

各点収束位相をもつ関数空間の Ramsey property

神奈川大学・工学部

(Faculty of Engineering, Kanagawa University)

酒井 政美 (Masami Sakai)

1 はじめに

位相空間はすべて Tychonoff 空間とする。空間 X 上の実数値連続関数全体に各点収束位相をいれた空間を $C_p(X)$ で表す。Gerlits, Nagy [3] 以来、 $C_p(X)$ の局所的性質と、その局所的性質を特徴づける X の covering property に関する多くの結果が知られている。そのような結果の概要は [7] を参照されたい。本稿では $C_p(X)$ の α_i -properties に関する Shakhmatov の問題を解決した論文 [8] の概要を与える。

2 性質 (α_i) と the Ramsey property

定義 1 (Arhangel'skii, 1972 [1]) 空間 X の任意の点 $x \in X$ と x への任意の収束点列の族 $\{S_n : n \in \omega\}$ に対して、次の条件 (α_i) を満たす x への収束点列 S が存在するとき、 X は α_i -空間 ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) とよばれる。

- (α_1) すべての $n \in \omega$ に対して、 $S_n \setminus S$ は有限集合、
- (α_2) すべての $n \in \omega$ に対して、 $S_n \cap S$ は無限集合、
- (α_3) 無限個の $n \in \omega$ に対して、 $S_n \cap S$ は無限集合、
- (α_4) 無限個の $n \in \omega$ に対して、 $S_n \cap S \neq \emptyset$ 。

定義 2 (Nyikos, 1992 [6]) 空間 X の任意の点 $x \in X$ と x への任意の収束点列の族 $\{S_n : n \in \omega\}$ で $S_n \cap S_m = \emptyset$ ($n \neq m$) を満たすものに対して、次の条件 $(\alpha_{3/2})$ を満たす x への収束点列 S が存在するとき、 X は $\alpha_{3/2}$ -空間 とよばれる。

- $(\alpha_{3/2})$ 無限個の $n \in \omega$ に対して、 $S_n \setminus S$ は有限集合。

これらの性質の関係は次の図式のようになる。第 1 可算公理を満たす空間は、 α_1 -空間である。 $(\alpha_{3/2}) \rightarrow (\alpha_2)$ の証明は Nyikos [6] による。

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha_{3/2} \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_4$$

定理 1 (Dow, 1990 [2]) Laver's model では $(\alpha_1)=(\alpha_2)$ が成り立つ。

定義 3 (Nogura, Shakhmatov, 1995 [5]) 空間 X の任意の点 $x \in X$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n,m} = x$ を満たす X の点列 $\{x_{n,m} : n, m \in \omega\}$ に対して、次の条件 (*) を満たす ω の無限部分集合 M が存在するとき、 X は **Ramsey property** をもつといわれる。

(*) x の任意の近傍 U に対して、ある $k \in \omega$ が存在して $\{x_{n,m} : n, m \in M, k \leq n < m\} \subset U$ を満たす。

上の図式に Ramsey property を加えると次のようになる。Arens の空間 S_2 は α_1 -空間であるが Ramsey property はもたない。

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \rightarrow \alpha_{3/2} \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_4 \\ \nearrow \\ \text{Ramsey} \end{array}$$

位相群の Ramsey property について、Nogura、Shakhmatov は次の結果を与えた。

定理 2 (Nogura, Shakhmatov, 1995 [5])

- (1) 局所コンパクトな位相群において、 (α_1) 、 (α_2) 、 (α_3) 、 (α_4) 、そして Ramsey property はすべて同値である。
- (2) 一般の位相群においては、次の図式が成り立つ。

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \rightarrow \alpha_{3/2} \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_4 \\ \searrow \quad \nearrow \\ \text{Ramsey} \end{array}$$

位相群における (α_2) と Ramsey property の関係については何も知られていない。

未解決問題(Shakhmatov, 2002 [10, Question 3.15])

- (1) 位相群において (α_2) から Ramsey property がでるか？
- (2) 位相群において Ramsey property から (α_2) がでるか？

定理 1 と定理 2 (2) から、Laver's model では位相群において (α_2) から Ramsey property がでる。しかし、ZFC において成立する可能性は残っている。

各点収束位相を入れた関数空間 $C_p(X)$ は位相群であるが、この種の空間では次の 2 つの定理が知られている。

定理 3 (Gerlits, Nagy 1988 [4]/ Scheepers 1998 [9]) $C_p(X)$ において、 (α_2) , (α_3) , (α_4) はすべて同値である。

定理 4 (Sakai, 2009 [8]) $C_p(X)$ において、 (α_1) と $(\alpha_{3/2})$ は同値である。

定理 3 と定理 4 から、 $C_p(X)$ においては次の図式が得られる。

$$\alpha_1 = \alpha_{3/2} \rightarrow \text{Ramsey} \rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

Shakhmatov は上の未解決問題の特別な場合として次の問題を出した。

問題 (Shakhmatov, 2002 [10, Question 5.9])

- (1) $C_p(X)$ において (α_2) と Ramsey property は同値か?
- (2) $C_p(X)$ において Ramsey property と $(\alpha_{3/2})$ は同値か?

この問題に対して、(1) は肯定的であり、(2) には反例が存在する。

定理 5 (Sakai, 2009 [8]) $C_p(X)$ において、 (α_2) と Ramsey property は同値である。

反例 Scheepers [9] は $\mathfrak{t} = \mathfrak{b}$ のもとで、実数の部分集合 X で、 $C_p(X)$ は (α_2) を満たすが (α_1) は満たさない例を構成した。定理 4 と定理 5 から、この $C_p(X)$ が問題 (2) の反例になる。

参考文献

- [1] A.V. Arhangel'skii, The frequency spectrum of a topological space and the classification of spaces, Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 1185–1189.
- [2] A. Dow, Two classes of Fréchet-Urysohn spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 241–247.
- [3] J. Gerlits and Zs. Nagy, Some properties of $C(X)$. I, Topology Appl. **14** (1982), 151–161.

- [4] J. Gerlits and Zs. Nagy, On Frechet spaces, *Rend. Circ. Mat. Palermo*(2)Suppl. No. 18 (1988), 51–71.
- [5] T. Nogura and D. Shakhmatov, Amalgamation of convergent sequences in locally compact groups, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **320** (1995), 1349–1354.
- [6] P. J. Nyikos, Subsets of ${}^{\omega}\omega$ and the Fréchet-Urysohn and α_i -properties, *Topology Appl.* **48** (1992), 91–116.
- [7] M. Sakai, Special subsets of reals characterizing local properties of function spaces, in: Lj.D.R. Kocinac (Ed.), *Selection Principles and Covering Properties in Topology*, in: *Quad. Mat.*, **18**(2007), 195–225.
- [8] M. Sakai, The Ramsey property for $C_p(X)$, to appear in *Acta Math. Hungar.*.
- [9] M. Scheepers, $C_p(X)$ and Arhangel'skii's α_i -spaces, *Topology Appl.* **89** (1998), 265–275.
- [10] D. Shakhmatov, Convergence in the presence of algebraic structure, In *Recent Progress in General Topology, II*, (M. Hušek and J. van Mill eds.), North-Holland, Amsterdam, 2002, 463–484.