologiya, Geometriya, Vol. 20, 153-192 (1982)
- [3] M. Goto and H. C. Wang, Non-discrete uniform subgroups of semisimple Lie groups, Math. Ann. Vol. 198, 259-286 (1972)
- [4] T. Iwamoto, Density properties of complex Lie groups, to appear.
- [5] G. D. Mostow, Homogeneous spaces of finite invariant measure, Ann. of Math. Vol. 75, 17-37 (1962)

- [6] S. P. Wang, On density properties of  $S$ -subgroups of locally compact groups, Ann. of Math. Vol. 94, 325-329 (1971)
- [7] H. C. Wang, Closed Manifolds with homogeneous complex structure, Amer. J. Math. Vol. 76, 1-32 (1954)
- [8] T. Iwamoto, Lie group automorphisms preserving a lattice, to appear.