

光の異常な伝搬を電気回路でシミュレートする

北野 正雄<京都大学大学院工学研究科 615-8510 京都市西京区京都大学桂 e-mail: kitano@kuee.kyoto-u.ac.jp, CREST 科学技術振興機構 103-0028 東京都中央区八重洲 1-9-9>

中西 俊博<京都大学大学院工学研究科 615-8510 京都市西京区京都大学桂 e-mail: t-naka@kuee.kyoto-u.ac.jp, CREST 科学技術振興機構 103-0028 東京都中央区八重洲 1-9-9>

最近の実験技術の進展によって、光パルスの伝搬速度 (群速度) を光速 c より大きくしたり、逆に自転車なみの速度に減速させ、さらには停止させることすら可能になってきた。このような異常光伝搬は応用面から強い関心が寄せられているのみならず、波動伝搬の物理を再検討する契機にもなっている。本稿では電気回路による光の伝搬のシミュレーションを通して、超光速群速度の物理的意味や光パルス凍結の原理に迫る。

1 はじめに

最近、量子光学的な技術によって群速度を制御して、光パルスを媒質中で真空中より速く伝搬させたり、真空中より何桁も減速し、さらにその遅いパルスを媒質内で完全に静止させることができるようになってきた。前者は群速度が光速 c を越えることはないという根拠のない主張を実験によって退けるものである。ブリルアン (Brillouin) はローレンツ媒質の吸収線の中心付近で群速度が真空中の光速 c を超えたり、負の値をとりうることを示した [1, 2]。しかし、そのような領域では吸収が多く、しかも伝搬定数の周波数変化が大きいので波形の変形が大きく、波の速度を測定するのはそれほど簡単ではない [3]。しかし最近、増幅媒質を用いて、共鳴線から離れた領域で c を超える群速度が明確に測定できるようになった [4, 5]。

一方、後者の遅い群速度は高速で伝播するがゆえに扱いにくい光を手なづける新しい技術として注目を集めている。電磁誘導透明化 (Electromagnetically Induced Transparency, EIT) [6] を用いて、光の群速度を $10^{-7}c$ 程度まで遅くしたり [7]、光を完全に停止 (正確には断熱過程で光の状態を原子の集団スピンの状態に転写) させる方法が考案され [8, 9]、実験が行われている [10, 11]。光パルスの包絡線だけでなく、量子状態をも媒質中のスピン状態として保存することができる上、必要に応じて再度光として取り出せる。このような技術は光メモリーや量子メモリーへの応用が期待されている。さらに、フォトニック結晶やメタ物質のような新しいタイプの媒質においても光の速度制御は重要な役割を演じている。

波動伝搬の本質的に正確に理解するためには電気回路による波動伝搬のシミュレーションが有用である [12, 13,

14, 15, 16]。それは光の実験に比べてパラメータが精密かつ自由に選べることで、回路と電磁波双方がマクスウェル方程式に支配されており、両者の間に深いレベルでのアナロジーが成立しているためである。本稿では電子回路を用いた、「速い光」に相当する負遅延の実現と、「遅い光、止まった光」に相当する群速度の時間空間的制御について紹介する。

2 波の速度

粒子の速度は一意に定義できるが、波に対しては状況に応じて様々な速度が考えられる。ここでは図 1 に示す 3 種類の波の速度を考える。位相速度 v_p は単色波 (角周波数 ω_0) の等位相面が進む速さであり、分散関係 $k(\omega)$ を用いて $v_p^{-1} = k(\omega_0)/\omega_0$ と表される。群速度 v_g は変調波や波束の包絡線が進行する速さであり、

$$v_g^{-1} = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} \quad (1)$$

与えられる。 ω_0 は搬送波の角周波数あるいは中心角周波数である。群速度の有効性は波のスペクトルが分散関係が直線で近似できる範囲に収まっている場合に限られる。また、媒質の吸収がその周波数範囲で一定と見なせることも必要である。これらの条件が満たされない場合には、伝搬に伴って波形が変わってしまうので、入力波形と出力波形の「時間ずれ」を一意に決められなくなり、群速度を定め

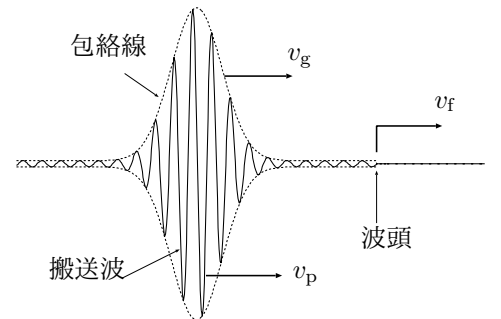


図 1: 波の速度; v_p : 位相速度, v_g : 群速度, v_f : 波頭速度. 真空中ではこれらはすべて c に等しいが、媒質中では v_f 以外はそれぞれ別の値をとる。

ることはむずかしくなる。波頭速度 v_f は波の立上りのように振幅あるいはその高次微係数が不連続になる部分が伝搬する速度である。これは位相速度あるいは群速度の高周波極限に等しく、電磁波の場合には真空中の光速 c になる。不連続点は非常に高い周波数成分からなっており、これらに対して媒質は応答できないからである。

さて、これらの速度のうち相対論的因果律の制約をうけるものは波頭速度のみである。位相速度が光速 c を越えても相対論に抵触しないことはよく知られている。それに対して「群速度はエネルギーや情報の伝わる速度であり c を越えることはない」との記述がしばしば見られるが、これが誤りであることは古くから指摘されている。「群速度はエネルギーや情報の伝搬とは直接の関係はなく、 c を越えてもよい」と訂正されるべきである。しかしながら、この意味を正確に理解するためには、注意深い考察によって、いくつかの反直観的な事実を受け止める必要がある。そのためもあって、群速度が c を超える場合には群速度そのものが意味を失うという主張や、群速度に代わる c を超えない（しかし物理的意味がそれほど明瞭とはいえない）速度を導入するなどの試みが、繰り返しなされている。本稿の目的の1つは、電子回路という透明性の高い物理系を用いて、 c を超える群速度の含意を明確化することである。

3 群速度と群遅延

群速度の定義式 (1) に $k = k_0 + (k - k_0)$, $k_0 = \omega/c$ を代入すると

$$v_g^{-1} = c^{-1} + \frac{t_d}{L}, \quad t_d = - \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_{\omega_0} \quad (2)$$

が得られる。 $\phi = -(k - k_0)L$ は長さ L の媒質による（真空中の場合を差し引いた）位相ずれである。 t_d は群遅延と呼ばれる量である。群速度と群遅延は類似しているが後者は集中定数系 ($L = 0$) に対しても定義できるより一般的な概念である。

正遅延 $t_d > 0$ に対しては $v_g < c$ であり、群速度は c を下回り、特に問題はない。一方、負遅延 $t_d < 0$ に対しては2つの場合がある。まず、 $-L/c < t_d < 0$ の場合は $v_g > c$ となり、いわゆる超光速群速度が実現される。 $t_d < -L/c$ の場合には $v_g < 0$, すなわち負群速度になる。これは、単なる逆向きの波や反射波ではなく、包絡線形状が波を送り出す側に戻るといった不思議な状況を表している。負遅延に対応するこれらの群速度は（広義の）超光速群速度あるいは異常群速度と呼ばれる。

負群速度の場合、媒質起源の負遅延が真空による遅延 L/c を上回っている。通常、超光速伝搬は伝搬効果だと考えられているが、多くの場合、後者の状況が実現されてい

ることが多く、集中定数系における負群遅延としてとらえる方が自然である。

4 基本回路

理想的な遅延系の入力 $v_{in}(t)$ と出力 $v_{out}(t)$ の関係は

$$v_{out}(t) = (h_D * v_{in})(t) = v_{in}(t - t_d), \quad (3)$$

と表すことができる [14]。 $h_D(t) = \delta(t - t_d)$ は系のインパルス応答でデルタ関数を遅延時間 t_d だけずらしたものである。“*” は畳込み積分を表す。関係 (3) をフーリエ変換すると $\tilde{V}_{out}(\omega) = H_D(\omega)\tilde{V}_{in}(\omega)$, が得られる。ここで

$$H_D(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt h_D(t) e^{-j\omega t} = \exp(-jt_d\omega). \quad (4)$$

は系の周波数応答関数である。虚数単位 $j = -i$ を導入した。これによって、回路理論の $e^{j\omega t}$ と波動論の $e^{-i(\omega t - kx)}$ が時間的に同じように振舞うことになる。

正の遅延 $t_d > 0$ に対してインパルス応答 $h_D(t)$ は因果的、すなわち $t < 0$ に対してゼロである。正の遅延は適当な長さの空間 ($L = ct_d$) があれば容易に実現することができる。しかし、負の遅延のインパルス応答は非因果的であり、任意の信号にたいして負の遅延をあたえる系をつくることはできない。

正の遅延は分布定数系 ($L \neq 0$) では容易に実現できるが、集中定数系 ($L = 0$) で完全に実現することは困難である。負の遅延はなおさらむずかしい。しかし、入力波形に一定の制約を課すことを許せば、集中定数系において近似的な（正あるいは負の）遅延を実現するが可能となる。

理想遅延の周波数応答 (4) は $|H_D(\omega)| = 1$, $\arg H_D(\omega) = -t_d\omega$ を満たし、振幅特性が周波数によらず一定、位相特性が周波数に比例している。この比例係数 t_d が遅延量を与える。

この特徴を近似的に満たすものとして、単一の極 ($z_p = j/T$) をもつ応答関数

$$H_L(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \sim \left[1 - \frac{(\omega T)^2}{2} \right] \exp(-j\phi) \quad (5)$$

を考えると、ゼロ周波数付近 $|\omega| < 1/|T|$ で理想特性 (4) を近似していることが分かる。ここで、 $\phi = \tan^{-1} \omega T \sim T\omega$ である。したがって、スペクトル帯域が制限された信号に対して遅延 $t_d = T$ を与えることができる。

線形系が安定であるためには、応答関数のすべての極が上半面 (j の係数が正) に含まれる必要がある。したがって、この系が安定であるためには $T > 0$ でなければならない。すなわち、この方法では正の遅延しか実現することができない。この応答関数を実現する回路例を図 2(a) に

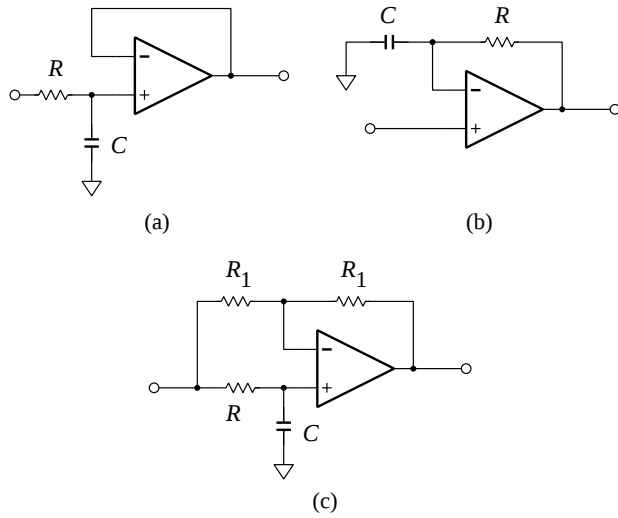


図 2: 波の速度のシミュレーションのための基本回路; (a) ローパスフィルタ $H_L(\omega)$, (b) 負遅延回路 $H_N(\omega)$, (c) オールパスフィルタ $H_A(\omega)$.

示す ($T = CR$). これは通常ローパスフィルタと呼ばれているものである [17].

応答関数の別の候補として

$$H_N(\omega) = 1 + j\omega T \sim \left[1 + \frac{(\omega T)^2}{2}\right] \exp(j\phi) \quad (6)$$

を考えよう. これは零点を 1 つもつ関数 ($z_z = j/T$) であり, やはり原点付近で遅延を近似している. 零点の位置すなわち T の符号に関しては制約がないので, 正負どちらの遅延も実現できる. $T > 0$ の回路例を図 2(b) にしめす. これは負遅延 $t_d = -T (< 0)$ を (近似的に) 実現する最も簡単な回路である. 有効な帯域は $|\omega| < 1/T$ である. この回路の問題点は帯域外で利得 ($|\omega| > 1/T$) が大きくなることである.

もう 1 つの興味深い応答関数は

$$H_A(\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T} \sim \exp(-2j\phi), \quad (7)$$

である. 1 つの極と 1 つの零点を持っている. これを回路で実現した例を図 2(c) に示す. この回路はオールパス (all-pass) フィルタと呼ばれているものである [17]. 位相特性は低域フィルタのそれと同じ (2 倍) であるが, 振幅特性は一定であり理想遅延のものと同等である. 安定条件は $T > 0$ なので, 正の遅延のみに使える. この回路は 6 節において遅い光のシミュレーションに用いられる.

$H_L(\omega)$, $H_A(\omega)$ と $H_N(\omega)$ における T の符号に関する制約の差違を考えると, 集中定数系で遅延を近似する場合においても, 正と負の遅延は対等でないことが分かる.

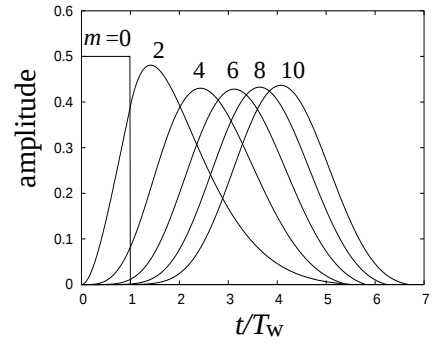


図 3: 幅 $T_w (= T_L)$ の矩形パルスをカットオフ周波数 $1/T_L$ の m 次のローパスフィルタに通した結果 (計算). 入力矩形パルス ($m = 0$) の振幅は 1 であるが, グラフでは見やすさのために半分にしている.

5 負遅延回路: 速い光のシミュレーション

5.1 入力パルスの整形

集中定数回路を用いて, 近似的な遅延 (正または負) が実現できることが分かった. ここではまず図 1(b) を利用して, 超光速伝搬に対応する負遅延回路を作り, その出力波形が入力波形より時間的に先行することを確認しよう [13, 14]. 先にのべたように, $H_N(\omega) = 1 + j\omega T$ が負遅延回路として動作するには, 入力波形のスペクトルが制限されて $|\omega| < 1/T$ の範囲に収まっていることが必要である. 電子回路では矩形パルスを作るのが最も容易であるが, そのスペクトルは高周波に長い裾 $\sim 1/|\omega|$ を持っているため, ローパスフィルタを通すことで高周波数成分を抑制する必要がある. フィルタのカットオフ周波数 $1/T_L$ は $1/T$ より低くなければならない. フィルタ 1 段では十分ではなく, 多段 (m) 接続する必要がある. ここではより性能のよいローパスフィルタとしてベッセルフィルタ [17] を用いた. フィルタの効果を図 3 に示す. 矩形パルス $U(t) - U(t - T_w)$ が m 次のフィルタに入力されている. ここで $U(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt'$ は階段関数である. 次数 m の増加にしたがって, 高い周波数成分が抑圧され, 時間領域で見た波形も滑らかになっている. ある程度段数が増えると波形は変わらないように見えるが, 立上りの部分に注目すると $\sim t^m$ となっていることに注意する. また, ピークの位置が次第に後ろにずれていることにも注意する. この遅延は低域通過フィルタに固有のものであり, 避けることはできない.

後に見るように, 負遅延回路の段数を増加して, 大きい負遅延を得ようとする場合にはそれに応じて m を増加させなければならない. 初期矩形パルスの幅が T_L より小さ

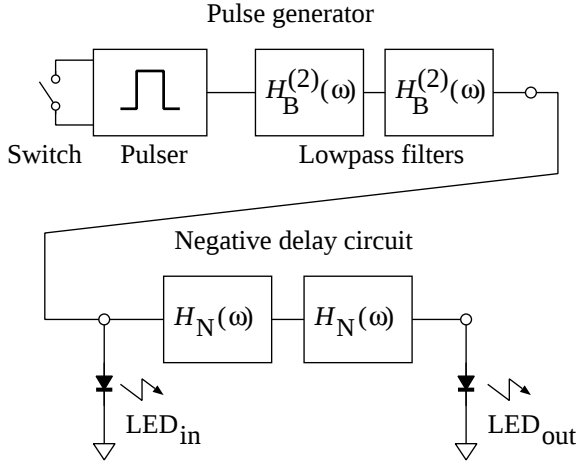


図 4: 負遅延の実験回路. スイッチを押すと, 出力の LED が入力 LED より先に点灯する.

い場合には, 段数の増加とともに低域通過フィルタのカットオフ周波数で決まる値 T_L^{-1} まで増加することにも注意する. 低域通過フィルタの段数を増やすほど, パルス波形がより滑らかになり, 予測しやすいものになる. 負遅延回路は入力信号の解析性に基いた予測によってパルスを先行させていることがわかる. 時間領域における入出力関係は式 (6) から $v_{out}(t) = [1 + T(d/dt)]v_{in}(t)$ であり, 右辺第 2 項が予測の効果を表している.

5.2 負遅延の実験

図 4 に実験回路のブロック図を示す. 具体的な回路図は [13] を参照されたい. パルス生成部は矩形パルス発生回路と 2 次のローパスフィルタ $H_L^{(2)}(\omega)$ 2 段 ($m = 4$) で構成されている. スイッチを押すと, パルス発生器が幅 1.5 s の矩形パルスを発生する. ローパスフィルタのカットオフ周波数は $0.35/T$ である. 先行量を大きくするため, 負遅延回路 $H_N(\omega)$ を 2 段用いている ($n = 2$). パルスを視覚で確認できるように, 入力端子と出力端子にはそれぞれ発光ダイオード (LED) が接続されている. LED は電圧が約 1.1V を超えると点灯する.

実験結果を図 5 に示す. 入力と出力をデジタルオシロスコープで記録したものである. 時間の原点 ($t = 0$) は矩形パルスの立上り, すなわちスイッチを押した瞬間である. 出力パルスが入力パルスに比べて 0.45 s 程度 (パルス幅の 20% 程度) 先行している. これは設計値 $2T = 2CR = 0.44$ s とよく一致している. 出力波形はやや歪んでいるが, これは理想的な遅延特性 (4) からのずれのためである.

この回路は一般に入手できる電子部品を用いて簡単に製作することができるので学生実験のテーマとして最適である. オシロスコープやファンクションジェネレータのよう

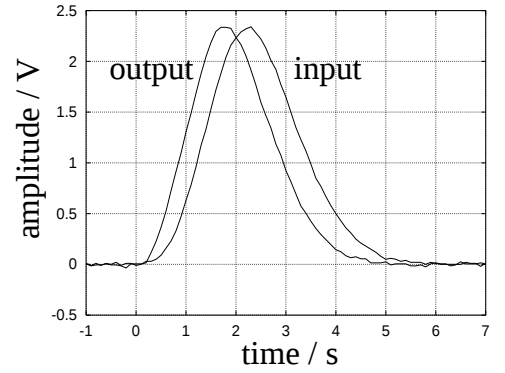


図 5: 負遅延の実験結果. 入力と出力の波形をオシロスコープで記録した. 入力が入力より 0.45 s 先行している. $t = 0$ はスイッチを押した時刻である.

な装置を必ずしも準備する必要もない. 電池で動作させることもできるので, 小さなブラックボックスに仕立てることが可能である. 現象を LED の点滅で体感できる時間スケールに取れることも利点である. オシロスコープの代わりに, テスター (電圧計) をそれぞれの端子につないで波形を見ることがもできる.

5.3 大きい負遅延の困難

従来の超光速群速度の実験において先行 (負遅延) 量 ($-t_d$) はパルス幅 T_w にくらべて小さく, 高々数パーセントであった. (本実験ではパラメータの適切に選ぶことで, 20% というかなり大きい値を実現している.) 単純に考えると T_w をそのまま小さくすれば比 $r = |t_d|/T_w$ を大きくできそうなものであるが, そう簡単ではない. パルス幅を狭くするとスペクトルが広がり, 負遅延回路の有効帯域を超える成分が生じるので, 波形が保存されなくなる.

先行量を増やす別の手だてとしては, 多段接続があるが, ここにも障害物が待ち受けている. 全段数を n として, スペクトルに対する条件を満足するためには, 各段の時定数を $T/\sqrt{n}$ のようにスケールさせる必要がある [14]. そのため全先行量は $n \times (T/\sqrt{n}) = \sqrt{n}T$ でしか増加させることができない. さらに注意すべきは, 帯域外の利得が急速に ($\sim |\omega|^n$) 増加することである. したがって, あらかじめ入力パルスのスペクトルの裾を十分抑圧しておかないと, これが増幅され波形が歪んでしまうことになる. n 段の負遅延回路 $H_N^{(n)}(\omega)$ と m 段の低域通過フィルタ $H_L^{(m)}(\omega)$ の漸近形を比較することにより, 条件 $m > n$ が必要であることが分かる. これまで見てきたように, パルス幅に匹敵, あるいはそれ以上の先行量は原理的には可能であるが, 現実の物理系で実現するには非常な困難が伴い, 事実上不可能である (帯域外での利得が何 100dB にもなり, 系が不安

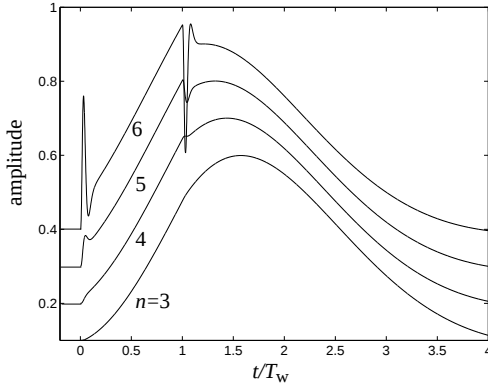


図 6: 負遅延の多段接続の限界. $m > n$ の条件が破れると波形が大きく変形する (計算). $t < 0$ の領域までパルスを先行させることはできない.

定になったり、ノイズの影響を受けやすくなる). このような困難は正遅延の実現に際しては、現れないことに注意する. 正遅延の場合には帯域外利得は周波数とともに減少、あるいは一定であるので、多段接続によって遅延をいくらでも大きくすることができる.

5.4 負遅延と因果律

群速度は因果律とは直接の関連はなく、 c を超えても何ら差し支えはない. しかし、群速度を情報の伝わる速度であるという考え方を捨てきれないむきがあることも事実である. これは実際の情報伝送系においてはパルスに情報を載せて送っている (ように見える) からである. 電子回路で得た知見をもとに、群速度と因果律の関係を捉え直すことで、上記の矛盾を解消することができる [14].

スイッチを時刻 $t = 0$ に押すと、矩形パルスが生成され、 m 段の低域通過フィルタを通過させることで、帯域制限された入力パルスが準備される. これを n 段の負遅延回路に通すことによって先行した出力パルスが得られる. 負遅延回路が受理できる帯域制限された、滑らかな入力波形を生成するためには、フィルタによる正の遅延 (図 3) が不可避なので、パルス発生を決断を遅くとも $t = 0$ には下している必要がある. このタイミングを逃すと、 m を減らしてフィルタにおける正の遅延を減少させる他はないが、条件 $m > n$ が破れて、出力波形が大きく変形してしまう. 出力パルスの真の原因はスイッチの投下であって、入力パルスではないのである. 図 6 にパルスの先行の限界の様子を示す. $m = 4$ のローパスフィルタによって準備されたパルスを n 段の負遅延回路を通したものである. n の増加にしたがって先行量は増加するが、 $n = 4$ から波形の歪が目立ち始める. 特に初期の矩形パルスの前端 ($t = 0$), 後端

($t = T_w$) において変形が著しい. n を増加させても、 $t < 0$ の領域まで先行させることが不可能なことも見て取れる.

超光速伝搬や負遅延の実験においては従来ガウス型のパルスが使用されてきた. しかし、負遅延と因果律の関係を議論する上では、不適当な選択である. 実際に用いられるのは真のガウス波形 $g(t) = \exp(-t^2/2T_w^2)$ ではなく、階段関数 $U(t)$ によって前方の裾が切り取られた $v_1(t) = U(t)g(t - t_0)$, のようなものであり、この $t = 0$ における不連続性に伴って高周波数成分が導入される. この不連続性はいくら小さくとも、負遅延回路の持つ高周波数における大きい利得によって増強され、大きい負遅延量の場合には目立ったものとなり、波形が歪んでしまう. ガウスパルスを用いる場合、この不連続点の本質的な役割や存在そのものが見過ごされがちである.

電子回路によるシミュレーションを通して得られた超光速群速度に関する知見は以下のようなものである; (1) パルスを時間的に先行させることは可能であるが、予めローパスフィルタで整形しておく必要があり、そこでは先行量を上回る遅延が不可避である. たとえ群速度が c を越えても、フィルタを含む系全体としては情報を c 以上の速さで伝えることはできない. (2) 情報伝送に本質的に関係するのは波頭速度である. 波頭は c で伝搬するが、現実の系では検出感度やノイズなどの制約のために観測できない場合も多い. (3) 吸収や利得のある媒質中において波のエネルギー速度といったものを定義するするのは容易ではなく、(上記のように解決できる) 超光速群速度のパラドックス解消のために無理に導入する必要はない.

6 遅い光と止まった光のシミュレーション

6.1 媒質中の波動伝搬と群速度

媒質中での波動伝搬は分散関係 $k(\omega)$ によって決まる. ここで包絡線 $\mathcal{E}(x, t)$ によって、電場を $E(x, t) = \mathcal{E}(x, t) e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} + \text{c.c.}$ と表す. ただし、 $k_0 = k(\omega_0)$. 包絡線が中心周波数 ω_0 に比べて十分ゆっくり変化する場合には、波動方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + v_g \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

のように包絡線に関する一階の偏微分方程式に帰着される [15]. ここで群速度 v_g は式 (1) で与えられる.

遅い光や止まった光を考える場合には v_g を空間的、時間的に変化させることが重要である. v_g が定数の場合、式 (8) の解が $f(t - x/v_g)$ であることは容易に確かめることができる. これは、包絡線が形を変えずに速度 v_g で伝搬していることを表す.

真空から媒質にパルスが入射するときのように、群速度が場所の関数 $v_g(x)$ である場合の解は、ある地点 x_0 での電場の時間変化 $\mathcal{E}(x_0, t) \equiv \phi(t)$ を境界条件として

$$\mathcal{E}(x, t) = \phi\left(t - \int_{x_0}^x v_g(x')^{-1} dx'\right), \quad (9)$$

のように与えることができる。解の形から、どの地点においてもパルスの時間波形が保存されながら伝搬することが分かる。一方、ある時刻でのパルスの空間波形は $v_g(x)$ の空間分布の影響を受ける。 $v_g(x)$ が小さい区間においてはパルスの空間分布は圧縮され、 $v_g(x)$ が大きい区間においてはパルスの空間分布は伸張される。

媒質の特性を時間的に変化させて群速度を時間の関数 $v_g(t)$ とした場合の解はある時刻 t_0 のパルスの空間分布 $\mathcal{E}(x, t_0) = \psi(x)$ の関数として、

$$\mathcal{E}(t, x) = \psi\left(x - \int_{t_0}^t v_g(t') dt'\right), \quad (10)$$

のように表される。この場合は、パルスの空間分布が保存されたまま伝搬することが分かる。一方、ある地点に着目して包絡線の時間変化をとらえたときには、 $v_g(t)$ が小さい時間帯では包絡線の時間変化は緩やかになり、 $v_g(t)$ が大きい時間帯では速くなる。パルスの周波数スペクトルもそれに応じて変化することに注意する。

6.2 波動方程式の差分化と電子回路

波動伝搬を電子回路で実現するために、波動方程式 (8) を空間に対して離散化する。 n を整数として $x = n\Delta x$ の様に離散化すると、式 (8) の第2項は $(1/T)[v_{n+1}(t) - v_n(t)]$ となる。ここで $T \equiv \Delta x/v_g$, $v_n(t) \equiv \mathcal{E}(n\Delta x, t)$ とおいた。そして第1項は、 $(d/dt)[v_{n+1}(t) + v_n(t)]/2$ のように近似できる (中点近似)。離散化された波動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{v_{n+1}(t) + v_n(t)}{2} \right] + \frac{1}{T} [v_{n+1}(t) - v_n(t)] = 0, \quad (11)$$

となる。 $v_n(t)$ を入力、 $v_{n+1}(t)$ を出力とする入出力関係だと考え、方程式を周波数領域で書き直すことで、伝達関数を用いて入出力関係を表現できる。 $v_n(t)$ のフーリエ変換を $V_n(\omega)$ とすると、式 (11) は、

$$V_{n+1}(\omega) = H_A(\omega)V_n(\omega), \quad H_A(\omega) = \frac{1 - j\omega T/2}{1 + j\omega T/2} \quad (12)$$

と表せる。この応答関数は式 (7) と同じであり、オールパスフィルタ [図 2(c)] によって電子回路として実現することができる。入力する信号の周波数スペクトル帯域 $\delta\omega$ が

$$\delta\omega/\nu_d = (\delta\omega)T \ll 1 \quad (\nu_d \equiv 1/T) \quad (13)$$

の関係を満たすように帯域制限されていた場合には、出力には $T = 2RC$ の遅延をもって同じ波形が出力される。こ

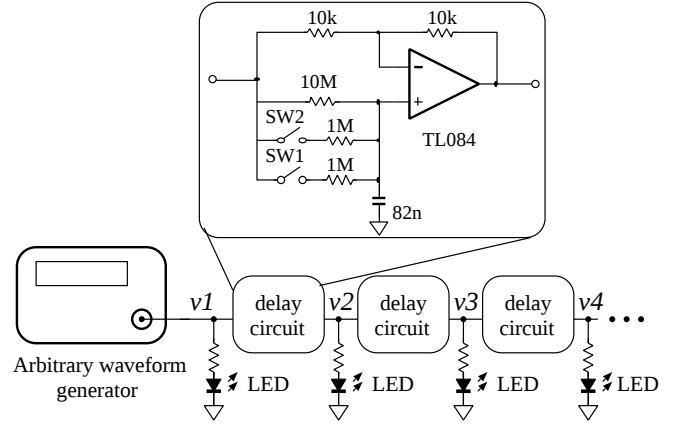


図 7: 遅い光, 止まった光の実験装置。

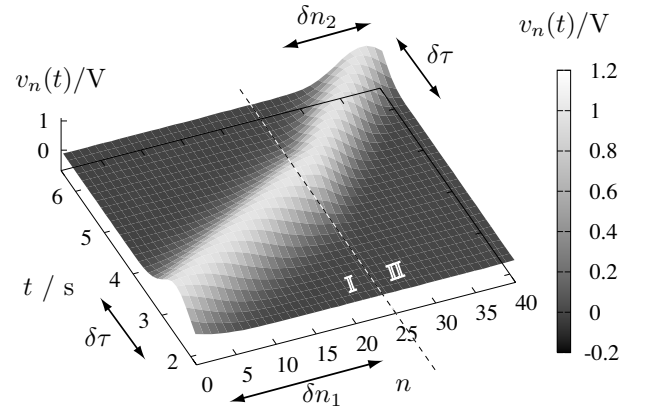


図 8: 空間に依存する群速度によるパルスの減速とパルス圧縮。速度 $\nu_1 = 13\text{s}^{-1}$ で領域 I ($n < 25$) を伝わるパルスが領域 II ($n \geq 25$) で速度 $\nu_2 = 6.7\text{s}^{-1}$ に減速している。 n は回路の段数で離散化された位置 (空間座標), t は時間軸である。垂直軸は出力電圧 $v_n(t)$ である。

の条件は、方程式 (8) の差分近似を正当化する条件にもなっている [15]。したがって、 Δx の長さの媒質を $T = \Delta x/v_g$ の正遅延回路 [図 2(c)] に置き換えることで、波動伝搬をシミュレートできる。

離散化された波動方程式 (11) に現れる定数 $\nu_d \equiv 1/T$ が元々の波動方程式 (8) の群速度 v_g に対応する。 ν_d の次元は時間の逆数で、通常 velocities の次元とは異なるが、時間あたりにパルスが通過する回路の数に相当するので、便宜的に“速度”と呼ぶことにする。

6.3 低群速度の実験

図 7 に示すように、遅延回路 (オールパスフィルタ) 40 段を縦続接続した。回路のパラメータは図中の小囲みの中に示している。すべての出力端子には発光ダイオード (LED)

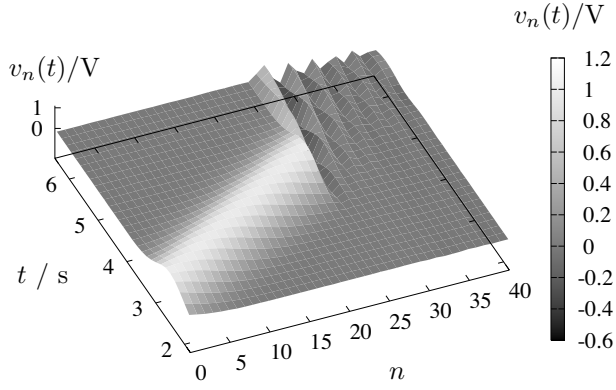


図 9: $\nu_1 = 13 \text{ s}^{-1}$ ($n < 25$), $\nu_3 = 0.62 \text{ s}^{-1}$ ($n \geq 25$) と設定した場合. $n \geq 25$ ではスペクトル条件のためにパルスの波形が大きく崩れている.

が接続されていて、パルスの伝搬が電光掲示板のような光の流れとして目視できる. 各段の速度 $\nu_d = 1/2RC$ は抵抗につながっている 2 つのアナログスイッチ (DG441) SW1, SW2 を利用して, $\nu_1 = 13 \text{ s}^{-1}$, $\nu_2 = 6.7 \text{ s}^{-1}$, $\nu_3 = 0.62 \text{ s}^{-1}$ の 3 段階 (約 $1 : 1/2 : 1/20$) に電子的に変化できるようになっている. 入力信号は振幅 1 V , パルス幅 $\tau = 1.0 \text{ s}$ の滑らかな波形を用いた. 入力パルスのスペクトル幅は $\delta\omega \sim 4/\delta\tau = 4.0 \text{ Hz}$ と見積もられる. 各段の出力電圧をデジタルオシロスコープで記録した.

まず ν_d が場所 n に依存する場合を調べるために, 40 段の回路を 2 つの領域: $n < 25$ (領域 I) と $n \geq 25$ (領域 II) に分けて, それぞれの領域での速度を $\nu_1 = 13 \text{ s}^{-1}$, $\nu_2 = 6.7 \text{ s}^{-1}$ ($\sim \nu_1/2$) と設定した. 図 8 は波形を出力の位置 (回路の段数) n と時間 t の関数として 3 次元で表現したものである. 領域 I を真空, 領域 II を EIT による低群速度領域を考えれば, この設定は遅い光の実験を回路でシミュレートするものといえる.

領域 I では, ガウス形のパルスが 1 秒あたり 13 段の速さで形を変えずに回路を通過していることが分かる. この場合, $\delta\omega/\nu_1 \sim 0.31$ なのでスペクトル条件 (13) を満たしているので, パルス波形の変形は見られない. 領域の境界 $n = 25$ でパルスの伝搬速度が約半分になっていることが分かる. 24 段目と 25 段目の回路の境界でパルスは時間的に連続的につながっていなければならないので, パルス幅 (時間幅) $\delta\tau$ はどちらの領域でも変わらない. スペクトル条件を両領域で計算すると, $\delta\omega/\nu_1 = 0.31 < 1$, $\delta\omega/\nu_2 = 0.60 < 1$ となり, 領域 II でも条件 (13) を満たしており, 波形が崩れることはない. パルス幅 δn は領域 I で $\delta n_1 = \nu_1 \delta\tau \sim 13$ 段, 領域 II で $\delta n_2 = \nu_2 \delta\tau \sim 6.7$ 段のようになっている, 領域 II でパルス幅が空間的に $1/2$ に圧縮されている.

伝搬速度をさらに遅くすることを考えて, 領域 I を $\nu_1 =$

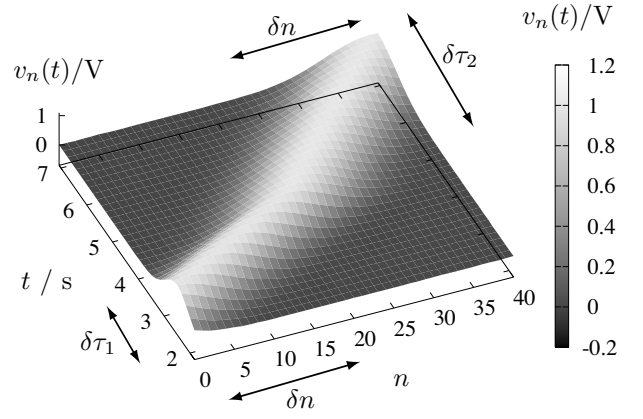


図 10: 速度を時間的に変えた場合. パルスは $t = 4 \text{ s}$ で速度 $\nu_1 = 13 \text{ s}^{-1}$ から $\nu_2 = 6.7 \text{ s}^{-1}$ に減速する.

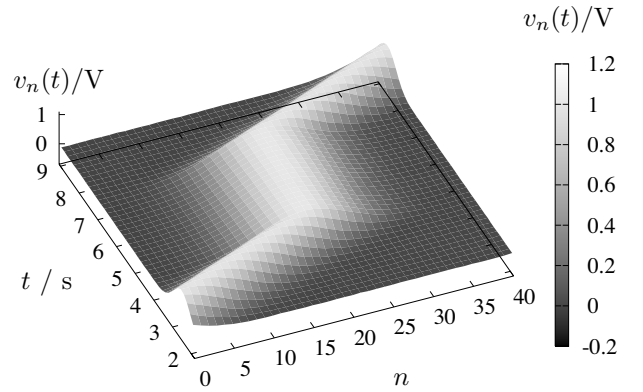


図 11: パルスの凍結. 時刻 $t = 4 \text{ s}$ から $t = 7 \text{ s}$ までの間パルスは凍結しており, その後伝搬を再開している.

13 s^{-1} , 領域 II を $\nu_3 = 0.62 \text{ s}^{-1}$ ($\sim \nu_1/20$) として実験を行った. パラメータだけをみれば, 速度は領域 II で $1/20$ になるので, パルス幅も $1/20$ になると推測される. しかし, 実験結果は図 9 のように, 領域 II で大きくパルスの形が崩れてしまっている. これは, スペクトル条件 (13) を満たしていない ($\delta\omega/\nu_3 = 6.4 > 1$) からである. 光の低群速度化の実験においても同じようなことが起こりうる. 入力パルスのスペクトル幅が EIT の透明化窓よりも大きい場合には同様のパルス波形の著しい変形が起こる.

つぎに ν_d が時間に依存する場合を調べるために, 伝搬の途中で, 速度 ν_d を変えてみる. 時刻 $t = 4 \text{ s}$ で速度を $\nu_1 = 13 \text{ s}^{-1}$ から $\nu_2 = 6.7 \text{ s}^{-1}$ に変えたときの実験結果は図 10 のようになった. 時刻 $t = 4 \text{ s}$ にパルス全体の速度が $1/2$ に減速されている. その結果, パルス長 (空間的) δn は変わらないが, パルス幅 (時間的) $\delta\tau$ は倍になっている. 速度 ν_d が $1/2$ になっても, それに伴って, パルスのスペクトル幅 $\delta\omega$ も $1/2$ になるので, $\delta\omega/\nu_d$ は一定であり, スペクトル条件 (13) は満たされ続ける. このような状況は, 光の群速度制御の実験では, EIT 媒質中にパルス全体が入っ

てから群速度を変えることに相当する。

このように、時間的に速度 v_d を変えることで、スペクトル条件を保持し続けることが可能となる。したがって、さらに遅い伝搬、そしてパルスを止めることさえ可能となる。実験条件を少し変え、 $v_1 = 13 \text{ s}^{-1}$ だった速度を時刻 $t = 4 \text{ s}$ で $v_3 = 0.62 \text{ s}^{-1}$ に変え、時刻 $t = 7 \text{ s}$ で再び $v_1 = 13 \text{ s}^{-1}$ のように戻した結果を図 11 に示す。速度が極端に遅くなる $t = 4 \text{ s}$ から $t = 7 \text{ s}$ の間でパルスがほぼ止まっていることが分かる。止まっていたパルスは再び $t = 7 \text{ s}$ で伝搬を再開する。前述の通り、どの時刻でも $\delta\omega/\nu_i$ は一定であるのでスペクトル条件は保たれている。それゆえ、このような時変系においてパルスの形を保ったまま、パルスの凍結および再生が可能となる。

7 おわりに

回路モデルはさまざまな物理系を理解する上で非常に有用である。本稿で取り上げた波動伝搬の他にも、量子系や非線形力学系などのシミュレーションに広く利用されている。回路はパラメータ選択の自由度が大きく、さまざまな系の振舞を再現できる柔軟性を持っている。一方、回路自身が物理系であることから、物理的に意味のない状況設定はできないという適切な制約条件を持っている。これは単なる数値シミュレーションとは異なる点である。本稿で述べた負遅延回路において、この利点は真価を発揮し、超光速群速度の議論において従来見過ごされてきた問題点を明らかにすることができた。また、光パルス凍結のような理解のために高い専門性を要する現象を身近なものとして体感できること利点である。さらに回路によるモデル化の利点は、必ずしも実際に回路を製作する必要がないということである。回路モデルを導くことができれば、回路シミュレータソフト (SPICE, Octave, Scilab など) によって回路を動きを忠実に再現できるからである。とはいえ、キーボードを捨てて、はんだごてを握っていただくことが、筆者の望みである。本稿で用いた回路の詳細は WEB ページ [18] に掲載している。

本研究の一部は、21 世紀 COE プログラム、科学研究費補助金の支援を受けて行われた。

参考文献

- [1] L. Brillouin: *Wave Propagation and Group Velocity* (Academic Press, 1960).
- [2] J.A. Stratton: *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, 1941).
- [3] S. Chu and S. Wong: *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 738.
- [4] L.J. Wang, A. Kuzmich, and A. Dogariu: *Nature* **406** (2000) 277.
- [5] M.D. Stenner, D.J. Gauthie, and M.A. Neifeld: *Nature* **425** (2003) 695.
- [6] S. Harris: *Physics Today* **50** (1997) 36.
- [7] L. Hau, S. Harris, Z. Dutton and C. Behroozi: *Nature* **397** (1999) 594.
- [8] M. Fleischhauer and M. Lukin: *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 5094.
- [9] M. Fleischhauer and M. Lukin: *Phys. Rev. A* **65**, (2002) 022314.
- [10] D. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, and R. Walsworth: *Phys. Rev. Lett* **86** (2001) 783.
- [11] C. Liu, Z. Dutton, C. Behroozi, and L. Hau: *Nature* **409** (2001) 490.
- [12] M.W. Mitchell and R.Y. Chiao: *Am. J. Phys.* **66** (1998) 14.
- [13] T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano: *Am. J. Phys.* **70** (2002) 117.
- [14] M. Kitano, T. Nakanishi, and K. Sugiyama: *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, **9** (2003) 43.
- [15] T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano: *Am. J. Phys.* **73** (2005) 323.
- [16] 北野 正雄, 中西 俊博: *応用物理* **72** (2003) 556.
- [17] U. Tietze and Ch. Schenk, *Electronic Circuits, Design and Applications* (Springer-Verlag, 1991).
- [18] <http://www-lab15.kuee.kyoto-u.ac.jp/wave/>

Simulation of anomalous wave propagation with electric circuits

Masao Kitano and Toshihiro Nakanishi

abstract:

Owing to the recent development of quantum optical experiments, one can make light pulses propagate faster than the speed of light, c . It is also possible to make them run at the speed of bicycles and even come to complete stop. These anomalous light velocities, attracting

attentions from the viewpoints of applications but also provide opportunity to review the physics of wave propagation. We present electric circuits that simulate wave propagation and discuss the physical implications of superluminal propagation and the mechanism of freezing of light pulses.