

最近の Recursion Theory について

法政大 工学部 田中尚夫

§0. この研究集会では Recursion Theory および関連する分野から, 筆者が興味をもった最近の話題のうち次のものを紹介した. 1. Paris-Harrington, 数学的不完全命題, 2. Solovay, 急増加 Ramsey 関数について. (これは 1 と密接に関係する話題である.) 3. Kechris, Δ_{2n}^1 -degrees の上昇列について. 4. Harrington, McLaughlin の問題の解決. (可算な Arithmetic set で, non-arithmetic singleton を含むようなものが存在する.) 5. Solovay, Green 等の, Measurable cardinals と Δ_2^1 決定性について. 6. Martin, Π_2^1 -ゲームの決定性について. (大きな基数の存在仮定から, Π_2^1 -ゲームの決定性が導かれること.) 7. Tanaka, E_n^1 -sets についての Recursion Theory.

本報告では, このうち 1 のみについて詳述し, 他はすべて省略する.

§1. Paris-Harrington の数学的不完全命題. これは昨年 (1977年) かなり話題になっていたもので, Gödel の不完全性定理 に関係する結果である. PA を ω 1 階の Peano 算術とする. Gödel は PA の命題 G で, 真であるが PA では証明不可能なものを創り出したが, G は論理体系からの諸概念のいあゆる Gödel 数化によるものであった. 以来長い間, そのような命題で 論理体系のコーディングにはよらない数学的なもの が探し求められてきた. ところが 1977 年早々, このような最初の例が J. B. Paris によって発見され, その方法が Ramsey 定理の有限形の一寸した変形に適用できることを L. Harrington が指適した.

ω を自然数全体の集合とする. $A \subseteq \omega$ が large であるとは $A \neq \emptyset$ で A の cardinal $|A| \geq \min A$ が成り立つこと. (ここで $\min A$ は A の最小元を表わす.) A が 0-large とは A が large であること; A が $(n+1)$ -large とは, $|A| \geq 4$ であって, どんな $P: [A]^3 \rightarrow 2$ に対しても A の部分集合 B で, n -large かつ P に対し 均値 (homogeneous) なもの — すなわち $P \upharpoonright [B]^3$ が定関数となる B — が存在することである. ここで $[A]^3$ は A の 3-element sets 全体の集合である.

Paris 原理 $\forall n \in \omega \exists m \in \omega$ (区間 $[0, m)$ は n -large である).

Paris の不完全性定理 Paris 原理は真であるが, PA では証明不可能な命題である.

注意 自然数の有限集合や有限実数は自然数で表現できる.
 例えば " $x \in \{0, 3, 4, 8\}$ " は $a = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^9$ とするとき $\exists i < 4 [x = (a)_i - 1]$ と書き表わすことができる. よって Paris 原理は PA の論理式として表わすことができる, しかも体系の Gödel 数化などにはよらないものである.

次に $A \subseteq \omega$, $a, b, c \in \omega$ に対し, $A \rightarrow (a)_c^b$ とは任意の分割 $P: [A]^b \rightarrow c$ に対し A の部分集合 B で, $|B| \geq a$ かつ P に対し均質なものがあること,

有限形 Ramsey 定理 $\forall a, b, c \exists m ([0, m) \rightarrow (a)_c^b)$.

この定理は PA で証明可能なことが知られている.

$A \nrightarrow (a)_c^b$ とは, $A \rightarrow (a)_c^b$ の定義において, $|B| \geq a$ なる条件を " $|B| \geq a$ かつ $|B| \geq \min B$ " でおきかえたものである.

Harrington 原理 $\forall a, b, c \exists m ([0, m) \nrightarrow (a)_c^b)$.

Harrington 不完全性定理 Harrington 原理は真であるが PA では証明不可能な命題である.

H-原理については次の文献を参照されたい.

Paris-Harrington, A Mathematical incompleteness in Peano Arithmetic, in Handbook of Mathematical Logic

(Ed. by J. Barwise), North-Holland (1977), 1133-1142.

ここでは筆者が聞いた R. Solovay の California 工科大学における連続講演から, Paris 原理に関する部分を, 多少補って整理し直したものを述べる. PA の非標準モデルの応用^として面白い証明であると思う.

§2. " n -large" sets についての準備事項.

補題 2.1. $5\text{-element-set } (\subset \omega)$ は 2-large ではない.

補題 2.2. $B \subseteq A \subseteq \omega, B: n\text{-large} \Rightarrow A: n\text{-large}.$

補題 2.3. A が $(n+1)\text{-large}$ ならば, A は $n\text{-large}.$

以上 3つの補題は容易に証明される.

補題 2.4. $n \geq 2$ とする. A が $n\text{-large}$ ならば, $|A| \geq n+4.$

証明. $n=2.$ A が 2-large ならば補題 2.1 により $|A| \geq 6.$ Ind. step. n のとき成り立つとする. A を $(n+1)\text{-large}$ とし, $a \in A$ を一つとる.

$f(i, j, k) = 1$ if one of i, j, k is a , $= 0$ otherwise
なる $f: [A]^3 \rightarrow 2$ を考える. f に対し均質な $n\text{-large}$ set $B \subseteq A$ がある. Claim $a \notin B.$ Ind. hyp. により $|B| \geq n+4.$ $\therefore |A| \geq |B| + 1 \geq n+5.$ Claim の証明:

もし $a \in B$ なら, ($n > 0$ だから) $|B| \geq 4$. よって a と異なる $i, j, k \in B$ がある. $f(i, j, a) = 1$, $f(i, j, k) = 0$ であるから $f \upharpoonright [B]^3$ は定関数でない. 不合理. $\perp$

系 2.5. $n \geq 5$ とする. $A \subseteq [0, n)$ ならば, A は $(n-3)$ -large でない.

系 2.6. $l \geq n \geq 4$ とする. $A \subseteq [0, n) \cup \{l\}$ ならば, A は $(n-2)$ -large でない.

補題 2.7 $n \geq 2$ とする. A が n -large で, $a \in A$ ならば, $A - \{a\}$ は $(n-1)$ -large である.

証明. $n=2$ のとき, A を 2-large とし, $a \in A$ を使って 2.4 の証明における f を作ると, f に対し均質な 1-large $B \subseteq A$ がある. $|B| \geq 4$ より $a \notin B$. $\therefore B \subseteq A - \{a\}$. よって補題 2.2 により $A - \{a\}$ は 1-large. Ind. Step. n のとき成り立つとし, A を $(n+1)$ -large とする. ここで $A - \{a\}$ が n -large でないと仮定しよう. $f: [A - \{a\}]^3 \rightarrow 2$ なる f で, f に対し $(n-1)$ -large 均値集合 $\subseteq A - \{a\}$ が存在しないようなものがある. $f^*: [A]^3 \rightarrow 2$, $f = f^* \upharpoonright [A - \{a\}]^3$ なる f^* に対し, n -large 均質な $B^* \subseteq A$ がある. 今度は $a \in B^*$ でなければならぬ. Ind. hyp. により $B^* - \{a\}$ は $(n-1)$ -large である. 従って $A - \{a\}$ が f に対し均質な $(n-1)$ -large set $B^* - \{a\}$ をもつことになり

f の選び方に矛盾する。ゆえに $A - \{a\}$ は n -large でなければならない。

定理 2.8. $n \geq 3$ とする。 $[0, m)$ が n -large ならば, $m > n$ であって $[n, m)$ は $(n-2)$ -large である。

証明. $[0, m)$ が n -large とする。次のように $f : [0, m-1]^3 \rightarrow 2$ を定義する。(系 2.5 により $m > n$.)

$$i < j < n \leq k < m-1 \quad \Rightarrow \quad f(i, j, k) = 1$$

$$i < n \leq j < k < m-1 \quad \Rightarrow \quad f(i, j, k) = 0$$

$$i < j < k < n \quad \Rightarrow \quad f(i, j, k) = \text{任意}$$

以下 7 ページへ続く。

本節の結果は, 定義などの修正によって少し改良できる。しかし後方への影響はない。本節に關し塚田信高, 高橋真兩氏から有益な御注意を受けた。

$$n \leq i < j < k \Rightarrow f(i, j, k) = 0$$

$$i < j < n \Rightarrow f(i, j, m-1) = 0$$

$$i < n \leq j < m-1 \Rightarrow f(i, j, m-1) = 1.$$

この f に対し均質な $(n-1)$ -large set $B \subseteq [0, m)$ がある. Claim $|[0, n) \cap B| \leq 1$. もし $[0, n) \cap B = \emptyset$ ならば, $B \subseteq [n, m)$. よって $[n, m)$ は $(n-1)$ -large である. $[0, n) \cap B$ が singleton ならば, $\{i_0\} = [0, n) \cap B$ とすると, B は $(n-1)$ -large であるから補題 2.7 によって $B - \{i_0\}$ は $(n-2)$ -large, 従って それを含む $[n, m)$ は $(n-2)$ -large である.

Claim の証明: $|[0, n) \cap B| \geq 2$ と仮定すれば, $i_0, i_1 \in [0, n) \cap B$, $i_0 < i_1$ なる i_0, i_1 がある. $[0, n) \cup \{l\}$ ($l \geq n$) は $(n-1)$ -large でないから (補題 2.6), $B - [0, n)$ は少なくとも 2 元をもつ. よって $n \leq j < k$ なる $j, k \in B$ がある. $k < m-1$ の場合: $f(i_0, i_1, j) = 1$, $f(i_0, j, k) = 0$; $k = m-1$ の場合: $f(i_0, i_1, m-1) = 0$, $f(i_0, j, m-1) = 1$. よって $f|_{[B]^3}$ は定数関数でない. 不合理. $\perp$

§3. Paris 原理が真な命題であること.

補題 3.1. $A \subseteq \omega$, $n \in \omega$ とする. A が "無限集合な" は, A の有限部分集合 B で n -large なるものがある.

証明. n についての induction. $n=0$ のときは自明. n のとき, すべての無限集合 A について補題が成立するとする. $n+1$ の場合成立しないと仮定すれば: 或無限集合 A があって, A は有限 $(n+1)$ -large 部分集合を含まない. 従って $|D| \geq 3$

(1) $\forall D \subset A$ (D finite) $\Rightarrow \exists P: [D]^3 \rightarrow 2$ s.t. P に対し均質な有限 n -large set $C \subset D$ は存在しない) である. Claim. $F: [A]^3 \rightarrow 2$, F に対しては均質な A の有限 n -large 部分集合がないような F がある. 無限形 Ramsey 定理によれば, 上の F に対し A の無限部分集合 B で, F に対し均質なものがある. この B に対し帰納法の仮定を使うと, B は有限 n -large 部分集合 C をもつ. $F \upharpoonright [B]^3$ は定数関数だからもちろん $F \upharpoonright [C]^3$ もそう. よって F に対し均質な有限 n -large 集合 $C \subset A$ が存在することになって, F の性質に反する.

Claim の証明. A の要素を並べて $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ とし, $A_n = \{a_i \mid i < \underbrace{n}_{+3}\}$ とおく. (1) より,

各 A_k に対し反例 P_k が少なくとも一つ存在する。反例は各 k に対し有限個しかない。今

$$P_k \prec P_\ell \Leftrightarrow k < \ell \text{ \& } P_k = P_\ell \upharpoonright [A_k]^3$$

と定義すれば, $T = \{P \mid P \text{ は } A_k \text{ に対する反例, } k=0, 1, 2, \dots\}$ は $\prec$ に関して有限分岐無限 tree をなす。更に $P \in T$ が根でなければ, $P' \prec P$ なる P' が必ずある。よって D. König の補題により, T は少なくとも一つの無限枝をもつ。これは自然に一つの $F: [A]^3 \rightarrow 2$ を定義し, F は A の有限 n -large 均質部分集合をもたない。┐

系 3.2. $\forall n \in \omega \exists C \subset \omega$ (C は有限 n -large)。

系 3.3. Paris 原理が成り立つ: $\forall m \exists m \text{ s.t.}$

$[0, m)$ は n -large である。

証. C_n を有限 n -large 集合 $\subset \omega$ とする。 C_n の最大元を $m-1$ とすると, $[0, m)$ は n -large である。┐

同様の論法で Harrington 原理が成立することを証明できる。

§4 PA の可算非標準モデルにおける cut

$\mathcal{M} = \langle |\mathcal{M}|, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}} \rangle$ を PA の可算非標準モデルとする。以下 superscript $\mathcal{M}$ は省略し $\mathcal{M}$ と $|\mathcal{M}|$ とを同一視する。 $C \subset \mathcal{M}$ が cut であるとは, 1°) $0 \in C$, 2°) $x \in C \Rightarrow x+1 \in C$, 3°) $x \in C \ \& \ y < x \Rightarrow y \in C$, 4°) $C \neq \mathcal{M}$, が成り立つこと。例えば $\mathcal{M}$ の標準自然数全体の集合は cut である。一般に $\mathcal{M}$ の cuts は沢山ありうる。

例 4.1 $\mathcal{F} = \{ f \mid f: \omega \rightarrow \omega, f \text{ is FODD} \}$

$\langle \omega, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ とおく。 $\mathcal{F}$ は可算集合である。 $\mathcal{U}$ をすべての co-finite sets $\subseteq \omega$ を含む ω 上の non-principal ultrafilter とし, $\mathcal{S} = \mathcal{F}/\mathcal{U}$ を作ればこの $\mathcal{S}$ は PA の可算非標準モデルである。 $\mathcal{S}$ には $2^{\aleph_0}$ 個の cuts が存在する。何故なら, もちろん $\mathcal{S}$ は $<$ の意味で稠密ではないが, 次の補題が成り立つからである。

補題 4.2 各正有理数 r に対し, $\mathcal{F}/\mathcal{U}$ の要素の無限下降列を含む区間 I_r を対応させ,

$r < r' \Rightarrow$ 区間 I_r の要素 $<$ 区間 $I_{r'}$ の要素
が成り立つようにできる。

さて $\mathcal{M}$ を可算非標準モデル (PA の) とし, C を $\mathcal{M}$ の cut とする. $B \subseteq C$ が C の クラス であるとは, $\mathcal{M}$ の意味で有限な集合 $b (\subset \mathcal{M})$ が存在して $B = b \cap C$ となることである. (簡単に " $\mathcal{M}$ -有限" と呼ぶ.)
 $R \subset C \times C$ が C の 2-項関係 とは, $R = \pi^{-1}(b) \cap C \times C$ なる $\mathcal{M}$ -有限集合 b が存在すること, ただし π は pairing function である. 多項関係も同様に定義される.

例 4.3. $x \in C$ に対し $A = \{z \in C \mid x \leq z\}$ とおくと, A は C のクラスである.

証明. (本橋信義氏による.) $\text{Fin}(y) \Leftrightarrow \forall s \forall t [s < t < \text{lh}(y) \Rightarrow (y)_s < (y)_t]$. $\text{Fin}(y)$ の下で $z \in y \Leftrightarrow \exists s < \text{lh}(y) (z = (y)_s)$ とする.

$$\text{PA} \vdash \forall u \forall x [x < u \rightarrow \exists y (\text{Fin}(y) \wedge \forall z (z \in y \leftrightarrow x \leq z < u))] \vdash$$

は明か. よってこの sentence は $\mathcal{M}$ で真. 今 $u \in \mathcal{M} - C$, $x \in C$ なる u, x をとると, $x < u$ であるから, $\forall z (z \in a \leftrightarrow x \leq z < u)$ なる $\mathcal{M}$ -有限 set a が存在する. そうして $A = a \cap C$. $\perp$

cut C が 正則 とは, C の任意のクラス B と任意の $x \in C$ に対し,

$$B : \text{cofinal in } C \Rightarrow B \text{ は } x^{\text{th}} \text{ element を持つ.}$$

補題 4.4 C が正則 cut なら, C は $+$, $\cdot$, $\exp$ の下で閉じている.

証明. 1°) $x \in C \Rightarrow x+x \in C$. 証: $x \in C$ に対し $A = \{z \in C \mid x \leq z\}$ を作ると 例 4.3 により A は C の cofinal クラスである. $x+1 \in C$ だから A は $x+1$ 番要素をもつ. それは Γ 度 $x+x$ である. $\therefore x+x \in A \subseteq C$. $\square$

2°) $x, y \in C \Rightarrow x+y \in C$. 証: $x < y$ としてよい. $x+y < y+y \in C$ (by 1°). $\therefore x+y \in C$. $\square$

3°) $x, y \in C \Rightarrow x \cdot y \in C$. 証: $x \in C, x \neq 0$ とする. $A = \{x \cdot y \in C \mid y \in C\}$ を作れば 例 4.3 の方法で A が C のクラスであることがわかる. A は cofinal in C である. $[\odot$ もし $A < \nu$ なる $\nu \in C$ があれば, $x \cdot y \leq \nu$ なる最大の $x \cdot y$ をとる. 最大性から $x \cdot (y+1) > \nu$. $\nu \in C$ だから $x \cdot y \in C$. $\therefore x \cdot (y+1) = x \cdot y + x \in C$. $\therefore x \cdot (y+1) \in A$. これは $A < \nu$ と矛盾する.] 任意の $y \in C$ に対し $y+1 \in C$ だから A は $(y+1)$ 番要素をもつ. それは $x \cdot y$ に他ならない. $\square$

4°) $x, y \in C \Rightarrow x^y \in C$. ($x \neq 0$) 証. $x \neq 0, 1$ なる $x \in C$ を固定する. $A = \{x^y \in C \mid y \in C\}$ として 3°) と同様に論ぜよ. $\square$ $\dashv$

cut が PA のモデルになる条件を調べる。

補題 4.5. cut C が $+$, $\cdot$ の下で閉じていて,
 C のすべての関係達の集合が $\exists x \in C$ の下で閉じていれ
 ば, C は PA のモデルである。

証明. $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ を PA の論理式とし

$$B = \{ (x_1, \dots, x_m) \in C^m \mid C \models \varphi(x_1, \dots, x_m) \}$$

とすれば, B は C の関係である。—— 何となれば:

$\varphi(x) = \exists y \psi(x, y)$ の場合. Ind. hyp. により $D(\psi) =$
 $\{ (x, y) \in C^2 \mid C \models \psi(x, y) \}$ は C の関係である. C の関
 係達は $\exists y \in C$ の下で閉じているから $D(\varphi) = \{ x \in C \mid$
 $C \models \exists y \psi(x, y) \} = \{ x \in C \mid \exists y \in C ((x, y) \in D(\psi)) \}$ は
 C の関係(クラス)である. $\varphi = \neg \psi$ とき. $D(\varphi) = \{ x \in C$
 $\mid C \models \neg \psi(x) \} = C - D(\psi)$. $D(\psi) = b \cap C$ なる $\mathcal{U}$ -有
 限集合 b があるから, これを用いて $D(\varphi) = d \cap C$ なる
 $\mathcal{U}$ -有限集合 d を作ることが出来る。

さて $C \models$ "数学的帰納法" とは $B = \{ x \in C \mid C \models$
 $\varphi(x) \} \neq \emptyset$ なる B が最小元をもつことである. 上でみ
 たように B は C のクラスであるから,

" C の空でないクラス B は必ず" 最小元をもつ"
 ことが言えればよい. $B = b \cap C$ なる $\mathcal{U}$ -有限集合 b を
 とる. b の最小元を x_0 とすると, $x_0 \in C$ [$\odot$] もし

$x_0 \notin C$ なら $\forall x > x_0 (x \notin C)$ であるから, $b \cap C = \emptyset$ となって $B \neq \emptyset$ に反す.] 従って $x_0 \in B$. 明白に x_0 は B の最小元である.

数学的帰納法以外の PA の公理が C で成り立つことは, 仮定によって明白である. $\perp$

cut C が 弱コンパクト とは, C が正則で, かつ

(1) $\left\{ \begin{array}{l} \forall F: [C]^3 \rightarrow 2, F \text{ は } C \text{ の関係} \Rightarrow \exists S \subseteq C: \\ S \text{ は cofinal クラス of } C \text{ で, } F \text{ に対し均値である.} \end{array} \right.$

が成り立つこと.

補題 4.6. 弱コンパクト cut は PA のモデルである.

証明. C は正則であるから, 補題 4.4 によって $\leq$ は $+$, $\cdot$ の下で閉じている. よって補題 4.5 から, C の関係 $\leq$ が $\exists x \in C$ の下で閉じていることが言えれば十分.

$R(x, y)$ を C の関係とする. $x < y < z$ に対し

$$F(x, y, z) = 1 \iff \forall u < x \left[(\exists v < y) R(v, u) \right. \\ \left. \iff (\exists v < z) R(v, u) \right]$$

なる $F: [C]^3 \rightarrow 2$ を作る.

Claim (i) F は C の関係である. 証: R に対し $\aleph_1$ -有限集合 r が存在して $R = r \cap C^2$. この r を用いて $\aleph_1$ -有限な f を求め $F = f \upharpoonright [C]^3$ が成り立つように

できる。□

さて C が弱コンパクトなることから, この F に対し C の cofinal クラス S で, 均質なものがある。

Claim (i) $F \upharpoonright [S]^3 \equiv 1$. 証. S は F に対し均質だから, $x < y < z$, $F(x, y, z) = 1$ なる 1 列且の $\{x, y, z\} \in [S]^3$ が与えられればよい. $x = \min S$ とおき, $x \in C$ なるゆえ $2^x + 2 \in C$. 故って S は $2^x + 2$ 番要素をもつ:

$$S = \{s_0 = x, s_1, s_2, \dots, s_{2^x+1}, s_{2^x+2}, \dots\}$$

そこで, $T_i = \{u < x \mid (\exists v < s_i) R(v, u)\}$ とおくと, $|\mathcal{P}(\{u \mid u < x\})| = 2^x$ であるから, Pigeonhole Principle によって

$$\exists i, j : 1 \leq i < j \leq 2^x + 1, T_i = T_j.$$

よって F の定義から $F(s_0, s_i, s_j) = 1$. □

目的の “ $(\exists v \in C) R(v, u)$ が C のクラスである” を示すために,

$$W = \{x \in C \mid y \text{ が } S \text{ の } > x \text{ なる最小元で, } z \text{ が } S \text{ の } > y \text{ なる最小元ならば, } (\exists v < z) R(v, x)\}$$

なる W を考える. R はクラスであるから 例 4.3 のような方法によって W がクラスであることがわかる。

Claim (ii). $W = \{x \in C \mid (\exists v \in C) R(v, x)\}$. 証: $\subseteq$ は明白. よって $(\exists v \in C) R(v, x)$ とせよ. y を x

より大きい最小の S の元, z は y より大きい最小の S の元とする. S は有界でないから

$$z' > z \quad \& \quad (\exists u < z') R(u, x)$$

なる $z' \in S$ がある. よって Claim(ii) により

$$F(y, z, z') = 1. \quad \text{従って}$$

$$\forall u < y [(\exists u < z) R(u, u) \leftrightarrow (\exists u < z') R(u, u)]$$

である. 特に $x < y$ だから

$$(\exists u < z) R(u, x) \leftrightarrow (\exists u < z') R(u, x).$$

右辺は真, よって $(\exists u < z) R(u, x)$, $\therefore x \in W$. $\square$

W は C のクラスだから Claim(ii) から $\{x \in C \mid (\exists u \in C) R(u, x)\}$ は C のクラスである. $\perp$

§5. 主定理の証明

先づ, 証明の Key になる定理を述べる.

定理 5.1. $\mathcal{M}$ が PA の可算非標準モデルで, x, y, z が $\mathcal{M}$ の非標準数, $x < y$ かつ区間 $[x, y)$ が z -large であるとする. このとき

$x \in C$, $y \notin C$, C は弱コンパクトな cut C が存在する. 従って $C \models PA$.

証明 Real world で考える. $\{f_i \mid i \in \omega\}$ は $f: [y]^3 \rightarrow 2$ なるすべての写像 f 達を $\mathcal{M}$ の要素達

で“コード”したものの enumeration とする。ただし各 f がリストに無限回現われるようにしておく。

$\mathcal{U}$ -有限集合達の無限列

$$\langle S_i \mid i \in \omega \rangle, \quad S_{i+1} \subseteq S_i$$

で、各 S_i が $(\aleph-i)$ -large とするものを定義する。

$\aleph$ は非標準数であるから、すべての標準数 i に対し $\aleph-i \in \mathcal{U}$ である。

先づ $S_0 = [x, y)$ とする。仮定により S_0 は $(\aleph-0)$ -large であり、明白に $\mathcal{U}$ -有限である。Ind. hyp.:

S_i は f_{i-1} に対し均質な $\mathcal{U}$ -有限 $(\aleph-i)$ -large set $\subseteq S_{i-1}$ とする。仮定により $f_i \upharpoonright [S_i]^3$ に対し $(\aleph-i-1)$ -large set $S_{i+1} \subseteq S_i$ がある。 (均質な)

個々の step は $\mathcal{U}$ 内で言うから S_{i+1} は $\mathcal{U}$ -有限集合として得られる。

$a_n = \min S_n$ とすると、 $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ 。

Claim (i) $\forall i \in \omega \exists j \in \omega [j > i \ \& \ a_j > a_i]$ 。

証: 与えられた i に対し

$$f(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 1 & \text{if one of } y_1, y_2, y_3 \text{ is } a_i \\ 0 & \text{ow,} \end{cases}$$

なる $f: [y]^3 \rightarrow 2$ を作る。 $f = f_j$, $j > i$ なる j がある。 S_{j+1} は f_j に対し均質だから $f \upharpoonright [S_{j+1}]^3$ は

定関数. 故て §2 の論法で $a_i \notin S_{j+1}$. 従って

$$a_i < \min S_{j+1} = a_{j+1}. \square$$

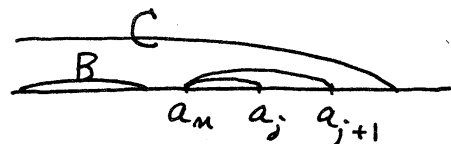
そこで $C = \{x \in \mathcal{U} \mid \exists i \in \omega (x < a_i)\}$ と定義する. $C \subseteq [0, y)$ であるから, C は cut である.

Claim (ii) C は正則である. 証: B を C の任意のクラスとする. B が有界であるか又は B が " C " 個の元を含むことを示せばよい. $B = b \cap C$ なる $\mathcal{U}$ -有限集合 b がある. $f: [\mathcal{U}]^3 \rightarrow 2$ を $y_0 < y_1$ に対し

$f(y_0, y_1, y_2) = 0$ if $b \cap [y_0, y_1) = \emptyset$, $= 1$ otherwise, によって定義する. 或 S_m が f に対し均値である.

Case 1°) $f = 0$ on $[S_m]^3$. このとき $a_m \leq t < a_j$ なるすべての区間 $[a_m, a_j]$

が B の元を含まない. 故て



B は C で有界である. Case 2°) $f = 1$ on $[S_m]^3$.

このとき, 各 j に対し B が少くとも a_j 個の元を含むことを示す. m を十分大きくとって $m > n$, $a_m > a_j + 1$,

S_m : f に対し均値 となるようにする. S_m は $(\aleph - m)$ -large だから もちろん 0-large. 故て S_m は少くとも $a_m (= \min S_m)$ 個の元を含む. 故て S_m は

$$S_m = \{w_0, w_1, w_2, \dots, w_{a_j+1}, \dots, w_{a_m}, \dots\}$$

のようにならぶことができる. 今 $w_{a_j+1} \in C$ なる

ことが証明されたとしよう. そのとき w_{a_j+1} より小さい元はすべて C に属す. もちろん $f=1$ on $[S_m]^3$ であるから $k+1 < a_j+1$ なるすべての k に対し $[w_k, w_{k+1})$ は B の元を少くとも一つ含む. 従って B は少くとも a_j 個の元を含む.

以下, $w_{a_j+1} \in C$ の証明: $h: [Y]^3 \rightarrow 2$ を $y_1 < y_2 < y_3$ に対し $h(y_1, y_2, y_3) = 1 \iff y_1 > w_{a_j+1}$ によって定義する. p を十分大きくとって $p > m, a_p > a_m$, $S_p: h$ に対し均値, とする. これに対し $h = 1$ on $[S_p]^3$.

何故なら, S_p は 0-large だから少くとも a_p 個の元をもつ. S_p の元を並べると

$$S_p = \{u_0, u_1, \dots, u_{a_j+1}, \dots, u_{a_m}, \dots, u_{a_p}, \dots\}.$$

となる. $u_0 = a_p > a_m = w_0$, $S_p \subseteq S_m$,

$$S_m = \{w_0, w_1, \dots, w_{a_j+1}, \dots\}$$

であるから, $w_{a_j+1} < u_{a_j+1}$. 従って $h(u_{a_j+1}, u_{a_m}, u_{a_p}) = 1$. $\therefore h = 1$ on $[S_p]^3$.

これによって S_p の元はすべて w_{a_j+1} より大きいことがわかる. 特に $a_p > w_{a_j+1}$ である. $a_p \in C$ なるゆえ, $w_{a_j+1} \in C$. これで Claim(ii) が証明された. $\square$

定理 5.1 を証明するために, C が弱コンパクトで

あることを示さねばならぬ。既に C が正則であることは証明したから、

$\forall F: [C]^3 \rightarrow 2$, F は C の関係 $\Rightarrow \exists S: S$ は C の cofinal クラスで, F に対し均値である,

を示せばよい。そこでかかる F もとれ。 $f: [Y]^3 \rightarrow 2$, $F = f \upharpoonright [C]^3$ なる f を作る。 F は C の関係だから, $\aleph_1$ -有限な f がとれる。よって f に対し均値な S_n が存在する。 S_n は $\aleph_1$ -有限であるから $S \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_n S_n \cap C$ は C のクラスであり, 十分大きいすべての j に対し $a_j \in S$ である。よって S は cofinal in C 。明らかに S は F に対し均値である。

以上により 定理 5.1 が証明された。 $\square$

さて系 3.3 により

$$\gamma(n) = \min \{ m \mid [0, m) \text{ は } n\text{-large} \}$$

なる関数 $\gamma: \omega \rightarrow \omega$ が定まる。 " $[0, m)$ は n -large である" は n, m の recursive relation であるから, γ は一般帰納的関数である。

補題 5.2 $f: \omega \rightarrow \omega$ を任意の provably recursive function とする。そのとき 或 $\mathcal{P}$ が先すべての n に対し

$$\gamma(m) \geq f(m)$$

が成り立つ。

証明. $f = \{e\}$ (e は f に対する Gödel 数) とする. 仮定により

$$PA \vdash \forall x \exists y T(e, x, y),$$

ここに e は e に対する numeral で, T は Kleene の T -predicate である.

$$S(x, z) \Leftrightarrow \exists y [T(e, x, y) \wedge z = U(y)]$$

と置く, ここに $U(y)$ は Kleene の U -function である.

$S(x, z)$ は Σ_1^0 -formula である. 今仮りに無限に多くの m に対し $\gamma(m) < f(m)$ であったとしよう.

$$PA \text{ の公理系, } c > m \ (m \in \omega), \gamma(c) < f(c)$$

なる sentences の集合は有限充足可能である. ゆえに Compactness Theorem によって, これらすべての sentences に対する可算モデル $\mathcal{M}$ がある. 明らかに $\mathcal{M}$ は非標準モデルである. c を解釈する $\mathcal{M}$ の元を同じ c で表わそう.

$[0, \gamma(c))$ は c -large であった. 定理 2.8 により $[c, \gamma(c))$ は $(c-2)$ -large である. $c, \gamma(c), c-2$ は非標準数であるから 定理 5.1 を適用して,

$$c = x \in C, \quad y = \gamma(c) \notin C$$

なる弱コンパクト cut C がある. $\gamma(c) < f(c)$ より

$$(1) \quad f(c) \notin C.$$

ところで $PA \vdash \forall t \exists! z S(t, z)$ であり, $C \models PA$

であるから, 各の $c \in C$ に対し $C \models S(c, w)$ なる

unique $w \in C$ がある. S は Σ_1^0 -formula なるゆえ

$\gamma c \models S(c, w)$. 一方 $S(*, *)$ の定義から

$\gamma c \models S(c, f(c))$. ゆえに $w = f(c)$ とななければならない.

$\therefore f(c) \in C$. これは (1) と矛盾する.

従って γ は f を弱コンパクトで dominate する. $\perp$

Paris 原理は PA で証明可能でない.

証明. もし $PA \vdash$ Paris' 原理 とせよ, 即ち

$$PA \vdash \forall m \exists n ([0, m) \text{ は } n\text{-large}).$$

よって $PA \vdash "$ γ is total " ということになる,

γ が provably recursive となってしまう. これは

補題 5.2 に反す. 従って

$$PA \not\vdash \text{Paris 原理.} \quad \perp$$

γ は general recursive であるが, provably recursive ではない具体例を与える. 今まで知られていたかかる関数は 対角線論によって作られたもののみである.
以上.