

氏 名	おも だ やす ひろ 面 田 康 裕
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2138 号
学位授与の日付	平成 12 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	On Freudenthal's geometry and generalized adjoint varieties (フロイデンタルの幾何学と一般化随伴多様体)

論文調査委員	(主 査) 教 授 河 野 明	教 授 丸 山 正 樹	助 教 授 森 脇 淳
--------	--------------------	-------------	-------------

論 文 内 容 の 要 旨

複素半単純リー群 G の表現空間にたいして、その射影化にも自然に G が作用する。複素半単純リー群 G の作用するコンパクトな等質空間はある既約表現の射影化における唯一の閉軌道として考えることができる。このようにコンパクトな等質空間をある既約表現との組で考えるときこれを一般化随伴多様体と呼ぶ。

H. Freudenthal は 1950 年代に例外型のリー群を具体的に構成しその過程で、彼の名前を冠して呼ばれる Freudenthal のマジックスクエアーという表に対応して幾つかの幾何学を定義し、研究している。それはそれぞれメタシンプレクティック幾何学、シンプレクティック幾何学、射影幾何学、楕円幾何学と呼ばれるものであり、任意の実数体上の Hurwitz 代数に関して定義されるものである。それらの幾何学においては、シンプレクトン、平面、直線、点といった概念が定義されていてそれぞれのなす集合はマジックスクエアーという表において対応するリー群の作用するコンパクトな等質空間になっていることがわかっている。H. Freudenthal による幾何学の研究はほとんどの場合これを複素化することが可能でありこの論文においてはすべて複素数体上で考察される。

複素数体上で考えるとき H. Freudenthal による幾何学において現れてくるコンパクトな等質空間は何らかの意味ある形で一般化随伴多様体として考えられないか？そしてそれが可能ならばその場合に出てくる既約表現はいったいなんであるか？という問題に対する一つの解答を与えるのがこの論文の前半における内容である。

ここでは特に Hurwitz 代数としてケーリー代数の場合のみを詳しく述べる。メタシンプレクティック幾何学に対応するリー群は E_8 型のものであり、シンプレクトンのなす空間 W_4 は構成から E_8 型のリー群の随伴多様体である。次に平面全体のなす空間 W_3 は一般化随伴多様体に含まれる通常の意味での射影直線全体のなす空間と考えられることから E_8 型のリー環における 2 次元部分空間のなすグラスマン多様体の部分多様体として思える。この時平面全体のなす空間 W_3 は E_8 型リー環の 2 次外積空間の射影化に含まれる。そこで E_8 型リー環の 2 次外積空間を既約分解してそこに出てくる既約表現から構成される一般化随伴多様体の次元を計算すると実際に W_3 が自然に含まれる既約表現は唯一に決まる。同様に直線全体のなす空間 W_2 は E_8 型リー環の 3 次外積空間を既約分解することで含まれる既約表現は決まる。さらに点全体のなす空間 W_1 は H. Freudenthal による構成から E_8 型リー環の準同型写像全体のなす表現空間の射影化に含まれるのでこれを既約分解してさらに他の場合と同様に次元の計算を行うことで含まれる既約表現は決まる。同様のことはシンプレクティック幾何学や射影幾何学においても実行されてそれぞれの平面、直線、及び点のなす集合がある既約表現から自然に得られる。ただしここで既約表現を選ぶ際 2 つの表現がいわゆる転置のような関係になっている場合にはこれらのうちどちらを選ぶかには任意性がでてくるがその際にはその後の便宜上天下りの一方を選択しておく。

上の計算において決定された既約表現達をその最高ウェイトから自然にディンキン図形における頂点達と対応づけることでおもしろい対称性が得られる。

論文の後半部分では複素単純リー群にたいしてそのリー環のから構成される随伴多様体の双対多様体の次数についての計算が行われている。メタシンプレクティック幾何学におけるシンプレクトンのなす空間 W_4 は随伴多様体である。ここで双

体多様体を考えるときにはそれぞれの元の多様体は一般化随伴多様体としてある既約表現の射影かに含まれているものとして考えられている。F. Knop と G. Menzel により複素単純リー群から構成される随伴多様体の双対多様体は超曲面ナあることが知られていることから、その次数は、定義方程式の次数ゲして計算される。この時得られた結果は次のものである。

G を複素単純リー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー環, $\mathfrak{h}$ をカルタン部分代数, W をそれに対応するワイル群で, λ を最高ウェイトとする。さらに X をそれらから構成される随伴多様体とするときしその双対多様体 $\check{X}$ の次数は次の様に与えられる。

$$\text{Deg} \check{X} = \#(W \cdot \lambda).$$

ここで $\#$ は集合における元の個数を表しているとする。

論文審査の結果の要旨

H. Freudenthal が 1950 年代に例外型のリー群を具体的に構成する過程で, Freudenthal のマジックスクエアという表に対応して幾つかの幾何学を構成し研究し。これらは任意の実数体上の Hurwitz 代数に関し定義でき, シンプレクトン, 平面, 直線, 点といった概念が定義できる。これらの集合はこの表において対応するリー群の作用するコンパクトな等質空間である。

H. Fretidenthal による幾何学の研究はほとんどの場合複素化が可能である。面田氏の研究のテーマはこの複素化の研究である。

主論文には 2 つのテーマがある。

前半のテーマは, この複素化された幾何学で現れるコンパクトな等質空間を一般化随伴多様体として意味付けその既約表現を決定することである。この時に既約表現を最高ウェイトから自然にディンキン図形における頂点とを対応させると興味深い対称性があることも示されている。

後半のテーマは複素単純リー群に対してそのリー環のから構成される随伴多様体の双対多様体についての次数についての計算である。

実際, 名古屋大学の向井茂教授らによりシンプレクティック幾何学における平面のなす空間の双対多様体の次数が 4 であり, 射影幾何学における直線のなす空間の双対多様体の次数は 3 であることが示されている。メタシンプレクティック幾何学におけるシンプレクトンのなす空間は随伴多様体であり, F. Knop と G. Menzel により複素単純リー群から構成される随伴多様体の双対多様体は超曲面であることが知られておりますので, この問題は極めて自然なものであることがわかります。

面田氏は次の結果を得ている。

G を複素単純リー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー環, $\mathfrak{h}$ をカルタン部分代数, W をそれに対応するワイル群で, λ を最高ウェイトとする。さらに X をそれらから構成される随伴多様体とするとき, その双対多様体 $\check{X}$ の次数は次の様に与えられる。

$$\text{deg} \check{X} = \#(W \cdot \lambda).$$

ここで $\#$ は集合における元の個数を表しているとする。

この主張の証明のポイントは, リー環 $\mathfrak{g}$ への G の随伴作用に関して $\mathfrak{g}$ 上の不変多項式のなす環とカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ へのワイル群 w の作用に関して $\mathfrak{h}$ 上の不変多項式のなす環の間の同型写像を述べたシュバレーの定理とそれから得られる随伴商写像を使うことにある。またこの結果はとても簡潔なものでありこれによって H. Freudenthal の幾何学において現れた特別な場合についてすぐに具体的な数を与えることができる。

以上の結果はリー群の表現論, 代数幾何学に関連した興味深いものであり, また例外型リー群の表現についての具体的なものである。主論文はこれらの分野についての重要な成果であり博士 (理学) の学位論文として充分なものであると考える。また申請者は博士後期課程の研究指導の認定をすでに受けておりますので学識についての審査を免除した。