

B. Bolzano の数学における無限と集合 B.Bolzano's Infinity and Sets in the Mathematics

伊藤美香
Mika Ito *

Abstract

In the field of computer science, it has been often discussed that formalization of Mathematics. In spite of the concern over sets has risen, little attention has been given B.Bolzano's infinity and sets. What is to be noted is 'eine unendliche Vielheit' which regarded as 'infinity of finitary sets' in the mathematics. R.Dedekind holds the same attitude that in the in this aspects. In addition, it should also be emphasized that compactness. It is based on Model Theory. Compactness is one of the real number products. It can be said B.Bolzano's infinity clarifies essence of real number. The same sets is true for mathematics. This study make contribution to a better understanding of sets in the computer science.

§ 1. 数学における無限の探求

Bernard Bolzano (1787-1848) 著、Paradoxien des Unendlichen. Leipzig, 1851. (プラハ国立博物館蔵) では、無限集合を定義しその性質を研究する試みにおける先駆者としての役割を見出す事ができる。¹

無限の本質を集合概念を用いて具体的に問い直す試みは、後に誕生する集合論の素地を具体的に与えている。ところでいったいこの本質は何に由来しているのだろうか。それは実数の性質という問題にたどり着くことがわかる。19 世紀初頭における解析学の厳密な基礎づけに向けられた反省の動機は、例えば無限数列に関する不用意な計算が、矛盾に突き当たることにも如実に現れていた。

Received November 29, 2015 Revised September 28, 2016.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 01-08, 01A50, 01A55, 01A67

Key Words: Infinity Sets, Real Number, Compactness, Homotopy Type Theory, Computability Theory, Proof Theory, Model Theory.

Supported by Kyoto University. RIMS@2015

*三重大学非常勤講師 Mie University, Tsu, 514-8507 JAPAN

email: mikalla@2001.jukuin.keio.ac.jp

¹我が国においても三重大学名誉教授、藤田伊吉 (1910-1975) により『ボルツァーノ全集』(フロムマン書店) 1963 が刊行された。当時、編集顧問を歴任。

数列の収束性、極限概念の問題が、さらには関数概念、連続性の問題²としていわば解析学の算術化 Arithmetisieren へと続く、かつての歴史がそれらを物語っている。

いかなる直観性の痕跡ある解析をも見逃さない精神、これこそ‘厳格な接近法’へむかう源であった。無限の本質は実数の本質であり、現実的には解析学の核心を担ってきた。本論文では、B.Bolzano の数学における無限の考察に焦点をあてている。

具体的な数学的扱いにおける問題点をとおして、無限の考察に明瞭な視点を提供するの無限集合の取扱いである。これを可能とさせる定理がコンパクト性であるが、位相幾何学を起源とするコンパクト性が、集合概念と結びつき完全性定理³に関連する。と同時に Lowenheim-Skolem theorem とも重なっている。⁴

さらに、不変量⁵が、B.Bolzano の語る無限と関連性を有していることがわかる。それは、次章以降に述べる B.Bolzano の‘有限量の無限集合’を垣間見ることに他ならない。この点において、数学を集合概念で表すという B.Bolzano の無限概念 (無限集合の源泉) および、その核心に位置づけることができる。

Paradoxien des Unendlichen⁶に関連する体系的な数学的著述は、1830 年に集中している。

この時期の自筆原稿は、当時出版はなされなかったが、現在ではウイーン国立博物館に保存され、重要部分の写真複製がチェコ科学アカデミーのアルヒーフに存在する。『関数論』『数論』『線・面の位置・方向・曲率論』がそれである。実数論の算術化に関するものは、1962 年に『実数理論』としてリフリーク博士によって出版された。

Paradoxien des Unendlichen における 70 節からなる全体構成において、無限概念から無限集合まで、無限量の原則とその計算の伴う問題点、時間・空間の中の無限、実体・運動と神の創造、と実際は区切られてはいないが、大きく 4 つの項目に分けてとらえると理解しやすいと言える。

特に、前半の 2 項目は数学的内容でほぼ占められている。本稿において扱われる点は煩雑さを避ける意味でも、この箇所の数学的内容に焦点が絞られている。今回は扱わないが、後半の 2 項目では物理的な概念が中心となっている。以下に具体的に示す。

§ 2. 無限概念から無限集合へ

無限を考察する意義は、数学上においてこそあると主張した B.Bolzano は、無限集合、無限を含む計算・証明においては、有限集合とはっきり区別することを強調する。実際、無限集合は有限集合とまったく異なるふるまいをするので、明確な区別をはっきりとさせることが何よりも重要な基礎として位置づけられることになる。

²B.Bolzano において関数の連続性は、直観的・幾何学的ではなく純解析的に規定されなければならない。

³Proof Theory の基礎理論ともなっている。

⁴コンパクト性定理はハイネ・ボレルの被覆定理が原点であり、モデル理論の基本定理でもある。

⁵Homotopy Type Theory は計算機科学における証明論の有力な手段の 1 つである。

⁶100 冊近い遺稿含む著作の中で最晩年に著わされた、いわば特別な著作とみることもできる。

さらに無限集合の間の 1:1 対応を定め得る可能性としての全射・単射・全単射に相当する見方を明確にして、集合を数学的に扱うための集合論の基礎を提案した。

§ 2.1. 有限量の無限集合

無限的多数性 (eine unendliche Vielheit) でとらえる有限・無限を理解することが B.Bolzano の無限を考える上でのポイントとなっている。有限と無限はまったく異なるふるまいをするにも関わらず、ともに集合に適用され得るものであり、しかもそれは同時に存在する。また、単に終わりなきものと言うだけではならず、それは例えていうなら言葉で示される真理が無限を表すとき、同時に有限も共存しなくてはならないということを主張するのである。

§ 2.2. 2 つの無限集合における相互関係

相互関係を具体的に示すと以下のようなになる。2 つの無限集合では、一方の集合に属するものが他方の集合に属するものと一組に結合して 2 つ以上の組に現れないようにすることが可能 (全単射) であり、このことは和についても同様にいえる。ただし、集合の要素どうしが 1:1 の関係、かつ対応する要素が等しい場合であっても、有限集合のように直ちに等しいことにはならないことに注意を払う必要があるとする。

§ 3. 無限量の原則と計算に伴う問題点

以下の 4 つに分けて無限とその計算について論じている。現実的領域における無限、一般的数論及び無限大・無限小における注意点、零の概念と計算の矛盾、無限を伴う計算方法の解釈について具体的に示す。

§ 3.1. 現実的領域における無限の存在

無限とは非現実性においてのみ存在しているわけではない。現実的純粋な概念からの推論からも、また他の仕方であれ存在する。

例えるなら、無限者としての神は知、意、外的な働きにおいて無限性を有しているのととらえることができるが、その他方、一見無限と対立する有限的存在者であっても、その集合は無限集合でなくてはならない。

非現実性とその思索の対象についても、例えば、直観によって 2 点を定め得る場合、それだけで 2 点間の無限集合を規定し得ることになり得るとする。非現実性の象徴：(例えば) 命題・真理、が有する無限においても、現実性を有するものだけに (その要素が) 限定されるのは間違いであり、非現実性の中にも同時に現実性が見出されると考えることがふさわしいとする。

§ 3.2. 数論と無限大・無限小における本質

無限とは無限に多くの要素からなる集合であり、単に数のみでは規定できない集合とみなされるべきものである。無限相互の計算は、単に算出することにあるのではなく、2 つ

の無限の間の関係を定めることを目的とするのが本質的である。

3.2.1. 無限大・無限小についての確認 2つの無限量は有限の差を持つ。単に記号的等式とみなせば、いかなる無限量の比も認められることから、一方が他方の無限倍も大なる無限量の存在は認められるが、自然数 N の和集合はすべての自然数よりも大であるといっても、この2つの無限量を厳密に規定することは容易ではない。

無限大と同様に、無限小にも無限に多くのものがある、ある1つが他の1つに対して、どんな任意の比であれ2つの関係が存在する。一方が他方の無限倍も大であることが可能。ただし、無限小は無限大の逆値ではない。

3.2.2. 数学における無限大無限小 無限大(無限量)とはならない無限級数には逆説的なものがある。

本来、級数を1つの量として項の総和とみなすならば、項の配列順序をいかに変えようとその値は何の変化も受けないという性質を有するはずである。⁷

3.2.3. 無限量と無限級数その区別の必要性 無限級数の扱いにおいては、総和で生じる量を等しい、もしくは他方が一方よりも大(小)であるとみなすので、無限量と無限級数のはっきりとした区別が必要である。

正の無限大の値が、また他方では負の無限大の値が同じ値の式として生じ得ることにも注意を払う必要がある。(無限量は本質的に変化するものではない) つまり、外見上の相違に関わらず等しいということは、項の大きさが変わってもその多数さである無限的多数性は変化しないことを明確にするべきである。

結果として、2つの無限級数の和である無限大(量)については、単に一方の項が他方の項に等しい(あるいは大・小)という理由だけで、直ちに2つの無限級数を等しい(あるいは大・小)とみなすことはできない。⁸

§ 3.3. 零の概念と計算上の矛盾

記号0とは、本来何も加えようとも、また何も差し引きしないという意味において用いられるべきものである。

とりわけ恒等式以外の等式における取扱いにおいては注意を要する。恒等式以外の等式において、除数として用いることが不合理な結論(無限量さえも0となる)を導いていることに注意を払う必要がある。⁹

§ 3.4. 無限を伴う計算方法の歴史上にみる解釈の例

無限小は、同じ無限ではあっても無限大と異なり、歴史上特別な意味を有してきた。例えば歴史上の記述が極端に少ないことにも現れていると言ってよいであろう。

⁷無限量と無限級数の区別に関して、無限個の数の和の定義については、B.Bolzano 自身与えていない。

⁸実際、自然数 N の2乗の和と自然数 N の和は等しい。

⁹実際、数列の極限値の性質においても分母0は認めていない。

歴史的社会的背景においては、イエズス会が無限小の出版を禁じていたといういきさつもある。¹⁰ここでは無限小に関連する例を含めての計算解釈における矛盾点をあげている。

3.4.1. 無限小の加法・減法で起こる矛盾 無限量を有するにもかかわらず、無限小を含めたいかなる有限小において加法・減法で高次の無限大と結ばれる時は、すべて等しく 0 としての扱いをうけるということ。

比の関係にある量により等しいを意味することは当然要求されるべきことではあるが、非通約比にあるときは十分多きな数に対しても一数を求めることになり、更に有理数であれば 2 つの量そのものに差のあることが分かり、2 つの無限量は直ちには等しいことにならない。扱いに注意が必要である。

3.4.2. L.Euler の仮定における場合 Leonhard.Euler(1707-1783) にならえば、無限小はただの 0 であり、無限大は有限量を 0 で除することで得れる分数として見出すことができる。しかし有限量と加法とで結ばれる無限小量がなくなることが正当化されることになる。さらに、2 つの無限量(大・小)の除去により、有限量が生じる可能性を明かにすることが困難になってしまう。

3.4.3. 無限を伴う計算解釈の実際 今日、無限を伴う計算は Augustin.Louis Cauchy(1789-1857) によって容易に明らかにされている。¹¹そこにおいては量が無限に小となり得ることを前提とはしていない。

量が可変であるような変量 Joseph.Louis Lagrange(1736-1813) によるものが導関数を持つ。これは X に依存する Y の導関数を表す単なる記号にすぎない。一方では単に 0 とみなされる類のものとなっている。単なる記号である以上は、批判しようがないというのが実際である。

§ 3.5. 無限量の計算に伴う問題点のまとめ

無限大・無限小において共通因数を約すことはいかなる場合にも許されている。

0 の値は隠れた形でなされているため、計算に伴う矛盾と深刻さが目立たない事が問題点としてあげられる。さらに、どれだけでも小となるような量は必ずしも 0 とならなくてはいけないというわけではない。

幾何学において、連続律の認められない量が多く存在する。多角形、多面体の周・面積を限定する役目を持つ線角の大きさがそれである。また連続律は、すべての可変量においてみられるわけではない。

¹⁰これらの興味深い話題は、数理解析研究所、数学史の研究 2015 における足立恒雄の発表においても紹介がなされた。『イエズス会とガリレオ派の不可分者を巡る闘争—アレクサンダー「無限小」紹介』より

¹¹コーシーは現存するあらゆる数学者のうちで最も尊敬し、親しみを感じている人で、彼の創造的精神に私は最も重要な証明のいくつかを負っていると 1833 年の 8 月にプシホンスキーへの手紙の中で述べている。

§ 4. 総括

§ 4.1. 無限量としての不変量を考慮することの重要性

以上をふまえて再考察するならば、無限集合とりわけ無限量の計算には問題点が多く、扱いが煩雑であることが問題の核心であることがわかる。

無限級数は、有限の操作で計算機を扱うという性格上においては欠かすことのできない視点を提供する概念であるが、同時に、上記に述べてきた問題点を解決する意味においては、不変量との区別が大前提となる。

無限的多数性を考慮した B.Bolzano における‘有限量の無限集合’は、有限と無限が同時に存在する可能性を同時に秘めた無限の見方である。

今日、計算機科学において数学を扱うというハードルは低くはなっているものの、完全な融合をみているというわけではない。

無限量としての不変量の扱いと、これらにおかれた問題的困難を払拭することの意義は、集合論の基本を計算機科学に提供するという場面においても同様、計算機科学が最終目標とするであろう概念となり得ることを意味している。¹² コンピュータにできる数学・できない数学の両者を近づける工夫は常に進歩している。¹³

例えば、計算機が有する数学における信頼性の 1 つの指標となるのは、無限量としての不変量を応用するやり方であろう。¹⁴

§ 4.2. B.Bolzano の無限におけるコンパクト性と実数の数学的扱いにおける源泉

位相幾何学を起源とするコンパクト性は、いうまでもなく集合概念と深く結びついている。無限を有限部分集合でとらえるというこの考え方は、B.Bolzano が主張してきた‘有限量の無限集合’を支える上での概念とその性質にほぼ共通する。これは B.Bolzano の数学における無限の核心部分といえるものである。

B.Bolzano はその生涯において 100 冊にも上る著作物を残したが、死後年月を経て評価された、この点についても少し述べておきたい。数学史家 O.Stolz は、比較的早く B.Bolzano の解析学に関する業績について注目したとされる人物に H.Hankel(1839-1873), H.A.Schwars(1843-1921) を挙げている。

前者は無限数列の正当な把握において B.Bolzano が A.L.Cauchy に先立っていることを 1871 年の論文でみとめている。後者は、1872 年の論文において、B.Bolzano は、後に Karl.Weierstrass. (1815-1897) が発展させた変数の上限の問題に関する創唱者であることを認識している。

ここでさらに重要な点は、B.Bolzano の無限集合は、解析学の歴史とともにあったということの再認識であろう。

¹²Grothendieck Topos から Homotopy Type Theory のこれまでの発展を見ても明らかであろう。

¹³数学セミナー 2015.11 月号において、自然数や集合の扱いが難しいコンピュータについての特集が組まれている。

¹⁴Model Theory の主要な手法である超準解析における co-induction の手法もその 1 つである。

1930 年頃に出版された（未完の）著作であるとされる『関数論』がある。¹⁵当時の数学界に直接的寄与はなしえなかったとみなされてきた遺稿集である。

『関数論』では、関数に関する一般的問題（序論）、関数の連続性・不連続性、無限小、微分可能の問題（第 1 章）、導関数に関する諸問題（第 2 章）等が多くの例を用いて、詳細に論ぜられている。有理関数に限られているがまとまった関数の概論書である。

ベルリン大学の私的な冬季講義 (1865-1866) において、これを教科書として無理数論を講義したのは、K.Weierstrass. であった。彼の並ならぬ解析学に向けられた精神、いかなる直観性の痕跡ある解析をも取り除こうとするその精神¹⁶は、B.Bolzano から受け継いだと言っても過言ではない。

この講義がもとになって、Bolzano-Weierstrass の定理は形成されていったのであろう。『関数論』においては、『連続関数の中間値の定理』として「関数の最小値・最大値に関する定理」とともに登場する。

実数の有界な無限集合はすべて集積点をもつというこの主張によって、解析学における無限集合の様相および関連が明確になったばかりではない。B.Bolzano 自身が与えた「有限部分集合の無限集合における位置づけ」が一層明確になっている。これは、実数の本質そのものを反映しているということに他ならない。

その後、Georg.Cantor (1845-1918) が集合論に B.Bolzano を起源とする集合論¹⁷を導入したのは 1872 年のことである。¹⁸今日の数学を語る土台としての集合概念の起源となる考え方の誕生なのであった。

§ 5. 謝辞

本稿は、京都大学数理解析研究所における研究集会@ RIMS「数学史の研究」(2015) を元に執筆がなされたものである。記念すべき「数学史の研究 20 周年」にあたる。関係者の皆様にご支援賜りましたことを感謝致します。無限集合の源流を知りたいという好奇心もさることながら、B.Bolzano を紹介してくださり機会を設けてくださいました日本科学史学会および東海支部をはじめとする皆様、そして名古屋大学情報科学研究科・多元数理科学研究科の関係者の皆様にも末筆ながら感謝申し上げる次第である。

参考文献

- [1] Alonzo, C., Introduction to Mathematical Logic, vol.1., Princeton University Press., 1956.

¹⁵ 井関清志によると「関数についての研究」は 1920 年代に発見されて、チェコの数学史家ルイフリックにより注釈をつけて後になって公にされたとある。実際には、既に本文中に述べたが 1830 年頃書かれ (B.Bolzano 自身が手紙の中で述べている) ほぼ 1 世紀を経た 1930 年頃に始めて世に出た遺稿に相当する。

¹⁶ $\varepsilon - \delta$ 論法の創作にもつながるのであろう。

¹⁷ 集合論における相等性を再定義する必要性を感じていた彼が、 R の互いに異なる 2 つの無限部分集合の間に 1 : 1 対応を定め得る可能性を殊によく具体的に示した B.Bolzano に対して感嘆の念を抱いていた。

¹⁸ ベルリン大学で E.E Kummer 及び L.Kronecker のもとで数論を研究。J.C.F Gauss の伝統を受け継ぎ、2 次方程式の整数解に関する研究において博士号をとった。

- [2] Bolzano, B., Paradoxien des Unendlichen., *Beic. H. Reclamsen.*, Leipzig, 1851. (邦訳 ; 無限の逆説、みすず書房、1978).
- [3] Buss, Samuel, R., An Introduction to Proof Theory, HandBook of Proof Theory, vol.137., *Elsevier.*, 1998.
- [4] Cantor, G., Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen., *Math. Annalen.*, Bd.5., 1872.
- [5] Dedekind, R., Stetigkeit und irrationale Zahlen., *Brunswick.*, 1872. (邦訳 ; 数について—連続性と数の本質、第一篇 連続性と無理数、岩波書店、1961.)
- [6] Dedekind, R., Was sind und was sollen die Zahlen?., *Brunswick.*, 1888. (邦訳 ; 数について—連続性と数の本質、第二篇 数とは何か、何であるべきか、岩波書店、1961.)
- [7] Diendonné, J.(Ed)., Abrégé D'Histoire des Mathématiques. 2 volumes, *Hermann.* Paris, 1978. (邦訳 ; 数学史 1700-1900 II、岩波書店、1985.)
- [8] Enrico G., Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici., *Bollati Boringhieri.*, Torino., 1999. (邦訳; 数はどこから来たのか 数学の対象の本性に関する仮説, 共立出版、1999.)
- [9] Enderton, Herbert. B., A Mathematical Introduction to Logic. Second Edition., *Academic press.*, 2001.
- [10] Gordon, E.I. Kusraev, A.G., Infinitesimal Analysis., *Kluwer Academic Publishers.*, 2002.
- [11] Grattan-Guinness, I., The Search for Mathematical Roots. 1870-1940 : Logics, Set Theories and The Foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel., *Princeton University Press.*, 2000.
- [12] Harrison, J., Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning., *Cambridge University Press.*, 2009.
- [13] Kleene, S.C., Mathematical Logic., *Dover Publications.*, 1967.
- [14] Nicolas B., Èlément D'Histoire des Mathématiques., *Masson.*, Paris, 1984. (邦訳; ブルバキ 数学史上・下、筑摩書房、2006.)
- [15] Weierstrass, K., Abhandlungen Aus Der Functionenlehre., *Verlag von Julius Springer.*, 1886.
- [16] 岡本久・長岡亮介、関数とは何か 近代数学史からのアプローチ、近代科学社、2014.
- [17] 蟹江幸博、Mathematical Terms English-Japanese Dictionary、近代科学社、2013.
- [18] 田中一之編、ゲーデルと 20 世紀の論理学、東京大学出版会、2007.
- [19] 中根美知代、 $\varepsilon - \delta$ 論法とその形成、共立出版、2010.
- [20] 藤田伊吉、ボルツァーノの哲学、補論：ボルツァーノの数学論、創文社、1963.