

高校数学教師が感じる疑問点と教員養成における 数学専門科目 — 部分分数分解について —

京都教育大学 大竹 博巳 (Hiromi Ohtake)
Kyoto University of Education

1 はじめに

2011 年 2 月に高校の数学教員を中心としたあるメーリングリストに部分分数分解の係数決定方法についての投稿があり, しばらくの間この問題に関するやり取りが続いた. 最初の投稿が質問という形ではなく, 後輩教員からの質問とそれへの回答の報告であったためか, 議論が煮詰まる前に終わってしまったように思え, 筆者には物足りなさが残った.

この問題は, 同年 8 月に開催された日本数学教育学会全国大会でも川谷内 [1] が高校数学における疑問点の一つとして発表で取り上げていた. 多くの高校数学教員が関心をもっている問題なのであろう.

2 分数式の部分分数分解

部分分数分解の係数決定についての問題とは以下のようなものである.

問題 1. 等式 $\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$ が x についての恒等式となるように, 定数 a, b の値を定めよ.

数研出版の教科書 [2] を参考にすると, この問題に対する高校数学での標準的な解は次のようになるだろう.

解 1. 両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けて得られる等式

$$3 = a(x+2) + b(x-1)$$

も恒等式である. 右辺を整理すると

$$3 = (a+b)x + (2a-b)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a+b=0, \quad 2a-b=3$$

これを解いて $a=1, \quad b=-1$

この係数比較法による解法他に、参考書等には下記の数値代入法による解法が載っている。

解 2. 両辺の分母を払うと

$$3 = a(x+2) + b(x-1) \quad \dots\dots ①$$

x に 1, -2 を代入すると, $a = 1, \quad b = -1$

この解法の良い点は計算が容易で、解が直ちに求まることである。また、今の生徒は計算を不得手とし、計算結果のチェックもしないものが多いので、連立方程式を解く段階で計算ミスをし、それに気が付かないまま誤答を提出したりする。このようなことが原因となって数学に対する興味をなくされたり、苦手意識を持たれるのは教員として不本意なことである。これらの理由により、係数比較法に加えて、この数値代入法が紹介されているのであろう。しかしながら、上の解 2 には、最初の分数式が定義されていない 1 と -2 を x に代入しても良いのかという所に問題が生じる。最初に述べたメーリングリストのやり取りというのも、このような代入を行なって解答を導き出しても良いのかという若手教員からの質問に対して、よろしくないと回答しましたという報告を出発点にしている。

この問題点に関して、川谷内 [1] では、2 次以下の多項式の等式 ① は 1, -2 以外のすべての実数に対して成立している、特に、三つの異なる実数 x に対して成立するから、すべての実数 x に対して成立する恒等式となる。ゆえに、 $x = 1, -2$ に対しても成立するという説明を加えれば、この問題点は解決するとし、部分分数分解は数値代入法で扱うのがよいように思うと述べている。

最初に紹介したメーリングリストでも同様の解決法を示した書き込みがあった一方、この問題の場合は数値代入法で即座に解けるが、そのことが定義域外にある値を代入することが許されるような誤解を生むことが問題であり、係数比較法を利用するか、定義域内の値を代入して得られる連立方程式を利用することを指導すべきであるという書き込みもあった。

3 教科書の記述

数研出版 [2] の第 1 章「式と証明」の第 3 節「恒等式」は次のような構成になっている。まず、恒等式を以下のように定義する。

$$\text{等式 } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad \frac{y}{x+1} + \frac{y}{x-1} = \frac{2xy}{x^2-1}$$

のように、含まれている各文字にどのような値を代入しても、その両辺の式の値が存在する限り、等式が常に成り立つとき、その等式をそれらの文字についての **恒等式** という。

この恒等式の定義の後に、例題や問を交えながら、

- (1) a, b, c を定数としたとき, 等式 $ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式であるならば, $a = b = c = 0$ であることを, x に $0, \pm 1$ を代入して得られる連立方程式を解くことにより示す. 逆も自明であるので, これは必要十分条件である.
- (2) この主張から, 等式 $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x についての恒等式であるための必要十分条件が $a = a', b = b', c = c'$ であることを導く.
- (3) 以上の主張が一般の多項式に対しても成り立つ. つまり, 多項式の恒等式に対しては係数比較が可能である (説明なしに事実として提示).
- (4) 一般に, P, Q が x についての n 次多項式であるとき, $P = Q$ が $n+1$ 個の異なる x の値に対して成り立つならば, この等式が x についての恒等式となることが知られている (説明なしに事実として提示).

という順序で説明を進めている. この教科書では, 例題と問により係数比較法と数値代入法のどちらも身に付けさせたいという意図が感じられる. そして, その後の例題で分数式の部分分数分解の係数決定問題が出題され, 係数比較法による解 (前述の解1の解法) が記載されている. その例題の分数式は数値代入法で解くメリットがないようなものを選んであるが, その後の練習では数値代入法の方が解きやすい問題が出題されている. なお, 数値代入法で問題とされる点が解1にもあるのではないかと, つまり, 「両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けて得られる等式」が成立するのは $x \neq 1, -2$ のときであるにもかかわらず, (多項式としての) 「恒等式である」と三行目にあるのは問題ではないかと疑問に思えるかも知れないが, これは上記の証明なしに提示された (4) の後で問題が出題されていることから, (4) を利用していると解釈できる. 教科書は, 教師が補足して説明することを前提として執筆されているため, このような記述になっているのであろう.

他の教科書 [3, 7, 8] でもほぼ同様に記載されている. ただし, これらの教科書には数値代入法についての記載はなく, [3, 8] では上記 (1), (2) の証明部分が省かれていたり, 一般の場合の言及 (3), (4) がなかったりしている.

一方, 啓林館の教科書 [9] では恒等式の定義が次のようになっていて, 他と異なっている.

たとえば, 等式

$$\begin{aligned} x^2 - x &= x(x-1) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

では, どちらも左辺を変形すると右辺になる.

このように, 等式で両辺が式として等しいとき, つまり, 両辺が同じ式に変形されるとき, この等式を **恒等式** という.

一般に, 式の変形によって導かれる等式は恒等式である.

つまり、式として等しいとき恒等式であると定義しているのであり、式が表す関数として等しいとき恒等式であると定義しているのではないのである。したがって、係数比較法は、証明が必要な主張ではなく、恒等式の定義から直ちに従うことになる。

この教科書では数値代入法が

x の整式についての恒等式では、両辺が式として等しいので、 x にどのような値を代入しても等式が成り立つ。

として、例とともに言及されていて、数値代入法の有効性が感じられる問が出題されている。

旺文社の教科書 [12] では、恒等式の定義は数研出版と同じであるが、定義の後に

恒等式とは、等式の両辺にある式が見かけの違いを除けば完全に一致するものである。

という記述があり、実質的には恒等式を啓林館 [9] と同様に扱おうとしている。これらの教科書間での違いは指導要領の解釈の違いに由来するのであろう。指導要領解説 [13] p.55 には、「式と証明」の内容と内容の取り扱いについて、従前では数学 III で扱われていた分数式の計算を数学 II で扱うことになったことと、扱う内容についての注意点を述べた後に、「等式、不等式の基本性質などを用いて式の証明を扱い、代数的な教材を基にして論証についての理解を深める。ここで、等式の証明に関して恒等式を扱うことも考えられる。」という記述がある。また、同解説の第 4 節 数学 III 「積分法」 (p.75) には「不定積分の計算のために、例えば分数関数を部分分数に分けたり、三角関数の公式を導いたりすることが必要になる場合にはここで補充する」とある。

ちなみに、一つ前の指導要領 (平成元年改訂) のときには、恒等式は数学 A の「数と式」で、部分分数分解は数学 III の「不定積分」で扱われていた。恒等式は、数研出版の教科書 [4] では

整式の乗法や因数分解の公式のように、式の変形で導かれる等式は、含まれている各文字にどのような値を代入しても、その両辺の式の値が存在する限り常に成り立つ。このような等式を **恒等式** という。

と定義されていて、係数比較法と数値代入法のどちらについても記述がある。啓林館の教科書 [10] では、[9] と同じく、両辺が式として等しい等式を恒等式と定義していて、係数比較法のみ記述がある。ただし、分数式は数学 III において導入されるので、この段階では 2 次以下の多項式に限って説明されている。部分分数分解については両社の数学 III の教科書 [5,11] とともに、不定積分の計算に必要な最低限の記述に留め、係数比較法を用いて未定係数を求めている。これらの教科書での部分分数分解には、積分の計算という具体的な適用対象があったため、目的が明確であったが、平成 11 年改訂の指導要領に基づく教科書では、

部分分数分解とその適用対象がカリキュラム上離れたため、部分分数分解自体が考察の対象となっているように読める。

なお、平成 21 年改訂の指導要領においても分数式の計算は数学 II の「いろいろな式」で扱われることになっている。同解説 [15] では、数学 II の「等式と不等式の証明」の部分 (p.30) が「ここでは、等式や不等式の基本的な性質、実数の性質、絶対値の性質、相加・相乗平均の関係などを用いて、等式や不等式が成り立つことを証明する。これらの活動を通して、論理的な思考力や表現力を養う。指導に当たっては、一つの式の証明について複数の証明方法を取り上げ、それらを対比させるなどの活動を取り入れることが大切である。なお、等式の証明に関連して恒等式の未定係数法を扱うことも考えられる。」と変わっている。

4 数学専門科目担当教員の観点から

多くの学生は、小学校・中学校・高校で学習する算数・数学は、一度学んで来ているので、よく知っていて、教えることができると思っている。しかしながら、前節で見たように、指導内容は指導要領の改訂に応じて変わる。学生が経験したカリキュラムは、その一時期のものに過ぎない。分数関数の積分を計算するために数学 III で指導されていた部分分数分解が指導要領の改訂により数学 II に移った。このとき、分数式の部分分数分解はどのようなものとして認識すべきなのか、恒等式の定義が二通りあったことはどのように解釈すべきなのか、どこに重点をおいて指導すべきなのか。これらのことに対応するには、数学やその対象についての本質を正しく認識していることが必要であろう。部分分数分解の問題に限っても、それを正しく認識するために次のことは理解していた方が良い。

(i) 多項式と多項式関数、分数式と分数関数、一般に関数の表現と関数の区別

中学校数学で文字式が本格的に導入され、一次関数等を学ぶが、中学生であるということを考慮して、そこでは式としての扱いのみに留めてある。高校数学でも明示的にこれらの区別を説明されることはない。しかし数学の教員であるならば、これらは区別すべきであることを意識していなくてはならない。多項式の場合には、表現としての多項式と関数としての多項式が一对一に対応する。つまり、式として違えば関数としても違っている。これが係数比較法が利用できる理由である。さらに、多項式関数に係数比較法が使えるということは、関数 $1, x, x^2, \dots$ が一次独立であることを意味している。部分分数分解は、いろいろな分野の内容に繋がりをあることを自覚させるのに役立つ題材であろう。

(ii) 分数式の意味

学生は分数式がその分数のような表現から割り算をしていると受け取っているかも知れないが、分数式は二つの多項式の比として定義されているものである。よって、分母を 0 にする値を代入することは問題点にはならない。

(iii) 分数関数の自然な定義域

分数関数の分母を 0 にする値は定義域外にあるのであろうか. 分数式が二つの多項式の比として定義されたように, 分数関数も, 二つの複素数の比の集合である Riemann 球面からそれ自身への正則写像と考えるのが最も自然である. よって, 分母を 0 とする点も定義域内の点である. これが部分分数分解の係数決定方法において数値代入法で解が求まる理由である. この見方においては, 分母を 0 にする値の代入について, ことさら問題視する必要はなくなる.

なお, 数学 II の「式と証明」の段階ではなく, 極限を学んだ後であれば, 代入ではなく極限をとることにより, 数値代入法の問題点は高校数学でも簡単に回避できる.

(iv) $n+1$ 個の異なる実数に対して等しい値をとる二つの n 次多項式はすべての実数に対して等しい値をとることの証明

数学の教員になろうとしている学生であるのならば, 連立方程式を立てて, この主張を証明することはできて欲しい. そして, それで終わりとするのではなく, 線形代数学の文脈のなかで捉え直して, 線形代数学の考え方とその利点を理解することに繋げるようにしたい.

これらのことは, 高校までの学校数学では取り上げられることがなく, 大学において初めて現れる考え方である. 高校数学を自信を持って指導するには, 大学での数学専門科目の理解が必要である. 大学での数学専門科目を学ぶ必要性を学生に感じさせる話題として利用できるのではないだろうか.

我々プロジェクト第 1 チームでは, [16, 17] において, 数学専門科目によって育成すべき資質・能力とは,

(1) 算数・数学を学校教育において教えることの意義を理解し, 数学の本質を正しく認識して自信をもって数学を指導できる能力.

(2) 抽象的思考に慣れ, 論理的に正しい思考を展開し表現できる能力

であり, そのために具体的には, 次のような能力の育成をめざすことが求められるとして, 次の七つの項目を挙げた.

(a) 学校教育における算数・数学科の内容の背景にある数学の理論の本質を理解し, 教科内容において重点をおくポイントおよび必要性の低さを的確に見抜く能力

(b) 学校数学の内容における重要なポイントに対して独自の工夫を加え, 内容を明確で分かりやすく説明できる能力

(c) 子どもの発言やつぶやき, またつまずきに含まれる発想の芽や本質的な点を見逃さず拾い上げ発展させる授業が展開できる能力

- (d) 知的好奇心を呼び起こす教材や数学的活動を創意工夫して作りだし、子どもの興味・関心をひき出す授業を展開できる能力
- (e) 数学の面白さや美しさを伝えて、子どもの興味・関心を育てる能力
- (f) 子供が数学を創造するような知的探求の場とする授業を実践できる能力
- (g) 教科内容がどのように変更されようと、主体的な教材研究を行的確な対応ができる能力

本稿で取り上げた恒等式や部分分数分解は、上記七つの能力、特に (a), (b), (g) の能力育成のための良い題材になっているであろう。

参考文献

- [1] 川谷内哲二「高校数学における疑問点とその扱いについて」, 日本数学教育学会 第93回全国算数・数学教育研究(神奈川)大会 高校部会 第12分科会(基礎・自由研究)発表レジュメ, 2011年8月
- [2] 川中宣明ほか14名「数学II」, 数研出版, 平成15年1月31日検定済
- [3] 大矢雅則・岡部恒治ほか12名「新編 数学II」, 数研出版, 平成15年1月31日検定済
- [4] 永尾汎ほか8名「高等学校 数学A」, 数研出版, 平成5年1月31日検定済
- [5] 永尾汎ほか8名「高等学校 数学III」, 数研出版, 平成7年2月28日検定済
- [6] 川中宣明ほか13名「数学II」, 数研出版, 平成23年3月23日検定済
- [7] 飯高茂・松本幸夫ほか22名「数学II」, 東京書籍, 平成15年1月31日検定済
- [8] 飯高茂・松本幸夫ほか22名「新編 数学II」, 東京書籍, 平成15年1月31日検定済
- [9] 山本芳彦ほか13名「高等学校 数学II」, 啓林館, 平成15年1月31日検定済
- [10] 山本芳彦ほか8名「高等学校 数学A」, 啓林館, 平成5年1月31日検定済
- [11] 山本芳彦ほか8名「高等学校 数学III」, 啓林館, 平成7年2月28日検定済
- [12] 長岡亮介ほか21名「数学II」, 旺文社, 平成15年1月31日検定済
- [13] 文部省「高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編」平成11年3月改訂, 実教出版, 1999年12月

- [14] 文部省「高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編」平成元年3月改訂, ぎょうせい, 1989年12月
- [15] 文部科学省「高等学校学習指導要領解説 数学編」平成21年3月改訂, 文部科学省ホームページ, 2009年11月
- [16] 丹羽雅彦・松岡隆「教員養成学部の「数学」教科専門科目カリキュラムの現状把握と理想的モデル案に向けた調査検討の構想」, 数理解析研究所講究録 1657 (2009年7月), pp.74-82
- [17] 丹羽雅彦・松岡隆・川崎謙一郎・大竹博巳・伊藤仁一「中学校・高等学校の数学教師の養成における数学専門科目の標準的なモデルの構想」, 数理解析研究所講究録 1711 (2010年9月), pp.106-129