

Coseparable coalgebra について

岡山大 理 中島 惇

k を体、 C を k -coalgebra とする。ここでは coseparable C -coalgebra の coderivation による特徴づけと、それについての coextension について述べる。以下で用いられる用語や記号等は [3], [4] を、また詳細な証明については [3] を参照されたい。

A, C を k -coalgebras, $\phi: A \rightarrow C$ を k -coalgebra map とする。 M を A -comodule とすれば、 M は ϕ によって自然に C -comodule となる。はじめに [1] において定義された k -coderivation の概念を少し一般的な形に述べておく。

定義 1 (cf. [1, §3]). M を A - A -bicomodule (従って ϕ によって自然に C - C -bicomodule となる) とする。 C -comodule map $f: M \rightarrow A$ が C -coderivation とは

$$\Delta_A f = (1 \otimes f) \rho^+ + (f \otimes 1) \rho^- : M \rightarrow A \otimes C$$

が成り立つときをいう。ここで ρ^+ 及び ρ^- はそれぞれ M の右及び左 A -comodule の structure map である。 C -coderivation f が inner C -coderivation であるとは次の条件をみたす C -comodule map $\gamma: M \rightarrow C$ が存在するときをいう。

$$f = (1 \square \gamma) \rho^- - (\gamma \square 1) \rho^+.$$

定義 2. C -coderivation $\tau: M \rightarrow A$ が k -coderivation $\delta: M \rightarrow C$ の coextension であるとは $\phi \tau = \delta$ となるときをいう。

以下 $A \in \text{coalgebra}$, $M \in A\text{-}A\text{-bicomodule}$ とする。さらに C は cocommutative coalgebra であって、 $\phi: A \rightarrow C$ なる coalgebra map があると仮定する (このような ϕ があるとき A を C -coalgebra と呼ぶことにする)。

A - A -bicomodule の exact sequence を考えよう。

$$(*) \quad 0 \rightarrow A \xrightarrow{\Delta_A} A \square_c A \xrightarrow{\omega} (A \square_c A) / \Delta_A(A) \rightarrow 0$$

ここで ω は自然な写像であり、 $(A \square_c A) / \Delta_A(A)$ の A - A -bicomodule structure は $A \square_c A$ から自然に定義されるものとする。 $L = (A \square_c A) / \Delta_A(A)$, $a \cdot b = \omega(a \square b)$ とおく。次の補題は容易に証明できる。

補題 1 (cf. [1, §3]). k -linear map $\lambda: L \rightarrow A \otimes$

$$\lambda(a \cdot b) = a \otimes \phi(b) - \varepsilon_c \phi(a) b$$

と定義すれば、 λ は C -coderivation である。

定理 1 (cf. [1, 定理 3]). C -coalgebra A について次の同値である。

(1) A は coseparable C -coalgebra である (i.e., A - A -bicomodule の exact sequence (*) が split する)。

(2) 任意の A - A -bicomodule M に対して、すべての C -coderivation $f: M \rightarrow A$ は inner である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2). 仮定から $\tau \Delta_A = 1$ となる A - A -bicomodule map $\tau: A \square_C A \rightarrow A$ がある。任意の C -coderivation $f: M \rightarrow A$ に対して、 $h = \phi \tau (1 \square f) \rho^-: M \rightarrow C$ とおけば、 $f = (1 \square h) \rho^- - (h \square 1) \rho^+$ となる。

(2) $\Rightarrow$ (1). 仮定から C -comodule map $\gamma: L \rightarrow C$ で、 $\lambda = (1 \square \gamma) \rho_L^- - (\gamma \square 1) \rho_L^+$ (ここで ρ_L^+ , ρ_L^- はそれぞれ L の右 & 左 A -comodule structure map) なる γ が存在する。そこで $\xi = (1 \square \varepsilon_A \square 1) (1 \square \gamma \square 1) (\rho_L^- \square 1) \rho_L^+$ とおけば、 ξ は A - A -bicomodule map であり $\omega \xi = 1$ となる。 証終。

次に coderivation の coextension について述べる。 $B = A$

$\oplus M$ (k -vector space とし) とおく。 $\Delta_B: B \rightarrow B \otimes_k B$, $\varepsilon_B: B \rightarrow k$ を次のように定義すれば、 $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ は coalgebra となる ([2, §4])。

$$\Delta_B = \begin{pmatrix} \Delta_A & 0 \\ 0 & \rho^- \\ 0 & \rho^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_B = \begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\delta: M \rightarrow C$ を k -coderivation とし、 $\rho_B: B \rightarrow C \otimes_k B$ を

$$\rho_B = \begin{pmatrix} (\phi \otimes 1) \Delta_A & (\delta \otimes 1) \rho^+ \\ 0 & (\phi \otimes 1) \rho^- \end{pmatrix}$$

と定義すれば、 (B, ρ_B) は C -comodule となる。このとき次の定理を得る。

定理 2. $\delta: M \rightarrow C$ を k -coderivation とする。 A が injective C -comodule であり、 [2, §4] の意味で $H^2(N, A) = 0$ (N は任意の A - A -bicomodule) が成り立つと仮定すれば、 δ の coextension であるような C -coderivation $\hat{\delta}: M \rightarrow A$ が存在する。

証明。 B を上で定義した coalgebra とする。 $B \rightarrow A$ なる projection を通して B は C -coalgebra になる。

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$$

(ここで i, p はそれぞれ自然な injection 及び projection である。) のような C -comodule の exact sequence を与えれば、 A が C -

injective であることより split する。従って [2, 定理 4.10] より C -coalgebra map $\widehat{\delta}: B \rightarrow A$ で $\widehat{\delta}i = 1$ となるものが存在する。この $\widehat{\delta}$ が C -coderivation であり, $\phi\widehat{\delta} = \delta$ となるものである。

注意。 A が coseparable C -coalgebra ならば $H^2(N, A) = 0$ である。

References

- [1] Y. Doi: Homological coalgebra, to appear.
- [2] D. W. Jonah: Cohomology of coalgebras, Mem. Amer. Math. Soc. 82 (1968).
- [3] A. Nakajima: Cosemisimple coalgebras and coseparable coalgebras over coalgebras, Math. J. Okayama Univ. 21 (1979), 125-140.
- [4] M. E. Sweedler: Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969.