

An Antipodal Characterization of Distance Regular Graphs

大阪教育大学

富山 正人 (Masato Tomiyama)

Introduction

Γ : connected undirected simple finite graph

(Γ と vertex set を 同-視 する。)

(simple: loop と multiple edge が無い)

$\partial(u, v)$: distance between u and v

(length of shortest path)

$d = \max\{\partial(u, v) \mid u, v \in \Gamma\}$: diameter

$\Gamma_i(u) = \{x \in \Gamma \mid \partial(u, x) = i\}$

Definition

Γ : Distance Regular Graph (DRG)

$\Leftrightarrow P_{ij}^l = |\Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v)|$ depends only on i, j and $l = \partial(u, v)$

$k_i = P_{ii}^0 = |\Gamma_i(u)|$, $k = k_1$: valency

Γ を DRG とするとき、 Γ の良い構造を持つことが多く
 Γ の Δ が DRG になることもある。そこで、graph Δ を与
 え、 $\Gamma \cong \Delta$ となる DRG Γ の分類を目標とするのが
 antipodal characterization である。

Definition

clique $\Leftrightarrow$ any two vertices are adjacent

coclique $\Leftrightarrow$ no two vertices are adjacent

Strongly Regular Graph (SRG)

$\Leftrightarrow$ DRG with diameter 2

(一般に SRG は clique の union も含むが、ここでは
 diameter が 2 であるもののみに SRG とする。)

Theorem (H. Suzuki)

Γ : DRG with diameter d

For $\exists \alpha \in \Gamma$, $\Gamma(\alpha) \neq \text{coclique}$

$\Rightarrow d \leq f(k_d)$ (diameter は k_d の関数でおさえられる。)

この定理によりある $\Delta (\neq \text{coclique})$ に対して、 $\Gamma \cong \Delta$
 となる DRG Γ は有限個しかないのである。

Theorem (A. Hiraki and H. Suzuki)

Γ : DRG with diameter d

For $\forall \alpha \in \Gamma$, $\Gamma_d(\alpha)$: SRG

For $\forall \beta \in \Gamma_d(\alpha)$, $\Gamma_d(\alpha) \cap \Gamma_d(\beta)$: coclique

$\Rightarrow d=2$

Theorem (Y. Beronque)

Γ : DRG with diameter d

$\Gamma_d(\alpha)$: SRG for $\forall \alpha \in \Gamma$

$|\Gamma_d(\alpha)| = kd \leq 2^d$

$\Rightarrow d=2$ or $\Gamma \cong J(2d+2, d)$ (Johnson graph)

現在知られている DRG Γ で $\Gamma_d(\alpha)$ が SRG となるものは、 $J(2d+2, d)$ と同型であるか、diameter が 2 となるものだけである。

Main Theorem

Γ : DRG with diameter $d \geq 3$

$\Gamma_d(\alpha)$: SRG for $\forall \alpha \in \Gamma$

For $\forall \beta \in \Gamma_d(\alpha)$, $\Gamma_d(\alpha) \cap \Gamma_d(\beta)$: clique

$\Rightarrow d=3$ and $\Gamma \cong J(8, 3)$

Intersection Diagram

Γ : DRG with diameter d とする。

$C_i = P_{i-1}^i$, $a_i = P_i^i$, $b_i = P_{i+1}^i$: intersection numbers とおく。

Main theorem の証明の手段となる Intersection diagram を紹介する。

$u, v \in \Gamma$ with $d(u, v) = d$

$$D_{\frac{d}{2}}^u = D_{\frac{d}{2}}^v = \Gamma_i(u) \cap \Gamma_j(v)$$

とする。 ($|D_{\frac{d}{2}}^u(u, v)| = P_{i-\frac{d}{2}}^u$)

三角不等式より

(1) $D_{\frac{d}{2}}^u = \emptyset$ if $d > i+j$ or $d < |i-j|$

(2) There is no edge between $D_{\frac{d}{2}}^u$ and $D_{\frac{d}{2}}^v$,

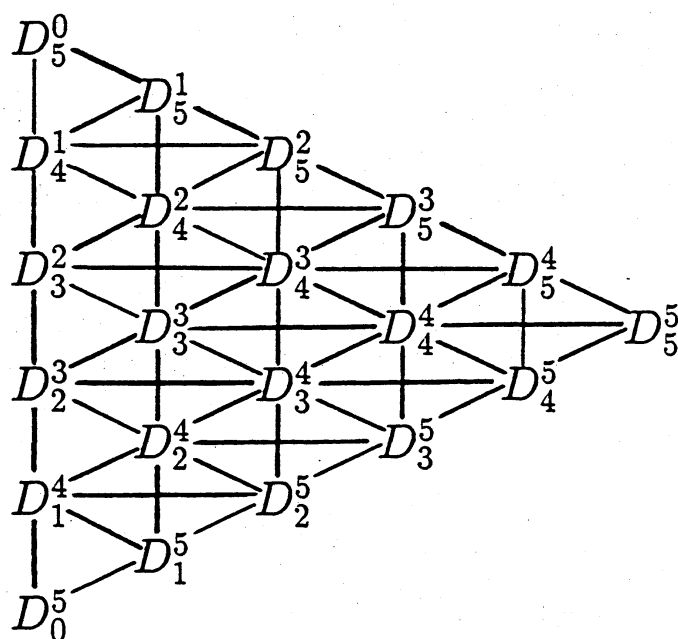
if $|i-f| > 1$ or $|j-g| > 1$

Intersection Diagram とは $\{D_{\frac{d}{2}}^u\}$ とそれらを結ぶ line とでつくられた図形で。

$D_{\frac{d}{2}}^u \text{ --- } D_{\frac{d}{2}}^v$: possibility of edges

とし、 $D_{\frac{d}{2}}^u$ と $D_{\frac{d}{2}}^v$ の間に edge がないことがわかると、その line を消す。

たとえば、diameter 5 の rank d diagram は次のようになる。



以下、Main Theorem の仮定のもとで話を進めていく。

まず、rank d 及び rank 3 の diagram がどのような形になるかを見る。(これから $\Delta = \Gamma(\alpha)$ とする。)

$\alpha, \beta \in \Gamma$ with $\delta(\alpha, \beta) = d$
 とすると、 (α, β) に関する
 rank d diagram は右の形に
 なる。

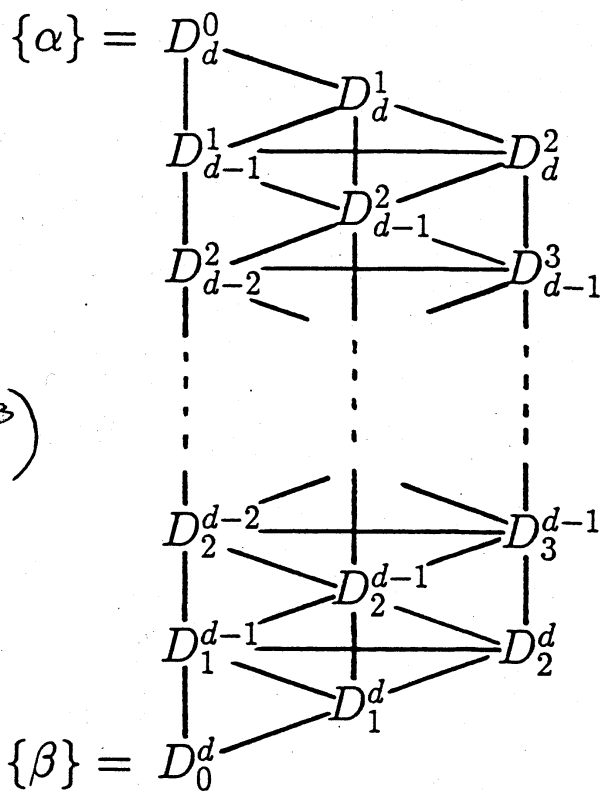
☺ Suppose $\exists x \in D_{\frac{d}{2}}^{\bar{i}} \left(\begin{matrix} \exists \bar{i} \geq 3, \exists \bar{j} \geq 3 \\ \bar{i} + \bar{j} \geq d+3 \end{matrix} \right)$

Then $\exists y \in D_{\frac{d}{2}}^{d-\bar{i}}(x, \alpha)$

$$\delta(y, \beta) \geq |\delta(y, x) - \delta(x, \beta)|$$

$$= |d - (\bar{i} + \bar{j})| \geq 3$$

So $\exists \beta \in D_{\frac{d}{2}}^d(\alpha, \beta)$ for $\exists \ell \geq 3$



しかし、仮定より $D_2^d(\alpha, \beta) = \emptyset$ for $d \geq 3$ 。よって矛盾。

ここでもわかることは次のことである。

$$|D_1^d(\alpha, \beta)| = P_{\beta 1}^d = a_d = \bar{k}$$

$$|D_2^d(\alpha, \beta)| = P_{\beta 2}^d = \bar{k}_2 \quad \text{where } \bar{k} = |\Delta_1(\beta)|, \bar{k}_2 = |\Delta_2(\beta)|$$

$D_2^d(\alpha, \beta)$: clique

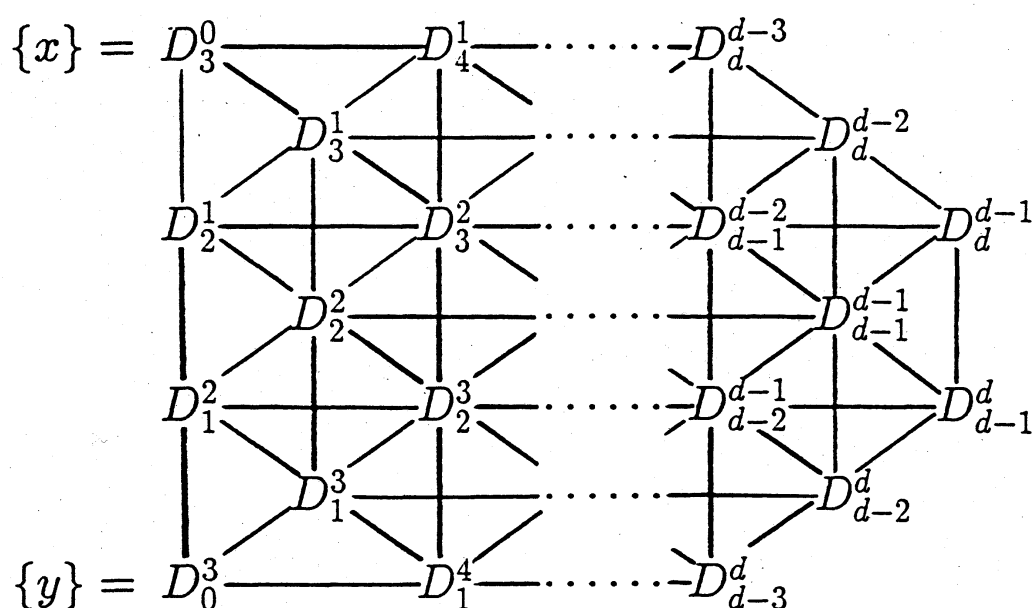
$$1 \leq b_{d-1} \leq \bar{k}_2$$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{2} \text{ For } \forall x \in D_{\beta-1}^d(\alpha, \beta), \\ b_{d-1} = |\Pi(\alpha) \cap \Pi(x)| \leq |\Pi(\alpha) \cap \Pi(\beta)| = \bar{k}_2 \end{array} \right)$$

$x, y \in \Gamma$ with $d(x, y) = 3$

とすると (x, y) に関する rank 3 diagram は 同いように

考えると下のようになる。



$D_{\beta-1}^d(x, y)$: clique

Proof of Main Theorem

これから Main Theorem の証明を大まかに説明する。

Lemma 1

Let α, β with $\partial(\alpha, \beta) = d$

For $\forall x \in D_2^d(\alpha, \beta)$, $\nexists y \in D_{d-2}^d(\alpha, \beta)$ such that $\partial(x, y) = d-2$

Proof

$\exists y \in D_{d-2}^d(\alpha, \beta)$ with $\partial(x, y) = d-2$ とする。

すると $D_2^d(\alpha, \beta)$: clique

だから

for $\forall \gamma \in D_2^d(\alpha)$,

$$\partial(\gamma, \gamma) \leq d-1$$

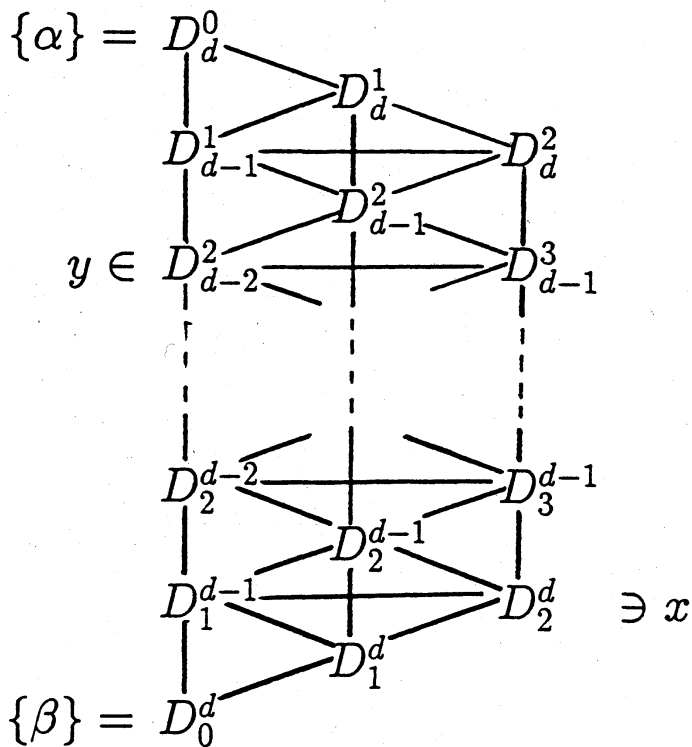
よって

$$D_2^d(\alpha, \gamma) = \emptyset$$

$$\text{i.e. } P_{\alpha\gamma}^d = 0$$

これは $P_{\alpha\gamma}^d \neq 0$ に矛盾 //

$$\left(\begin{array}{l} \text{一般に} \\ k_2 P_{i\bar{j}}^e = k_i P_{\bar{j}}^e = k_j P_{e\bar{i}}^e \\ \text{このより} \\ P_{i\bar{j}}^e = 0 \Rightarrow P_{e\bar{j}}^e = P_{e\bar{i}}^e = 0 \end{array} \right)$$



Lemma 2

- (1) For $\forall \alpha, \beta \in \Gamma$ with $\partial(\alpha, \beta) = d$,
 there is no edge between $D_2^d(\alpha, \beta)$ and $D_1^{d-1}(\alpha, \beta)$
- (2) For $\forall \alpha \in \Gamma$ and $\forall \beta, \gamma \in \Gamma(\alpha)$ with $\partial(\beta, \gamma) = 2$,
 $\Gamma(\beta) \cap \Gamma(\gamma) \subseteq \Gamma(\alpha)$

Proof

- (1) $\exists \delta \sim \beta$ with $\delta \in D_2^d(\alpha, \beta)$ $\{\alpha\} = D_d^0$
 $\delta \in D_1^{d-1}(\alpha, \beta)$

とすると δ は β に $\partial(\beta, \delta) = 1$ である

$\exists x \in D_2^{d-2}(\alpha, \beta)$ s.t.

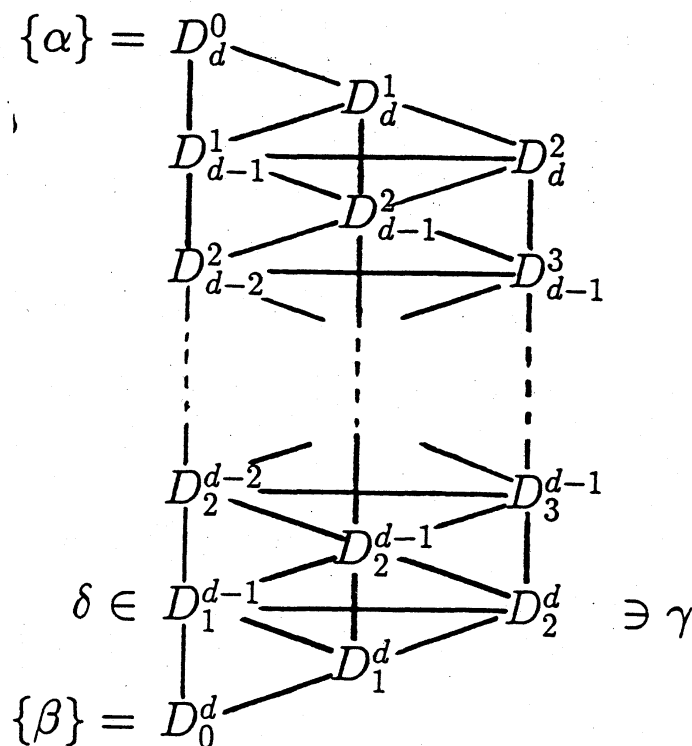
$\partial(x, \delta) = d-3$

すると $\partial(x, \gamma) = d-2$

これは Lemma 1 に

矛盾。 //

(2)



$\beta, \gamma \in \Gamma(\alpha)$ with $\partial(\beta, \gamma) = 2$ とすると, $\delta \in D_2^d(\alpha, \beta)$

(1) により $D_1^{d-1}(\alpha, \beta)$ と $D_2^d(\alpha, \beta)$ の間の line は消えていく

すなわち $\Gamma(\beta) \cap \Gamma(\gamma) \subseteq D_1^d(\alpha, \beta) \subseteq \Gamma(\alpha)$ //

Lemma 3

$$P_{d+1}^2 = 1, \quad k_2 = k_d P_{d+2}^d$$

証明は、Lemma 2 を使うと $P_{d+1}^2 = 1$ を得る。すると
 $k_2 = k P_{d+1}^2 = k_d P_{d+2}^d$ がわかる。

Lemma 4

For $\forall x, y$ with $\delta(x, y) = 2$

Let $\{z\} = D_d^d(x, y)$

$$d \geq 4$$

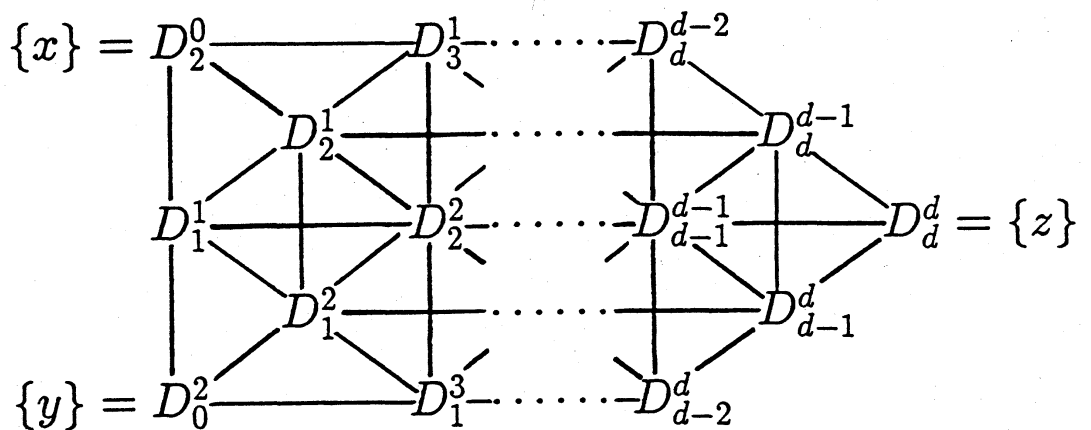
$$\Rightarrow D_{d-1}^d(x, y) \subseteq \Gamma_1(z), \quad D_{d-2}^d(x, y) \subseteq \Gamma_2(z)$$

$$\text{Moreover } P_{d+1}^2 = \overline{k}, \quad P_{d+2}^2 = \overline{k_2}$$

証明は、Lemma 1 と 2 を使う。

この Lemma 4 を (x, y) に関する rank 2 diagram で

考えると次のことがわかる。



$$D_{d-1}^d(x, y) = D_1^d(x, z)$$

$$D_{d-2}^d(x, y) = D_2^d(x, z)$$

Lemma 5

Let x, y with $\partial(x, y) = 3$

$d \geq 4$

$\Rightarrow$ For $\forall u \in D_{d-1}^{d+1}(x, y)$, $\forall v \in D_{d-1}^d(x, y)$,

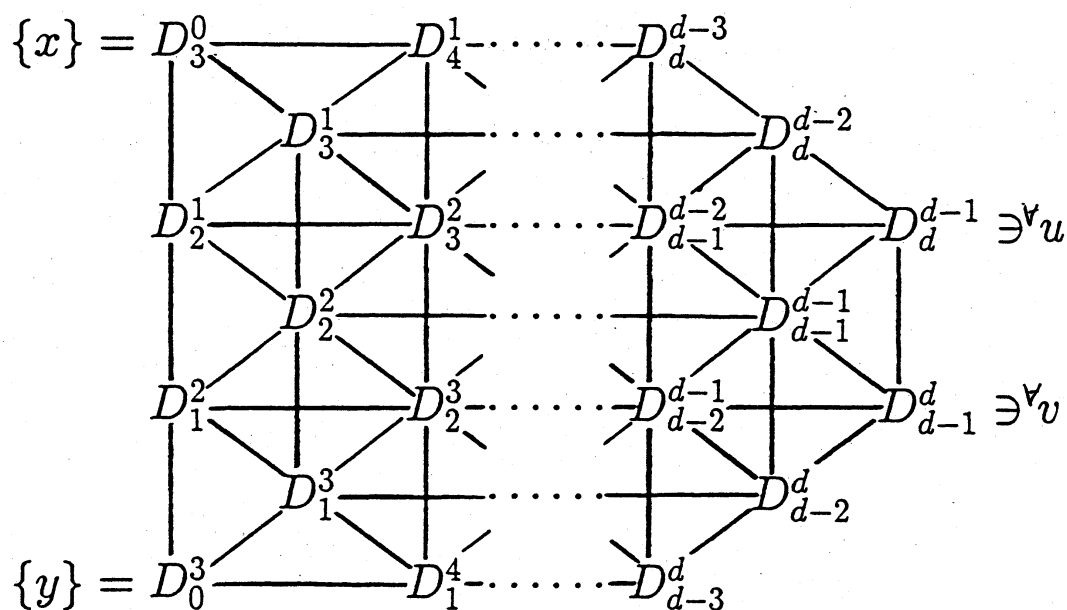
$$u \sim v$$

Moreover $P_{d-1}^3 = b_{d-1}$

証明は Lemma 4 を使う。

この Lemma 5 を (x, y) に関する rank 3 diagram で

考えると次のようになる。



これらの Lemma から次の Lemma 6 を得る。

Lemma 6

$$d \geq 4$$

$$\Rightarrow b_{d-1} = \overline{k_2} \quad \text{or}$$

$$b_{d-1} = 1, \quad p_{d-1}^1 \geq 2$$

この Lemma 6 は、前に示した $1 \leq b_{d-1} \leq \overline{k_2}$ から考えると一番強い条件が、diameter を 4 以上とすると得られることを示している。このあと、両方の条件とも矛盾を導くことができ、diameter は 4 以上にはならないことがわかる。すなわち、diameter が 3 になる。そして、diameter が 3 のときには $\Gamma \simeq J(8, 3)$ であることがわかり、Main Theorem の証明が終る。

最後に Lemma 6 を証明しておく。

Proof

$d(\alpha, \beta) = d$ とする α, β をとり、 $b_{d-1} < \overline{k_2}$ とし、 $b_{d-1} = 1$ と $p_{d-1}^1 \geq 2$ を示す。

今、 $b_{d-1} < \overline{k_2}$ であるから、 $\forall x \in D_{\overline{k_2}}^{d-1}(\alpha, \beta)$ に対し $\exists y \in D_2^d(\alpha, \beta)$ s.t. $x \neq y$ 。

(α, β) に関する rank d diagram で考える。

すると $D_d^2(\alpha, \beta)$ が

$$\{\alpha\} = D_d^0$$

clique E から, $\partial(x, \beta) = 2$

ここで x, β から距離 d

すなわち $\bar{\alpha}(x), \bar{\alpha}(\beta)$ が

右の rank d diagram の
どの部分にあるかを調
べる。

まず $\bar{\alpha}(\beta)$ を調べる。

Lemma 3 と $\partial(\beta, \beta) = 2$

より

$\{\alpha\} = D_d^d(\beta, \beta)$ となる。

$$\{\beta\} = D_0^d$$

ここで, $X = D_{d-1}^d(\beta, \beta)$, $Y = D_{d-2}^d(\beta, \beta)$ とすると,

Lemma 4 より

$$X \subseteq D_{d-1}^1(\alpha, \beta)$$

$$Y \subseteq D_{d-2}^2(\alpha, \beta)$$

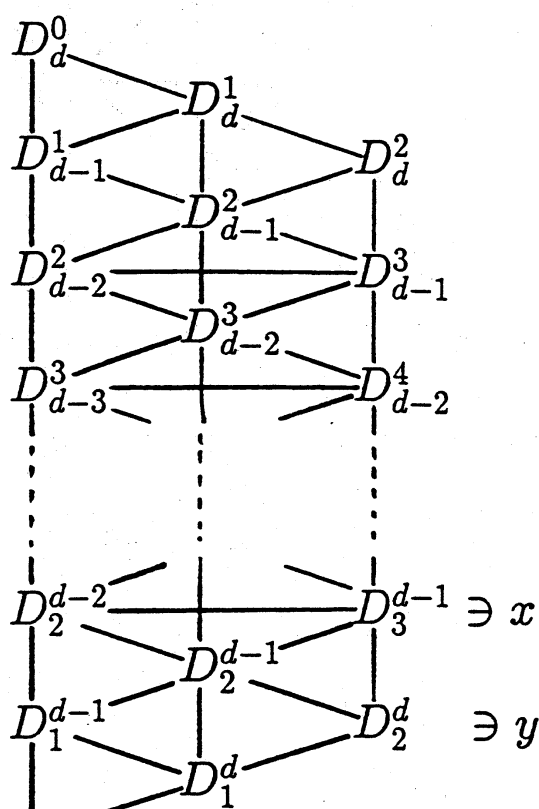
$\bar{\alpha}(\beta) = \{\alpha\} \cup X \cup Y$ であることから, $\bar{\alpha}(\beta)$ の場所がわか, た。

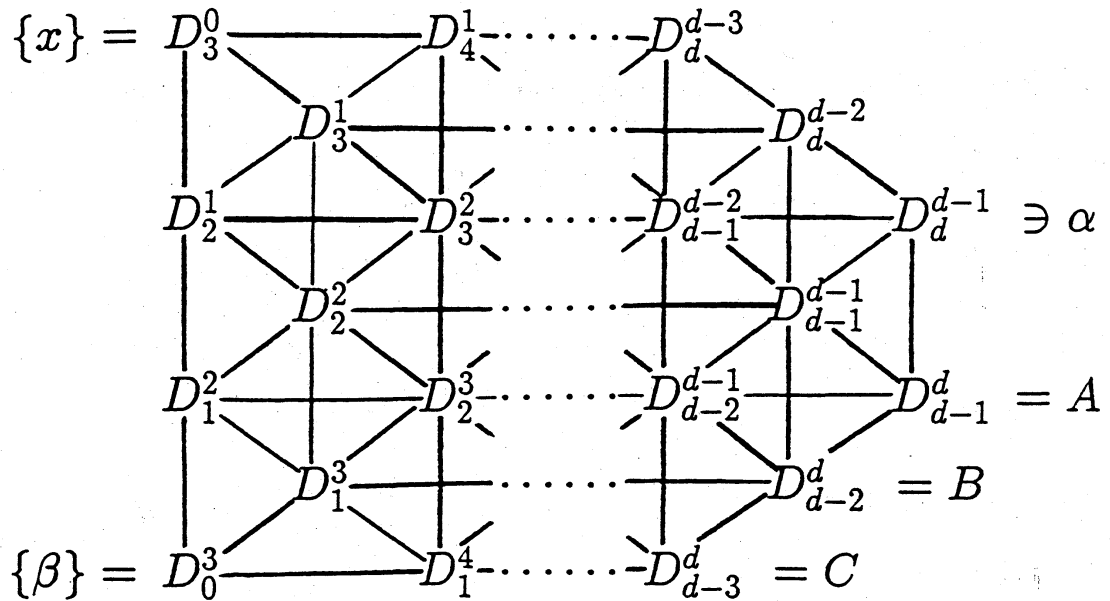
次に $\bar{\alpha}(x)$ について, $\partial(x, \beta) = 3$ であることから,

(x, β) に関する rank 3 diagram で考える。

すると $\alpha \in D_{d-1}^1(\alpha, \beta)$ がわかる。ここで,

$A = D_{d-1}^1(\alpha, \beta)$, $B = D_{d-2}^2(\alpha, \beta)$, $C = D_{d-3}^3(\alpha, \beta)$ とする。





すると、Lemma 5 より A はすべての点が α から距離 1 となり、 $D(x) = A \cup B \cup C$ が SRG であることから、 B の点は α から距離 2 か 3、 C の点は α から距離 3 となる。よって、

$$A \subseteq D_{d-1}^1(\alpha, \beta)$$

$$B \subseteq D_{d-2}^2(\alpha, \beta) \cup D_{d-2}^3(\alpha, \beta)$$

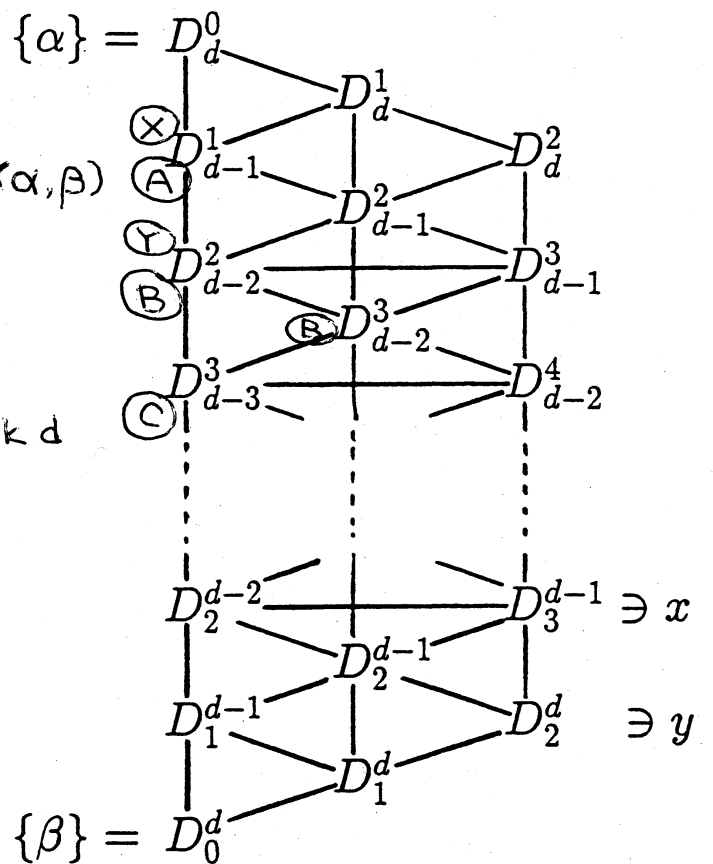
$$C \subseteq D_{d-3}^3(\alpha, \beta)$$

となることがわかる。

こゝらを (α, β) の rank d diagram で考えると

右の図になる。

ここで $\mu_{\alpha\beta} = 1$ である
 ことと $\delta(x, y) = 2$ である
 ことから、



$\{z\} = D_{\beta}^d(x, y)$ とする。

すると、左きほどの図の $D(\alpha)$ と $D(y)$ の共通部分より

$$z \in D_{\beta-1}^d(\alpha, \beta) \cup D_{\beta-2}^d(\alpha, \beta)$$

と仮定することがわかる。よって

$$\partial(\alpha, z) = 1 \text{ or } 2$$

今、 $\partial(\alpha, y) = 2$ と Lemma 2(2) より

$$D(z) \supseteq \Gamma(\alpha) \cap \Gamma(y)$$

$D_{\beta}^d(\alpha, \beta)$ が clique であることから

$$\Gamma(\alpha) \cap \Gamma(y) \supseteq \Gamma(\alpha) \cap D(\alpha)$$

よって

$$D(z) \cap D(\alpha) \supseteq (\Gamma(\alpha) \cap D(\alpha)) \cup \{y\}$$

ここで $i = \partial(\alpha, z)$ とすれば、

$$p_{\beta}^i \geq b_{\beta-1} + 1 \geq 2$$

しかし、 $p_{\beta}^2 = 1$ より

$$\partial(\alpha, z) = 1 \quad \text{よって} \quad z \in D_{\beta-1}^d(\alpha, \beta)$$

となる。

ここで Lemma 4 より

$$D_{\beta-1}^d(\alpha, y) = D_1^d(x, z)$$

$$D_{\beta-2}^d(\alpha, y) = D_2^d(x, z)$$

$D(\alpha) = A \cup B \cup C$ において、 $z \in D_{\beta-1}^d(\alpha, \beta)$ と Lemma 1

から、

$$B(x) \cap B_{-2}(y) = B(x) \cap B_2(z) = C \cup (B \cap D_{d-2}^3(\alpha, \beta))$$

よ、 τ

$$|C \cup (B \cap D_{d-2}^3(\alpha, \beta))| = |B(x) \cap B_2(z)| = \overline{k}_2$$

よ、 τ

$$|B \cap D_{d-2}^3(\alpha, \beta)| = |B(x) \cap B_2(z)| = \overline{k}$$

$$|A| = |\{z\}| = 1$$

$\cup \in \mathcal{A}$, τ Lemma 5 より

$$b_{d-1} = \overline{p}_{d-1} = |D_{d-1}^d(x, \beta)| = |A| = 1 \quad //$$