

Markov's principle 付きの Constructive set theory について

名大・理 久馬 栄道 (Eido Kyuma)

§0 Introduction

Bishop が [7] で, constructive mathematics 上の解析学を展開して以来, さまざまな方法で, この formalize が行なわれてきた。そして Myhill と Friedman は, それぞれ [9] と [8] で集合論の形による formalize を行った。この paper では, Friedman の T_3 も, constructive set theory (CST) と呼ぶことにする。(くわしい定義は, 後であたえる。) CST は, 無限公理付きの Kripke-Platek axiom system (KP) と相対的無矛盾であることが [5][8] で示されている。

所で, Markov's principle (MP) というのは, 次のものである。

$$(MP) \quad \forall x \in \omega (A(x) \vee \neg A(x)) \rightarrow \neg \neg \exists x \in \omega A(x) \rightarrow \exists x \in \omega A(x)$$

これは構成的な公理と思われるので, $CST + MP$ に興味をもたれる。

この paper の目的は, 以下のものである。§1 において,

新しい structure を定義する。§2において、これが CST+MP の model となっていることを示す。§3においては、この model が、KP に ω の部分集合全体の集合を付け加えた system の中で構成できることを示す。

§1 Structures

[1]において Aczel は、Martin-Löf の intuitionistic theory of types (ML) 上で、CST の interpretation を構成した。Beeson は、ML の recursive models を [2] で構成した。これらの models の term は、type 付きの Λ -calculus の λ -term に対応している。

この section において、type の 付いていない λ -term を用い Beeson の models とは異なる集合論的仕方により、models の定義を行う。

1-1. Definition Λ は λ -term 全体の集合、 $\mathcal{P}(\Lambda)$ は Λ の部分集合全体とする。また通常 $A, B \in \Lambda$ において $A \equiv B$ と書くものも、この paper では $A = B$ と書く。また、 $\Pi, \Sigma, N_0, N_2, N, \sup$ などは Λ -calculus の constants とする。これらのくわしい定義は、[3]を見よ。

これから以後、 $\mathcal{F}$ は function であり、 $\text{dom}(\mathcal{F}) \subseteq \Lambda$ で $\text{val}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$ となるとする。

1-2 Definition $\mathcal{F}$ が $\Pi\Sigma$ -normal であることを、以下の条件を満たすこととする。

(i-i) N_0, N_2 and N は $\text{dom}(\mathcal{F})$ の要素とする。

(i-ii) $\mathcal{F}(N_0) = \emptyset$, $\mathcal{F}(N_2) = \{\lambda x y. x, \lambda x y. y\}$

$\mathcal{F}(N) = \{\underline{n} : n \text{ は自然数}\}$ ただし $\underline{n}$ は、

$\underline{n} = \lambda x y. x(\underbrace{y(\dots(x y) \dots)}_{n \text{ 個}}))$ で定義する。通常これは λ -calculus の自然数の表現である。

(ii) 今、 (ΣAB) と A が $\text{dom}(\mathcal{F})$ の要素であり、 $B \in \Lambda$ で、すべての $a \in \mathcal{F}(A)$ において $B(a) \in \text{dom}(\mathcal{F})$ とすると、
 $\mathcal{F}(\Sigma AB) = \{\lambda x. x a b : a \in \mathcal{F}(A), b \in \mathcal{F}(B(a))\}$ となる。

(iii) 今、 (ΠAB) と A が $\text{dom}(\mathcal{F})$ の要素であり、 $B \in \Lambda$ で、すべての $a \in \mathcal{F}(A)$ において $B(a) \in \text{dom}(\mathcal{F})$ とすると、
 $\mathcal{F}(\Pi AB) = \{f \in \Lambda : \forall a \in \mathcal{F}(A) [f(a) \in \mathcal{F}(B(a))]\}$ となる。

1-3 Definition 今、 $\mathcal{F}$ は $\Pi\Sigma$ -normal であるとする。その時、
 $\mathcal{F}$ が $\Pi\Sigma$ -closed であるとは、 $A \in \text{dom}(\mathcal{F})$ で、 $B \in \Lambda$ についてすべての $a \in \mathcal{F}(A)$ で $B(a) \in \text{dom}(\mathcal{F})$ の時、 (ΠAB) と (ΣAB) が $\text{dom}(\mathcal{F})$ の要素であるとする。

1-4. Definition 今、 $\mathcal{F}$ は $\Pi\Sigma$ -normal であるとする。その時、
 $\mathcal{F}$ が $\Pi\Sigma$ -transitive ということは、 (ΠAB) または (ΣAB)

のどちらかが $\text{dom}(\mathcal{F})$ の要素ならば、 $A \in \text{dom}(\mathcal{F})$ で $B \in \Lambda$ であり、すべての $a \in \mathcal{F}(A)$ において $B(a) \in \text{dom}(\mathcal{F})$ となる。

1-5 Definition 今、 $\mathcal{F}$ を $\Pi\Sigma$ -normal とする時、 $\prec_{\mathcal{F}}$ は以下の定義による $\text{dom}(\mathcal{F})$ 上の binary relation とする。

(i) もし (ΠAB) と A が $\text{dom}(\mathcal{F})$ の元なら、 $A \prec_{\mathcal{F}} (\Pi AB)$

(ii) もし (ΣAB) と A が $\text{dom}(\mathcal{F})$ の元なら、 $A \prec_{\mathcal{F}} (\Sigma AB)$

(iii) $A \in \text{dom}(\mathcal{F})$ で $a \in \mathcal{F}(A)$ なら、 $B(a)$ と (ΠAB) は、 $\text{dom}(\mathcal{F})$ の元ならば、 $B(a) \prec_{\mathcal{F}} (\Pi AB)$ となる。

(iv) $A \in \text{dom}(\mathcal{F})$ で $a \in \mathcal{F}(A)$ なら、 $B(a)$ と (ΣAB) は、 $\text{dom}(\mathcal{F})$ の元ならば、 $B(a) \prec_{\mathcal{F}} (\Sigma AB)$ となる。

1-6 Definition 今、 $\mathcal{F}$ を $\Pi\Sigma$ -normal とする。そのとき、

$\mathcal{F}$ が $\Pi\Sigma$ -well founded であるとは、 $\emptyset \subseteq \text{dom}(\mathcal{F})$ で、

$\emptyset \neq \emptyset$ の時、 $\emptyset$ の元 a が存在し、 $\forall x \in \emptyset [x \not\prec_{\mathcal{F}} a]$ とする。

1-7 Definition これから以後、 $\mathcal{F}$ が $\Pi\Sigma$ -normal で $\Pi\Sigma$ -closed

$\Pi\Sigma$ -transitive, $\Pi\Sigma$ -well founded であることを、

$\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. と書く。 $\Pi\Sigma$ -n.t.w. も同じように定義する。

$A, f \in \Lambda$ ならば、 $\sup(A, f) = \lambda x. ((x \sup) A) f$ とする。

また $a = \sup(A, f)$ の時、 $\bar{a} = A$, $\bar{a} = f$ とする。

1-8 Definition これから以後、 $V = \langle V, \sup, \mathcal{F} \rangle$ とする。

V が、sup-normal であるとは、以下の条件を満たすこととする。

(i) $\mathcal{F}$ は $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. である。

(ii) $V \subseteq \{ \sup(A, f) : A \in \text{dom}(\mathcal{F}), f \in \Lambda \}$

1-9 Definition ここで V は sup-normal とする。

V が sup-closed であるとは、 $A \in \text{dom}(\mathcal{F}), f \in \Lambda$ で

$\forall a \in \mathcal{F}(A) [f(a) \in V]$ ならば、 $\sup(A, f) \in V$ とする。

V が sup-transitive であるとは、 $\sup(A, f) \in V$ の時、

$\forall a \in \mathcal{F}(A) [f(a) \in V]$ であることとする。

V が sup-well founded であるとは、すべての空集合でない

V の部分集合 $\mathcal{O}$ において、 $\sup(A, f) \in \mathcal{O}$ が存在して、

$\forall a \in \mathcal{F}(A) [f(a) \notin \mathcal{O}]$ であることとする。

sup-normal で sup-closed, sup-transitive, sup-well founded

のことを、sup-n.c.t.w. と書く。sup-n.t.w. も同様に定義する。

1-10 Remark $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. $\neq$ sup-n.c.t.w. は、Martin-Löf の theory of types の概念をもとに作ったものである。そこで ML の記号との対比表を示す。

今ここで、 $\mathcal{F}$ は $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. $\mathcal{U}$ は sup-n.c.t.w. とする。

this paper	Martin-Löf
N_0, N_2, N	N_0, N_2, N
$\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \dots$	$0, 0', 0'', 0''' \dots$
$\Pi A(\lambda x.B), \Sigma A(\lambda x.B)$	$(\Pi x \in A) B \quad (\Sigma x \in A) B$
$\Sigma N_2(\lambda x.xAB)$	$A+B$
$\text{dom}(\mathcal{F})$	$\mathcal{U}_0$
$a \in \mathcal{F}(A)$	$a \in A$
$\text{sup}(A.f)$	$\text{sup}(A.f)$
V	$(\bigvee x \in \mathcal{U}_0) x$

なお、Aczel の [1] においては、 $\text{sup}(A.f)$ のかわりに $\{f(x) \mid x \in A\}$ と書いてある。"sup" の集合論的な意味は、このようなものである。

1-11 Theorem (sup-induction) $\mathcal{U}$ は sup-n.c.t.w. とし、 $\phi(x)$ を x に関する命題とする時、すべての $\text{sup}(A.f) \in V$ で $\forall a \in \mathcal{F}(A) \phi(f(a))$ ならば $\phi(\text{sup}(A.f))$ となる時、すべての $v \in V$ で $\phi(v)$ となる。

証明 v の sup-well founded の性質を用い、通常の構造の帰納法と同じ要領で行う。

これが、 $\in$ -帰納法に相当するものである。

§2. realizability models

この section では、§1 で導いた structure を用いて、CST+MP の realizability models も、作る。ここで言う CST とは、Friedman の [8] の T_3 と同等なものであり、Aczel の [1] の CZF とほとんど同じである。

CST は intuitionistic first order language であり、logical symbol として、 $\perp, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall x, \exists x$ と、restricted quantifier $\forall x \in a, \exists x \in a$ から作られ、binary relation として、 $=$ と $\in$ をもつものとする。Axioms は以下に示すとおりである。

Structural axioms

$$\begin{aligned} \text{Restricted quantifier} \quad \forall x \in a \phi(x) &\leftrightarrow \forall x (x \in a \rightarrow \phi(x)) \\ \exists x \in a \phi(x) &\leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equality} \quad a = b &\leftrightarrow \forall z (z \in a \leftrightarrow z \in b) \\ a = b \wedge b \in c &\rightarrow a \in c \end{aligned}$$

Set Induction scheme

$$\forall x (\forall y \in x \phi(y) \rightarrow \phi(x)) \rightarrow \forall x \phi(x)$$

Set existence axiomsPairing

$$\exists x (a \in x \wedge b \in x)$$

Union

$$\exists x (\forall y \in a) (\forall z \in y) (z \in x)$$

Restricted Separation Δ_0 -formula $\phi(x)$ に $x \neq \perp$.

$$\exists x (\forall y \in x (y \in a \wedge \phi(y)) \wedge \forall y \in a (\phi(y) \rightarrow y \in x))$$

Strong Collection

$$\forall x \in a \exists y \phi(x, y) \rightarrow \exists z (\forall x \in a \exists y \in z \phi(x, y) \wedge \forall y \in z \exists x \in a \phi(x, y))$$

Exponential

$$\exists x (x \text{ は 集合 } a \text{ から 集合 } b \text{ への 関数全体})$$

ただし Aczel のものは、Subset Collection が、この公理のかおりに書いてあるが、Subset Collection から Exponential は導かれる。

Infinity以下の条件を満たす ω が存在する。ただし、Zero(x)は、 $\forall y \in x \perp$, Succ(x, y) は $\forall z \in y (z \in x) \wedge y \in x \wedge$ $\forall z \in x (z \in y \vee z = y)$ とする。

$$(i) \exists x \in \omega (\text{Zero}(x)) \wedge \forall x \in \omega \exists y \in \omega (\text{Succ}(x, y))$$

$$(ii) \forall x \in \omega (\text{Zero}(x) \vee \exists y \in \omega \text{Succ}(y, x))$$

この ω は、通常、自然数全体の集合のことである。relativized dependent choice今、 $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \exists y (\varphi(y) \wedge \psi(x, y)))$ とする。その時、 x で $\varphi(x)$ ならば、関数 f が存在し、 $\text{dom}(f) = \omega$, $f(0) = x$, $\forall n \in \omega (\varphi(f(n)) \wedge \psi(f(n), f(n+1)))$ となる。

以下、 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ は、 $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. sup-n.c.t.w. とする。

2-1 Definition $a \in \Lambda$, $A \in \text{CST}$ の formula とする時、

$a \vdash A$ と書き、 a が A を realize するといひ、以下の
ように定義する。

$$(i) f \vdash (A \rightarrow B) \equiv \forall a \in \Lambda [a \vdash A \text{ ならば } f(a) \vdash B]$$

$$(ii) c \vdash (A \wedge B) \equiv (c = \lambda x. x a b) \text{ かつ } (a \vdash A) \text{ かつ } (b \vdash B)$$

$$(iii) c \vdash (A \vee B) \equiv (c = \lambda x. x (\lambda y. y) a) \text{ かつ } (a \vdash A) \\ \text{または } (c = \lambda x. x (\lambda y. y) b) \text{ かつ } (b \vdash B)$$

$$(iv) f \vdash \forall x A(x) \equiv \forall a \in \mathcal{V} [f(a) \vdash A(a)]$$

$$(v) c \vdash \exists x A(x) \equiv \exists a \in \mathcal{V} [c = \lambda x. x a b \text{ かつ } (b \vdash A(a))]$$

$$(vi) f \vdash \forall x \in \alpha A(x) \equiv \forall a \in \mathcal{F}(\alpha) [f(a) \vdash A(\alpha(a))]$$

$$(vii) c \vdash \exists x \in \alpha A(x) \equiv \exists a \in \mathcal{F}(\alpha) [c = \lambda x. x a b \text{ かつ } b \vdash A(\alpha(a))]$$

$$(viii) c \vdash (\alpha = \beta) \equiv c \vdash (\forall a \in \alpha \exists b \in \beta (a = b) \\ \wedge \forall b \in \beta \exists a \in \alpha (a = b))$$

$$(ix) c \vdash (\alpha \in \beta) \equiv c \vdash \exists a \in \beta (\alpha = a)$$

2-2. Remark. $c \vdash (\alpha = \beta)$ が well defined であることは、

Theorem 1-11 (sup-induction) を α に関して用いればよい。

2-3. Definition $p \in \text{dom}(\mathcal{F})$ と CST の formula A へ

ついて、 $\mathcal{F}(p) = \{c \in \Lambda \mid c \vdash A\}$ の時、 $p = \|A\|$ と書く。

2-4 Lemma (i) すべての $\alpha, \beta \in V$ に対して, $\text{dom}(\mathcal{F})$ の元 p があり $p = \|\alpha = \beta\|$ 。

(ii) また, Δ_0 -formula A に対して $\exists p \in \text{dom}(\mathcal{F}) [p = \|A\|]$

証明 (i) Theorem 1-11 を用い, α に関する帰納法で解く。

(ii) $\|A \rightarrow B\| = \prod \|A\|((\lambda x y. x) \|B\|)$, $\|A \wedge B\| = \sum \|A\|((\lambda x y. x) \|B\|)$,
 $\|A \vee B\| = \sum N_2(\lambda x. x \|A\| \|B\|)$, $\|\forall x \in a A(x)\| = \prod \bar{a}(\lambda x. \|A(\bar{a}(x))\|)$,
 $\|\exists x \in a A(x)\| = \sum \bar{a}(\lambda x. \|A(\bar{a}(x))\|)$ とすればよい。

Definition 2-1 で定義された realizability model は intuitionistic logic を満たすことは、すぐわかる。また, CST の axioms を満たすことは, Aczel の [] [] と同じようにすればできる。以下では, MP がこの models において valid であることを示す。

2-5. Lemma $a \Vdash \neg\neg A$ ならば $\exists b \in \Lambda (b \Vdash A)$

証明 $a \Vdash A$ となる a があれば $b \Vdash A$ となる b はない。

また, $a \Vdash A$ となる a がなければ $b \Vdash A$ となる b がある。

以上のことよりあきらか。

2-6 Remark Lemma 2-5 は, かつして, $\neg\neg A \rightarrow A$ が valid になることを意味しているのではないことに注意。

2-7 Theorem MPは、Definition 2-1 の model において、
valid である。

証明 今、 $a \vdash \forall n \in \omega (A(n) \vee \neg A(n))$ とする。Definition 2-1
より、 $\forall n \in \mathcal{F}(N) \vdash A(\tilde{\omega}(n)) \vee \neg A(\tilde{\omega}(n))$ となる。だから、
 $a(n)(\lambda x y. x) = \lambda x y. x$ ならば、 $a(n)(\lambda x y. y) \vdash A(\tilde{\omega}(n))$
 $a(n)(\lambda x y. x) = \lambda x y. y$ ならば、 $a(n)(\lambda x y. y) \vdash \neg A(\tilde{\omega}(n))$ の
どちらかになる。---①

次に、 $b \vdash \neg \neg \exists n \in \omega A(n)$ とすると、Lemma 2-5 より
 $\exists c \in \Lambda \ c \vdash \exists n \in \omega A(n)$ となるので、 $A(\tilde{\omega}(n))$ を valid に
する $\mathcal{F}(N)$ の元 n の存在はわかる。---②

しかし、この n を λ -term を用いて具体的に構成
しなければ、realizability には使えない。そこで、
① を用いて構成する。

今、 $\Omega \in \Omega F = F(\Omega F)$, $\underline{\underline{\omega}} \leq \underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\omega}} + 1$ とする λ -term
とする。この時、 $\overleftarrow{a} = \Omega (\lambda x n. a(n)(\lambda x y. x) n(x(\underline{\underline{\omega}} n))) \underline{\underline{\omega}}$
 $\overrightarrow{a} = \Omega (\lambda x n. a(n)(\lambda x y. x) (a(n)(\lambda x y. y)) (x(\underline{\underline{\omega}} n))) \underline{\underline{\omega}}$ と
すれば、 $\overleftarrow{a}$ が $\mathcal{F}(N)$ の元になることは、①② を用いればわかり、
①より、 $\overrightarrow{a} \vdash A(\tilde{\omega}(\overleftarrow{a}))$ となる。そこで、
 $\lambda x. x \overleftarrow{a} \overrightarrow{a} \vdash \exists n \in \omega A(n)$ となる。---③

①②③より

$\lambda a b. (\lambda x. x \overleftarrow{a} \overrightarrow{a}) \vdash \forall n \in \omega (A(n) \vee \neg A(n)) \rightarrow \neg \neg \exists n \in \omega A(n) \rightarrow \exists n \in \omega A(n)$
証完

§3. $KP + \mathcal{P}\omega$ 上での構成

この section では、§1 で定義した $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w., sup-n.c.t.w. を構成してみせる。その時に、それを構成するには、 $KP + \mathcal{P}\omega$ 上で十分であることを示す。なお KP については、[4] を見よ。

3-1 Remark ϕ を Σ -formula とする時、次は KP の定理である。(Σ -collection)

$$\forall x \in a \exists y \phi(x, y) \rightarrow \exists b [\forall x \in a \exists y \in b \phi(x, y) \wedge \forall y \in b \exists x \in a \phi(x, y)]$$

3-2 Lemma Λ -calculus の model $\langle \Lambda, \bar{\mathcal{P}} \rangle$ と、 Λ の部分集合全体の集合 $\mathcal{P}\Lambda$ は、 $KP + \mathcal{P}\omega$ の中で集合として構成できる。

証明 ω を使い Λ の term を code すればよい。 $\mathcal{P}\Lambda$ は、 $\mathcal{P}\omega$ を用いればよい。

3-3 Definition 以下のように $\mathcal{G}$ と $\mathcal{U} = \langle U, \text{sup}, \mathcal{G} \rangle$ を定義する。

$$(i) \mathcal{G} \equiv \bigcup_{g \text{ is } \Pi\Sigma\text{-n.t.w.}} g$$

$$(ii) U \equiv \bigcup_{\langle u, \text{sup}, g \rangle \text{ is sup-n.t.w.}} u \quad \mathcal{U} = \langle U, \text{sup}, \mathcal{G} \rangle \text{ とする。}$$

この時 $N_0 \in \text{dom}(\mathcal{G})$, $\text{sup}(N_0, f) \in U$ なので どちらも空でない。

これから以後、 $\mathcal{G}$ が $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w.であり、 $\mathcal{U}$ がsup-n.c.t.w.となることを証明する。その時厳密に、 $KP+PW$ のsystem上で行う。 $KP+PW$ のmodelの中では、 $\mathcal{G}$ や $\mathcal{U}$ は集合になるとはかぎらず、classとして取りあつかっていく。

3-4 Lemma $\Pi\Sigma$ -n.t.w. は Δ_0 -formula である。

$a \in \mathcal{G}$ は Σ -formula である。

証明 $\Pi\Sigma$ -normal と $\Pi\Sigma$ -transitive が Δ_0 -formula であることはあきらか。 $\Pi\Sigma$ -well founded は "すべての $\alpha \leq \text{dom}(\mathcal{U})$ で" となる所を " $\forall \alpha \in P\Lambda$ " とはじめに Bound してやればよい。
 $a \in \mathcal{G}$ は、 $\exists \theta (\theta \text{ は } \Pi\Sigma\text{-n.t.w. かつ } a \in \theta)$ となり Σ -formula。

3-5 Lemma $\mathcal{G}$ は function である。

証明 今、 $\langle a, b_1 \rangle, \langle a, b_2 \rangle \in \mathcal{G}$ で $b_1 \neq b_2$ とする。すると $\Pi\Sigma$ -n.t.w. な g_1, g_2 があって、 $\langle a, b_1 \rangle \in g_1, \langle a, b_2 \rangle \in g_2$ 。
 この時 $g_1 \cup g_2$ も $\Pi\Sigma$ -n.t.w. になる。今、

$$\alpha = \{ \langle c, d \rangle \in g_1 \cup g_2 \mid \exists e [d \neq e \wedge \langle c, e \rangle \in g_1 \cup g_2] \}$$

 とすると、 $\alpha \subseteq g_1 \cup g_2$ で、 $\langle a, b_1 \rangle \in \alpha$ だから $\alpha \neq \emptyset$ なので、 $\Pi\Sigma$ -transitive より、 α は $\langle_{g_1 \cup g_2}$ 最小元 $\langle c, d_1 \rangle$ をもつ。
 ところが $\Pi\Sigma$ -normal より、 $\langle c, d_2 \rangle \in g$ となり $d_1 \neq d_2$ となるような $\langle c, d_2 \rangle$ は最小元より出ないので矛盾する。 証完。

3-6. Theorem $\mathcal{G}$ は $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. である。

証明 $\mathcal{G}$ が $\Pi\Sigma$ -normal, $\Pi\Sigma$ -transitive であることは、

定義よりあきらか

(i) $\mathcal{G}$ が $\Pi\Sigma$ -well founded であることを示す。

$\alpha \subseteq \mathcal{G}$ で $\alpha \neq \emptyset$ な α は、 $\Pi\Sigma$ -n.t.w. な θ があり、 $\alpha \cap \theta \neq \emptyset$ 。

すると θ は $\Pi\Sigma$ -well founded なので、 $\alpha \cap \theta$ は $<_{\mathcal{G}}$ 最小元をもつ。 θ の $\Pi\Sigma$ -transitive より、この最小元は、 α の $<_{\mathcal{G}}$ 最小元になり、 α は空になる。

(ii) $\mathcal{G}$ が $\Pi\Sigma$ -closed であることを示す。

今、 $A \in \text{dom}(\mathcal{G})$ で $\forall a \in \mathcal{G}(A) [B(a) \in \text{dom}(\mathcal{G})]$

であるとすると、すべての $a \in \mathcal{G}(A)$ に対し、

$\Pi\Sigma$ -n.t.w. な f_a が存在し、 $B(a) \in \text{dom}(f_a)$ となる。

Δ_0 -collection を用いると、 $\bigcup_{a \in \mathcal{G}(A)} f_a$ は set になる。だから、

$$f = \bigcup_{a \in \mathcal{G}(A)} f_a \cup \left\{ \langle \Pi AB, \{g \in \Lambda \mid \forall a \in \mathcal{G}(A) [g(a) \in \mathcal{G}(B(a))]\} \rangle \right\} \\ \cup \left\{ \langle \Sigma AB, \{ \lambda x. xab \mid a \in \mathcal{G}(A), b \in \mathcal{G}(B(a)) \} \rangle \right\}$$

も set になり、 f は $\Pi\Sigma$ -n.t.w. となる。だから、

$\Pi AB, \Sigma AB \in \text{dom}(\mathcal{G})$ となり、 $\mathcal{G}$ は $\Pi\Sigma$ -closed である。

言正完

3-7. Lemma $V = \langle V, \text{sup}, \mathcal{G} \rangle$ の時、 V が sup-n.t.w. と

いふのは、 Σ -formula である。

証明 $A \in \mathcal{G}$ が Σ -formula になることを用いる。

3-8 Theorem $\mathcal{U}$ は sup-n.c.t.w. である。

証明 $\mathcal{U}$ が sup-normal, sup-transitive であるのは。

あきらか。 $\mathcal{U}$ が sup-well founded であることは。

Theorem 3-8 の証明(i)と同じようにすればよい。

$\mathcal{U}$ が sup-closed であることは。 Theorem 3-8 の証明(ii)

と同じように行い、 Δ_0 -collection を用いる所を。

Σ -collection を用いればよい。

以上で、 $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w., sup-n.c.t.w. は $KP + PW$ の中で構成できることを示した。

参考文献

[1] P. Aczel, The type theoretic interpretation of constructive set theory, in: A. Macintyre, eds., Logic Colloquium '77.

[2] M. Beeson, Recursive models for constructive set theories, Ann. Math. Logic 23 (1982) 127~178

[3] H. P. Barendregt, The Lambda Calculus: Its syntax and Semantics (North-Holland, Amsterdam, 1981)

- [4] J. Barwise, Admissible Sets and Structures
(Springer, Berlin)
- [5] G. Jäger, Proof theoretic treatment,
Habilitationsschrift München, 1984.
- [6] P. Martin-Löf, Constructive mathematics and
computer programming, in: L.J. Cohen etc eds.,
Logic, Methodology, and Philosophy of Science VI
(North-Holland, Amsterdam, 1982) 153-175.
- [7] E. Bishop, Foundations of Constructive Analysis,
(McGraw-Hill, New York, 1967)
- [8] H. Friedman, Set theoretic foundations for constructive
analysis, J.S.L. 46 (1981) 868-870
- [9] J. Myhill, Constructive set theory, J.S.L. 40 (1975)
347-382